Applications harmoniques et hyperbolicité de domaines tubes

Autor(en): **Loeb, Jean-Jacques**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **53 (2007)**

Heft 3-4

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-109551

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 53 (2007), 347–367

APPLICATIONS HARMONIQUES ET HYPERBOLICITÉ DE DOMAINES TUBES

par Jean-Jacques LOEB

ABSTRACT. An application of the Zalcman renormalization theorem to harmonic functions shows that the limit functions are nonconstant affine. Extensions of this method are given for maps with values in a torus or in a complex Lie group. As an application, we give criteria of Kobayashi hyperbolicity for tubes in $\mathbf{C}^2$.

1. INTRODUCTION

Dans leur article [3], F. Berteloot et J. Duval démontrent le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Étant donné une fonction holomorphe entière f non constante qui ne s'annule pas, il existe une suite A_n de nombres positifs et une suite B_n de nombres complexes telles que la suite des fonctions $f(A_n z + B_n)$ tend uniformément sur tout compact vers une fonction de la forme Ce^{dz} avec C et d non nuls.*

Ils prouvent ce théorème en utilisant le théorème de renormalisation de Zalcman [13]. Un théorème de renormalisation similaire à celui de Zalcman avait été également obtenu par Brody [4] qui utilisait des homographies au lieu de transformations affines. Comme l'avaient remarqué Berteloot et Duval, le petit théorème de Picard est une conséquence immédiate de leur résultat moyennant l'utilisation d'un lemme classique d'Hurwitz. Dans leur article, les auteurs donnaient une généralisation de leur théorème à la dimension supérieure, ce qui leur permettait d'établir l'hyperbolicité du complémentaire de certaines courbes dans le plan projectif complexe. Ils retrouvaient aussi avec une méthode élémentaire la généralisation du théorème de Picard par

Mark Green, à savoir que le complémentaire de $2n+1$ hyperplans en position générale dans $\mathbf{P}^n$ est hyperbolique (ici ceci signifie essentiellement qu'une application holomorphe entière qui prend ses valeurs dans ce complémentaire est constante).

Comme point de départ et motivation de notre étude, notons le fait suivant:

PROPOSITION 2. *On a l'équivalence entre le théorème précédent et le résultat suivant:*

Pour toute fonction harmonique g définie sur $\mathbf{C}$ non constante, il existe une suite de positifs A_n et une suite de complexes B_n telles que la suite $g(A_n z + B_n)$ tend uniformément sur tout compact vers une fonction affine non constante.

La preuve de ce résultat est comme suit. Tout d'abord si g est harmonique sur $\mathbf{C}$, on l'écrit comme la partie réelle d'une fonction entière h et de ce fait $g = \ln|f|$, où $f = e^h$. On démontre ainsi que le théorème de Berteloot et Duval implique le résultat analogue sur les fonctions harmoniques. Dans l'autre direction, si f est une fonction entière ne s'annulant pas, on commence par appliquer le résultat de renormalisation à la fonction harmonique $g = \ln|f|$. On a donc une suite $g(A_n z + B_n)$ qui tend vers une fonction affine non constante. On utilise la conjuguée l de g et les relations de Cauchy-Riemann pour montrer que pour une détermination $\ln f$ de f, il existe une suite de réels c_n tels que $\ln f(A_n z + B_n) + ic_n$ ait une limite qui est nécessairement une fonction holomorphe affine non constante. On peut maintenant s'arranger quitte à extraire, pour faire en sorte que la suite $\ln f(A_n z + B_n)$ ait une limite modulo $2i\pi\mathbf{Z}$. Ceci permet de conclure.

Notons qu'un lemme de renormalisation est établi en dimension deux dans [12] pour les fonctions harmoniques sans qu'il soit donné de résultat précis sur la limite.

Notre article s'organise comme suit:

Dans la première partie, nous généralisons le résultat concernant les fonctions harmoniques à toutes les dimensions. Nous suivons la démarche de [3] et nous utilisons les inégalités classiques de Harnack pour travailler sur les fonctions harmoniques. Nous donnons ensuite des critères de normalité pour des familles de fonctions harmoniques ainsi qu'une caractérisation intrinsèque des fonctions affines parmi les fonctions harmoniques.

Dans la seconde partie, nous faisons le lien entre applications harmoniques et tubes dans $\mathbf{C}^n$. Des critères d'hyperbolicité (au sens de Kobayashi) sont donnés. On montre ainsi qu'il existe des tubes hyperboliques dont l'enveloppe

d'holomorphie est tout $\mathbf{C}^2$. Il nous a paru intéressant de faire quelques remarques en complément sur les images d'applications entières harmoniques.

Dans la dernière partie nous montrons que les fonctions (ou applications) solutions d'opérateurs elliptiques admettent une renormalisation à constante près en des fonctions (ou applications) affines non constantes. Une généralisation naturelle est donnée pour les groupes de Lie complexes.

Pour les propriétés élémentaires sur les fonctions harmoniques utilisées ici, nous renvoyons le lecteur à [1].

2. Renormalisation des fonctions harmoniques

Notation 3. Dans cette partie, on désigne par U un domaine dans $\mathbf{R}^m$ et on note par $H(U)$ l'espace des fonctions harmoniques sur U. Une fonction de $H(\mathbf{R}^m)$ sera dite harmonique entière.

Sur $[-\infty, +\infty]$, on met la distance d définie par: $d(x,y) = |S(x) - S(y)|$, avec $S(x) := \arctan(\sinh x)$. Cette distance définit la topologie usuelle. Elle est inspirée par la métrique de Fubini-Study.

Pour une fonction f différentiable sur U, on pose $\tilde{f}(x) := |(S \circ f)'(x)| = s \circ f(x)|f'(x)|$ où on a noté s la dérivée de S et f' le gradient de f. Explicitement: $\tilde{f}(x) = \frac{|f'(x)|}{\cosh f(x)}$.

Dans la suite, nous utiliserons un lemme de renormalisation de base donné par plusieurs auteurs. La version que nous donnons, due à F. Berteloot, est similaire à celle de Gromov (voir [7]).

Lemme 4. *Soit (V,d) un espace métrique complet et ϕ une fonction sur V à valeurs positives, localement bornée. On fixe $\tau > 1$, $\epsilon > 0$ et $p \in V$ tel que $\phi(p) > 0$. Alors il existe $q \in V$ tel que :*

1. $d(p,q) \leq \frac{\tau}{\epsilon\phi(p)(\tau - 1)}$,
2. $\phi(q) \geq \phi(p)$,
3. $\phi(x) \leq \tau\phi(q)$ *si* $d(x,q) \leq \frac{1}{\epsilon\phi(q)}$.

La preuve de ce lemme est élémentaire. Elle consiste à construire une suite p_n en partant de $p_0 = p$. Si la condition 3. est satisfaite en remplaçant q par p_0, on s'arrête et on prend $q := p_0$. Sinon on choisit p_1 dans la boule fermée de centre p_0 et de rayon $\frac{1}{\epsilon\phi(p_0)}$ avec $\phi(p_1) > \tau\phi(p_0)$. On raisonne

alors sur p_1 comme sur p_0. Il est alors facile de voir en utilisant l'hypothèse ϕ localement bornée que la condition 3. est satisfaite pour un certain p_n et que les deux autres conditions le sont également.

Le lemme suivant, conséquence du lemme précédent est celui qui nous intéressera par la suite.

LEMME 5. *Soit f_n une suite de fonctions différentiables sur U. On suppose que pour un certain point r de U, il existe une suite r_n qui tend vers r et telle que $\tilde{f}_n(r_n)$ tend vers l'infini. Alors il existe deux suites $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbf{R}^m$ tendant vers 0 et r respectivement et telles que si on pose: $g_n(z) := f_n(a_n z + b_n)$, on a: d'une part $\tilde{g}_n(0) = 1$ et d'autre part pour tout compact K de $\mathbf{R}^m$, il existe une suite de nombres $\epsilon_n > 0$ tendant vers 0 et telle que: $\tilde{g}_n \leq 1 + \epsilon_n$ sur K.*

Preuve. On particularise d'abord le lemme précédent en prenant $\epsilon := \phi(p)^{-\frac{1}{3}}$, $\tau := 1 + \epsilon$. La condition 1. devient: $d(p,q) \leq (1 + \phi(p)^{-\frac{1}{3}})\phi(p)^{-\frac{1}{3}}$. On pose ensuite: $p := r_n$ et $\phi := \tilde{f}_n$ et on choisit pour espace V du lemme précédent une boule fermée non triviale de centre r contenue dans U. On applique à cette situation le lemme particularisé. Pour chaque n, le lemme nous donne un élément q noté q_n. En utilisant la condition 1. et l'hypothèse que $\tilde{f}_n(r_n)$ tend vers l'infini, on voit que q_n tend vers r. Pour conclure, on prendra pour suite b_n la suite des q_n et pour a_n la suite des $\frac{1}{\tilde{f}_n(q_n)}$. En utilisant toujours l'hypothèse, la condition 3. nous montre que la suite des fonctions g_n construite à partir des a_n et b_n satisfait bien aux conditions requises.

DÉFINITION 6. On dira qu'une telle suite g_n est une *renormalisation* de la suite f_n en r.

Conséquence du lemme: En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on voit que la famille des fonctions g_n est une famille équicontinue à valeurs dans $\mathbf{R}$. Ceci implique via le théorème d'Ascoli que si on voit les g_n à valeurs dans le compact $[-\infty, +\infty]$ on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers g à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$.

REMARQUE. Le principe de renormalisation sera utilisé plusieurs fois dans la suite sans que nous donnions toutes les étapes, comme nous les avons données ici.

Énonçons le théorème principal :

THÉORÈME 7. *Soit une suite f_n de fonctions de $H(U)$. On suppose que pour un point p, la suite des $\tilde{f}_n(p)$ tend vers l'infini. Alors on peut renormaliser en p la suite des f_n en une suite g_n telle qu'une suite extraite tend uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^m$ vers une fonction affine non constante.*

COROLLAIRE 8. *Soit f une fonction harmonique entière non constante. Alors il existe une suite de positifs A_n et une suite d'éléments B_n de $\mathbf{R}^m$ telles que $f(A_n z + B_n)$ tend uniformément sur tout compact vers une fonction affine non constante.*

Preuve du corollaire. Comme f est non constante, on peut trouver un point p tel que $f'(p)$ soit non nul. On applique alors le théorème à la suite $f_n(z) := f(p + nz)$.

REMARQUE. Dans le cas où f est la partie réelle d'un polynôme holomorphe, il est facile de voir directement l'existence des A_n et des B_n. On peut aussi vérifier dans le cas général qu'on peut choisir la suite des A_n bornée.

Preuve du théorème. La preuve du théorème va se faire en deux temps : On prouve d'abord que la suite renormalisée g_n tend après extraction vers g à valeurs finies. L'ellipticité du laplacien permet d'en déduire immédiatement que g est harmonique avec $\tilde{g} \leq 1$ et $\tilde{g}(0) = 1$. Cette dernière égalité montre que g est non constante. On exploite ensuite la condition $\tilde{g} \leq 1$ pour conclure.

La finitude de g se déduit immédiatement du lemme suivant :

LEMME 9. *Soit g_n une suite de fonctions de $H(U)$ qui tend uniformément sur tout compact vers g à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. Alors si g vaut $+\infty$ ou $-\infty$ en un point, elle va être égale à cette valeur partout. De plus $\tilde{g}$ est alors identiquement nulle.*

Preuve. On utilise les inégalités de Harnack (conséquences de la formule intégrale de Poisson) dont voici un énoncé : Étant donné une boule ouverte de rayon $2R$ et de centre p, il existe une constante A strictement positive telle que pour toute fonction harmonique f positive dans cette boule et pour tout x et y dans la boule de centre p et de rayon R, on ait : $Af(x) \leq f(y)$ (voir [1]).

Revenons au lemme et supposons par exemple $g(p) = +\infty$. Alors par convergence uniforme, les g_n seront positives dans un voisinage de p pour n assez grand. On va donc avoir pour x dans un voisinage de p : $g_n(x) \geq Ag_n(p)$. Ceci implique que g_n tend vers $+\infty$ dans un voisinage de p. Par convergence uniforme, l'ensemble des points x où $g_n(x)$ tend vers $+\infty$ est fermé. La connexité de U permet de conclure que g_n tend partout vers $+\infty$. Plaçons nous alors dans cette situation et fixons p dans U. Les inégalités de Harnack nous montrent que la suite des $v_n(x) := (1/c_n)g_n(x)$ avec $c_n = g_n(p)$ est une suite bornée dans un voisinage de p. Par normalité, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans un voisinage vers une fonction qui sera strictement positive toujours d'après Harnack. Pour montrer que les $\tilde{g}_n(p)$ tendent vers zéro, on écrit: $\tilde{g}_n(p) = c_n|v_n'(p)|s(c_n v_n(p))$ et on utilise le fait que $xs(x)$ tend vers 0 quand $s(x)$ tend vers l'infini.

Passons à la seconde partie de la preuve. Par passage à la limite et ellipticité, on a maintenant une fonction limite g harmonique telle que $\tilde{g} \leq 1$. Cette partie est similaire à la preuve donnée dans [3]. On remarque que pour g harmonique, le laplacien de $\ln(\cosh g)$ vaut $\frac{|g'(x)|^2}{(\cosh g(x))^2}$ soit $\tilde{g}^2$. On en déduit que $c|x|^2 - \ln(\cosh g)$ est sous-harmonique en prenant $c = 1/2m$. De ce fait si on note $M(F, r)$ l'intégrale d'une fonction F sur la sphère de centre 0 par rapport à la mesure μ standard de masse un sur la sphère, on a d'abord $M(\ln\cosh g, r) \leq cr^2$ puis en tenant compte de la relation $|x| \leq (\ln\cosh x) + d$ avec $d = \ln 2$, on déduit: $M(|g|, r) \leq cr^2 + d$. Il est alors classique d'en déduire que g est un polynôme de degré au plus deux. La méthode consiste à développer g en série de polynômes harmoniques homogènes P_k. Les relations d'orthogonalité des P_k permettent d'en déduire: $M(gP_k, r) = M(P_k^2, r)$. On fait alors tendre r vers l'infini et on conclut en tenant compte de l'homogénéité des P_k et de l'inégalité sur les $M(g, r)$.

La nullité de la partie quadratique de g résulte de la normalité de la famille des $g_t(z) := g(z + t)$ pour $t \in \mathbf{R}^m$. (Pour la normalité, voir la section suivante et la proposition 12.) En effet on écrit: $g(z) = Q(z) + L(z)$ avec Q partie quadratique homogène et L partie affine. Si on suppose Q harmonique non nulle, il existe un vecteur v isotrope qui n'est pas dans le noyau de la forme bilinéaire B associée. On considére alors la suite des $g(z+nv) = n\big(B(z, v) + L(v)\big) + L(z)$. Comme $B(z, v) + L(v)$ peut prendre toutes les valeurs réelles, il n'existe pas de sous-suite extraite qui converge. Ceci termine la preuve du théorème.

Esquissons une preuve directe du corollaire analogue à la première preuve de [3]. Soit F harmonique entière non constante. Supposons par exemple $F'(0)$ non nulle. On choisit alors une suite R_n de telle sorte que pour la suite $F_n(z) = F(R_n z)/n$ on ait: $\lim \tilde{F}_n(0) = \infty$. On renormalise alors cette suite en une suite g_n comme dans la première partie de la preuve du théorème. La limite g de la suite extraite des g_n est harmonique entière non constante. Il est classique qu'elle s'annule en un point p ([8]) et comme elle est harmonique, on peut aussi supposer qu'en ce point, le gradient ne s'annule pas (voir lemme suivant). Supposons par exemple $p = 0$. On conclut alors en considérant la suite des $ng_n(z/n)$ et en faisant tendre n vers l'infini.

Montrons le lemme dont on a eu besoin.

LEMME 10. *Soit $f \in H(U)$ non identiquement nulle. Alors si f s'annule en un point p, il existe un point q où f s'annule et tel que $f'(q)$ ne s'annule pas.*

Preuve. D'après le principe du maximum, f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives. Donc l'ensemble des zéros de f qui est par ailleurs un ensemble analytique réel, est une hypersurface. On se place alors en un point lisse de cette hypersurface et on applique un lemme classique de Hopf pour conclure [1].

2.1 CRITÈRES DE NORMALITÉ

Ces remarques sont fortement inspirées par l'article de Zalcman [13] qui traite le cas méromorphe à une variable.

DÉFINITION 11 (voir [12] pour la dimension deux). On dira qu'une famille E de fonctions de $H(U)$ est *normale* si de toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact soit vers une fonction de $H(U)$ soit vers $+\infty$ soit vers $-\infty$.

On a la proposition suivante qui donne un équivalent du théorème de Marty pour le cas harmonique (voir [13]).

PROPOSITION 12. *Une famille E est normale si et seulement si pour tout compact K, il existe une constante positive M_K telle que pour tout $f \in E$, on ait: $\tilde{f}(x) \leq M_K$ pour $x \in K$.*

Preuve. La condition de la proposition sur les dérivées au sens du tilde implique que la famille est équicontinue et le théorème d'Ascoli joint au lemme 9 montre la normalité de la famille. Dans l'autre direction, supposons que la condition sur les dérivées ne soit pas remplie. Il existe alors un compact K et une suite f_n de E telle que le sup des $\tilde{f}_n$ tende vers l'infini sur K. Si la suite était normale, quitte à extraire, on pourrait supposer que la suite des f_n tende uniformément sur tout compact de U vers $f \in H(U)$ ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Ceci est contradictoire avec ce qui a été dit précedemment sur les relations entre les limites de f_n et de $\tilde{f}_n$.

On a les deux critères généraux de normalité suivant:

THÉORÈME 13. *Une famille E dans $H(U)$ est normale si elle satisfait à l'un des deux critères suivants:*

1. *On fixe $a \in \mathbf{R}$. On considère la famille E des $f \in H(U)$ vérifiant: pour tout compact K, il existe $M_K > 0$ tel que $|f'(x)|$ soit majorée par M_K sur $f^{-1}(a) \cap K$.*

2. *On fixe une fonction l sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[0, \infty]$ finie en au moins un point. On considère la famille E des $f \in H(U)$ vérifiant: $|f'| \leq l \circ f$.*

Preuve. 1. On suppose la famille non normale. Il existe d'après la proposition précédente, une suite f_n dans $H(U)$ et une suite p_n qui tend vers p dans U et telle que $\tilde{f}_n(p_n)$ tende vers l'infini. Le lemme de renormalisation permet de renormaliser f_n en g_n au point p. Pour ce qui suit, nous avons simplement besoin de savoir que la suite g_n (modulo extraction) converge vers g harmonique entière et non constante. En utilisant la relation: $g_n'(z) = a_n f_n'(a_n z + b_n)$, pour $z \in K \cap f^{-1}(a)$ on a: $|g_n'(z)| \leq a_n M_K$ pour n assez grand. On en déduit que g' s'annule sur $g^{-1}(a)$, ce qui est contradictoire avec le lemme précedent.

2. On choisit b tel que $l(b)$ soit fini et on applique le 1. avec les $M_K = l(b)$.

2.2 FONCTIONS DE BRODY

En s'inspirant du cas méromorphe, on dira que f entière harmonique est une *fonction de Brody* si elle vérifie $\tilde{f} \leq M$ pour un certain $M > 0$. La preuve du théorème précédent montre qu'une fonction harmonique de Brody est en fait une fonction affine. Nous allons donner un théorème caractérisant de manière plus intrinsèque les fonctions de Brody et qui a un analogue dans le cas méromorphe.

THÉORÈME 14. 1. *Une fonction harmonique entière f est de Brody (i.e. affine) si et seulement si la famille des fonctions $f_t(x) := f(x+t)$ indexée par $t \in \mathbf{R}^m$ forme une famille normale.*

2. *Soit l une fonction de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty]$ finie en au moins un point. Alors les fonctions harmoniques f sur $\mathbf{R}^m$ vérifiant $|f'| \leq l(f)$ sont de Brody (i.e. affines).*

Preuve. 1. Supposons la famille f_t normale. Alors d'après la proposition 12, il existe $M > 0$ tel que pour tout t, on a: $\tilde{f}_t(0) \leq M$. Ce qui signifie que $\tilde{f} \leq M$ et donc f est affine. La réciproque est claire dans notre situation où on sait que les fonctions de Brody sont affines. Mais on peut aussi donner un argument direct en remarquant simplement que si $\tilde{f} \leq M$, alors il en est de même de ses translatées qui forment une sous-famille de la famille normale des $g \in H(\mathbf{R}^m)$ telles que $\tilde{g} \leq M$.

2. La famille E des f harmoniques entières telles que $|f'| \leq l(f)$ est une famille normale d'après le théorème précédent. On remarque ensuite que si $f \in E$, il en est de même des f_t. La famille des f_t est normale et donc f est affine d'après le 1.

3. LIEN AVEC LA GÉOMÉTRIE DES TUBES

DÉFINITION 15. On dira que Ω est un *tube* (ou *domaine tube*) de $\mathbf{C}^n$ s'il s'écrit sous la forme $\omega + i\mathbf{R}^n$ avec ω domaine de $\mathbf{R}^n$.

Citons à propos des tubes un théorème classique de S. Bochner [8].

THÉORÈME 16. *L'enveloppe d'holomorphie d'un domaine tube coïncide avec son enveloppe convexe.*

De ce théorème, on déduit aisément:

COROLLAIRE 17. *Pour un domaine tube Ω pseudo-convexe, on a équivalence entre :*

1. *Ω est biholomorphe à un domaine borné.*
2. *Ω est hyperbolique (au sens de Kobayashi).*
3. *ω ne contient pas de droite affine.*

Preuve du corollaire. Par le théorème de Bochner, Ω est convexe. Le 3. signifie que Ω ne contient pas de droite affine complexe. L'équivalence de 1. et 3. est bien connue dans ce cas ([2]). Elle implique évidemment l'équivalence commune avec 2.

On utilise ce résultat pour montrer:

PROPOSITION 18. *Un tube Ω est biholomorphe à un domaine borné si et seulement si l'enveloppe convexe de ω ne contient pas de droite affine.*

Preuve. La condition suffisante est évidente d'après le corollaire précédent. Montrons que la condition est nécessaire et supposons que l'enveloppe convexe ω' de ω contienne une droite L. Alors par chaque point de ω' il passe une droite parallèle à L et contenue dans ω'. On peut alors choisir x et y distincts dans ω et contenus dans une droite D de ω'. Ceci va impliquer que pour toute fonction holomorphe bornée f sur ω, on a: $f(x) = f(y)$, et donc Ω ne peut être biholomorphe à un domaine borné. L'assertion sur f s'obtient comme suit: On peut supposer f à valeurs dans le disque unité. Cette fonction va se prolonger en une fonction holomorphe F de l'enveloppe d'holomorphie (qui est aussi l'enveloppe convexe) toujours à valeurs dans le disque unité. Par Liouville, cette fonction va être constante sur la droite complexe $D + iD'$, où D' est la droite vectorielle parallèle à D. En particulier $f(x) = f(y)$.

REMARQUE. La preuve précédente montre en fait que pour un domaine tube, on a l'équivalence entre: Le domaine est biholomorphe à un domaine borné, la pseudo-métrique de Carathéodory est une métrique, l'enveloppe convexe de ω ne contient pas de droite affine.

Notre intérêt concernant l'hyperbolicité va donc se porter sur les domaines tubes non pseudo-convexes dont l'enveloppe convexe contient des droites affines. On introduit les définitions suivantes:

DÉFINITION 19.

1. Une *application harmonique* (voir par exemple [5]) d'un domaine U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ est une application dont les fonctions coordonnées sont harmoniques.

2. Dans le cas où $U = \mathbf{R}^n$, on parlera d'application harmonique *entière*.

3. Un domaine V de $\mathbf{R}^m$ est dit *n-Brody-hyperbolique* (par rapport aux applications harmoniques) s'il n'existe pas d'application harmonique entière non constante de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans V. Dans la suite, nous serons surtout intéressés par le cas $n = 2$.

Un domaine V de $\mathbf{R}^m$ est dit *n-hyperbolique* (par rapport aux applications harmoniques) si pour tout a dans V, il existe un voisinage W de a et une constante $M > 0$ tels que pour toute application harmonique f de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans V et telle que $f(0) \in W$, on ait: $|f'(0)| \leq M$.

On rappelle les notions classiques [10] du cas holomorphe avec lesquelles on va faire le lien:

3′. Une variété complexe est dite *Brody-hyperbolique* s'il n'existe pas d'application holomorphe entière non constante à valeurs dans cette variété.

Une variété complexe V est dite *Kobayashi-hyperbolique* (ou *hyperbolique*) si pour tout a dans V, il existe un voisinage W de a et une constante $M > 0$ tels que pour toute application holomorphe du disque unité à valeurs dans V et telle que $f(0) \in W$, on ait: $|f'(0)| \leq M$. (On pourra mettre une métrique Riemannienne sur V pour donner un sens précis à cette notion.) Comme nous n'avons pas trouvé de référence précise dans la littérature, nous donnons en annexe finale une preuve de l'équivalence de cette définition de l'hyperbolicité avec la définition standard.

On remarquera que hyperbolique implique (aussi bien dans les cas harmonique que complexe) Brody-hyperbolique. En effet si f est une application entière non constante à valeurs dans V on se place en a tel que $f'(a)$ ne soit pas nul et on considère la suite des $f(a+nx)$ pour montrer la non hyperbolicité de V.

On fait maintenant le lien entre les notions réelles et complexes. On va supposer $n = 2$.

Un lien est donné par la proposition suivante:

PROPOSITION 20. *Un tube Ω est Kobayashi-hyperbolique (resp. Brody-hyperbolique) si et seulement si ω est 2-hyperbolique (resp. 2-Brody hyperbolique).*

Preuve. On utilise les relations classiques entre les fonctions holomorphes et leur partie réelle harmonique.

Le cas qui va nous intéresser est celui des domaines tubes de $\mathbf{C}^2$ et qui d'après la proposition précédente correspond aux valeurs $m = n = 2$.

Toutefois certains résultats seront donnés en général et d'autres résultats pour m quelconque et $n = 2$.

Pour un domaine ω dans $\mathbf{R}^2$, on a deux cas: Celui où l'enveloppe convexe n'est pas tout $\mathbf{R}^2$ et celui où cette enveloppe est tout $\mathbf{R}^2$. Nous allons d'abord traiter le premier cas en donnant un résultat complet. On remarquera qu'un tel domaine est contenu dans un demi-plan et sans nuire à la généralité, on supposera par la suite que ω est contenu dans le demi-plan $\{(x,y) \mid y > 0\}$. On dira alors qu'un point $a = (a_1, a_2) \in \omega$ est *borné* s'il n'existe pas de suite b_k qui tende vers a_2 et telle que chaque segment $[-k,k] \times \{b_k\}$ soit contenu dans ω.

THÉORÈME 21. *Soit ω un domaine de $\mathbf{R}^2$ d'enveloppe convexe différente de $\mathbf{R}^2$. Alors:*

1. *ω est n-Brody hyperbolique si et seulement s'il ne contient pas de droite affine.*

2. *ω est n-hyperbolique si et seulement si tout point a de ω est borné.*

REMARQUE. On voit que dans ce cas, n ne joue aucun rôle.

COROLLAIRE 22. *Il existe des tubes de $\mathbf{C}^2$ qui sont hyperboliques et dont l'enveloppe d'holomorphie n'est pas Brody-hyperbolique.*

Il existe des tubes Brody-hyperboliques et non hyperboliques.

Les exemples du corollaire sont faciles à construire à partir du théorème. On va donc prouver le théorème.

Preuve. 1. Il est clair que Ω est non n-Brody-hyperbolique si ω contient une droite. Pour la réciproque, on suppose $f = (f_1, f_2)$ harmonique entière à valeurs dans ω. D'après le théorème de Liouville, f_2 est constante. Donc si f est non constante, son image est une droite. Par conséquent, si ω ne contient pas de droite, il est n-Brody hyperbolique.

2. On suppose que ω contienne un point $a = (a_1, a_2)$ non borné. Il existe alors une suite b_k tendant vers a_2 telle que l'image de $]-1,1[$ par les applications: $t \mapsto (kt, b_k)$ soit contenue dans ω. De ce fait on voit immédiatement que ω est non 1-hyperbolique et aussi non n-hyperbolique pour tout n.

Supposons maintenant que ω soit non n-hyperbolique. Il existe alors une suite $f_k = (u_k, v_k)$ d'applications harmoniques de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ dans ω telles que $f_k(0)$ tend vers a et $|f_k'(0)|$ tend vers l'infini. La suite v_k de

fonctions harmoniques positives est une suite normale. Quitte à extraire, on peut supposer que cette suite tend vers une fonction harmonique v (elle ne peut tendre vers l'infini). La suite u_k est alors nécessairement non normale et on peut la renormaliser après extraction en une suite $U_k(x) := u_k(c_k x + d_k)$ qui tend uniformément sur tout compact vers une fonction affine non constante. La suite des fonctions $v_k(c_k x + d_k)$ tend vers a_2 car c_k et d_k tendent vers 0. Il est alors clair que le point a est non borné.

On va maintenant traiter le second cas plus difficile à savoir celui où l'enveloppe convexe de ω est tout $\mathbf{R}^2$. Ceci permettra d'avoir des domaines tubes hyperboliques dont l'enveloppe d'holomorphie est tout $\mathbf{C}^2$. On énoncera d'abord un lemme de renormalisation pour les applications harmoniques proche de celui de [3] concernant les fonctions holomorphes. Étant donné une application harmonique f, on note $\tilde{f}$ la somme des $\tilde{f}_i$ où on note f_i les fonctions coordonnées de f.

PROPOSITION 23. *Soit f_k une suite d'applications harmoniques définies sur un domaine U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$. On suppose qu'il existe $p \in U$ et une suite p_k qui tend vers p telle que la suite des $\tilde{f}_k(p_k)$ tende vers l'infini. Alors on peut renormaliser la suite des f_k en une suite $F_k(x) := f_k(c_k x + d_k)$ avec des $c_k > 0$ et tendant vers 0 et des d_k tendant vers p telle que :*

La suite des F_k (après extraction) tend uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^n$ vers une application F dont les coordonnées sont des fonctions affines ou des fonctions identiquement égales à $+\infty$ ou $-\infty$. De plus une au moins des coordonnées est une fonction affine non constante.

Preuve. On raisonne à partir du lemme général de renormalisation comme pour les fonctions harmoniques. On utilise Ascoli pour montrer qu'on peut extraire des F_k une sous-suite encore notée F_k qui tend uniformément sur tout compact vers une fonction F à valeurs dans $[-\infty, +\infty]^m$. De plus la limite les $\tilde{F}_k(0)$ vaut 1 et la limite supérieure des $\tilde{F}_k(a)$ est plus petite que 1 pour tout a. On déduit le résultat en raisonnant composante par composante. On notera que quitte à extraire, on peut supposer que pour une des fonctions coordonnées g_k de F_k, on aura une limite $\tilde{g}_k(0)$ strictement positive, ce qui fournira une fonction limite affine non constante.

On donne un corollaire de la proposition 23 concernant les domaines ω de dimension deux.

COROLLAIRE 24. A. *Un domaine ω dans $\mathbf{R}^2$ non n-hyperbolique a au moins une des deux propriétés suivante :*

1. *Son adhérence contient une droite affine.*

2. *Pour tout $t \in \mathbf{R}$ il existe une suite (x_k, y_k) telle que x_k tend vers $+\infty$ et y_k vers t ou une propriété analogue en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ ou en permutant les coordonnées.*

B. *Il existe des tubes de $\mathbf{C}^2$ hyperboliques dont l'enveloppe d'holomorphie est tout $\mathbf{C}^2$.*

Preuve. A. Si ω est non n-hyperbolique, alors on peut trouver une suite d'applications f_k vérifiant les hypothèses de la proposition 23 à l'origine de la boule unité et à valeurs dans ω. On renormalise alors cette suite f_k et on obtient une des propriétés 1. ou 2.

B. Il est clair qu'il existe des domaines dans $\mathbf{R}^2$ dont l'enveloppe convexe est tout $\mathbf{R}^2$ et qui ne satisfont à aucune des propriétés 1. et 2. (prendre par exemple un voisinage effilé de trois demi-droites convenablement choisies partant de l'origine). Le théorème de Bochner permet de conclure.

REMARQUE. Un domaine de $\mathbf{R}^2$ peut avoir la propriété 1. et toutefois être n-hyperbolique. Un exemple de tel domaine est donné par

$$\{(x, y) \mid 0 < y < \exp(-|x|)\}.$$

Il est hyperbolique en vertu du théorème 21 et clairement la droite d'équation $y = 0$ est adhérente au domaine.

3.1 REMARQUES SUR LES DOMAINES NON n-BRODY-HYPERBOLIQUES

Nous nous plaçons dans $\mathbf{R}^2$. On fait ici quelques remarques sur les images dans $\mathbf{R}^2$ des applications harmoniques entières. Le cas dégénéré fait l'objet de la proposition suivante (on se place dans un cadre local).

PROPOSITION 25. *Soit F une application harmonique d'un domaine U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$. On suppose F de rang au plus un en chaque point (si $n = 2$, ceci signifie que le jacobien est identiquement nul). Alors $F(U)$ est contenue dans une droite.*

Preuve. Si F est de rang nul partout, alors $F(U)$ est un point. On suppose donc F de rang un en un point a et donc de rang un dans un voisinage de a. Le théorème du rang implique alors qu'il existe une fonction régulière M définie sur un ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et telle qu'on ait une équation locale :

$u = M \circ v$ avec u et v fonctions coordonnées de F. Un calcul direct montre que: $\Delta u = M'' \circ v|v'|^2 + (M' \circ v)\Delta v$. En tenant compte de l'harmonicité de u et v et du fait que v est non constante, on en déduit que M'' est localement nulle. Donc il existe deux réels c et d tels que: $u = cv + d$ au voisinage de a. L'analycité de u et v permet d'étendre cette relation à tout U.

On est donc amené à étudier le cas des applications harmoniques entières non dégénérées dont l'image est alors d'intérieur non vide. Nous nous contenterons de quelques remarques.

1. Pour une fonction entière holomorphe non dégénérée (c'est à dire non constante) le théorème de Picard nous dit que l'image est le plan ou le plan privé d'un point. Ceci est loin d'être vrai pour les applications entières harmoniques. Dans [5] un exemple d'une application entière harmonique non dégénérée de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même est donné telles que les boules contenues dans l'image aient un rayon borné. Cet exemple servait à montrer l'inexistence d'une constante de Bloch. Nous donnons ici un exemple similaire: On vérifie aisément que l'ensemble $W := \{(x,y) \mid 0 < xy \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$ est l'image de $\mathbf{C}$ par l'application harmonique: $z \mapsto (\Re e^z, \Re e^{-z})$.

Pour cet exemple, outre l'inexistence de boule de rayon arbitrairement grand qui y soit contenue, on notera qu'il ne contient pas de droite mais que deux droites y sont adhérentes. A partir de là, il est facile de construire des exemples de domaines non 2-Brody hyperboliques qui ne contiennent pas de droite et qui sont de ce fait 1-Brody hyperboliques.

La proposition suivante caractérise, à transformation affine près, les applications harmoniques entières qui sont holomorphes.

PROPOSITION 26. *Une application harmonique H entière de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même dont le jacobien est positif ou nul en tout point est à transformation affine près (sur l'ensemble image) une fonction holomorphe entière.*

On a alors le corollaire:

COROLLAIRE 27. *Une application harmonique H entière de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même dont le jacobien ne s'annule pas, est à transformation affine près (sur l'ensemble image) une fonction holomorphe entière.*

Preuve de la proposition. Soient u et v les coordonnées de H. On pourra écrire: $u = \Re f$ et $v = \Re g$ avec f et g des fonctions entières. Un calcul direct montre que le jacobien de H est donné par $\Im(f'\overline{g'})$. En éliminant le cas g

constant qui est trivial, la positivité de ce jacobien signifie que $\Im(\frac{f'}{g'})$ est positif là où la fonction méromorphe $\frac{f'}{g'}$ est définie. Par une forme du théorème de Liouville, ceci implique que $\frac{f'}{g'}$ est constant. Des considérations élémentaires permettent de conclure.

4. Applications à valeurs dans un tore ou un groupe de Lie

Dans ce chapitre, on considère des applications solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptique à valeurs dans un tore. Les résultats de renormalisation dans le cas elliptique sont plus généraux mais ne permettent pas d'obtenir un résultat aussi fort que pour le laplacien. Pour les opérateurs elliptiques, on renvoie au livre de Hörmander [9].

Dans la suite, on considère un polynôme homogène réel P sur $\mathbf{R}^m$ auquel on associe naturellement un opérateur différentiel $P(\partial)$. On va supposer que P ne s'annule qu'en 0 sur $\mathbf{R}^m$. L'opérateur $P(\partial)$ est alors elliptique. Rappelons une propriété essentielle:

Soit U un domaine de $\mathbf{R}^m$. Toute fonction f suffisamment régulière sur U et solution de $P(\partial)f = 0$ est analytique réelle. On appellera *P-fonction* une telle fonction.

On a la propriété suivante: Si une suite de P-fonctions définies sur U converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, alors f aussi est une P-fonction. De plus les dérivées convergent aussi uniformément sur tout compact.

Introduisons les définitions suivantes:

1. Une application de U dans $\mathbf{R}^n$ est une *P-application* si ses coordonnées sont des P-fonctions.

2. Une application F de U dans $T_n := \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ est une *P-application* si elle s'écrit sous la forme: $p \circ G$ où on note p la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur T_n et G une P-application. Remarquons que G est définie à une constante additive près. De ce fait G', qu'on notera F' dans la suite, est bien définie. C'est aussi une P-application.

On a le théorème suivant de renormalisation.

THÉORÈME 28. *Soit f_k une suite de P-applications de U à valeurs dans T_n. On suppose que pour un point p de U, il existe une suite p_k tendant vers p et telle que $|f_k'(p_k)|$ tend vers l'infini. Alors on a une renormalisation d'une sous-suite des f_k en une fonction affine non constante (notons que cette dernière notion a un sens). La renormalisation signifie qu'il existe une suite de nombres positifs a_k tendant vers 0 et une suite de vecteurs b_k tendant vers p et telles qu'une suite extraite des $f_k(a_k x + b_k)$ converge sur tout compact de $\mathbf{R}^m$ vers une fonction affine.*

Le théorème implique un corollaire analogue à celui des fonctions harmoniques concernant les P-applications entières. Le corollaire suivant qui se déduit immédiatement du théorème, fait le lien avec la renormalisation à constante près.

COROLLAIRE 29. *Soit f_k une suite de P-applications de U à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. On suppose les mêmes hypothèses que dans le théorème pour un point p. Alors il existe une suite de vecteurs c_k de $\mathbf{R}^n$, telle qu'on puisse renormaliser une sous-suite des $f_k + c_k$ en une application affine non constante.*

REMARQUES. Avant de démontrer le théorème, faisons quelques remarques:

1. Le théorème similaire de M. Green concernant les applications holomorphes prenant leurs valeurs dans un tore complexe est bien connu. En fait, il est facile de retrouver ce résultat à partir de notre théorème en considérant une fonction holomorphe comme un couple de fonctions harmoniques vérifiant les relations de Cauchy-Riemann.

2. La notion de renormalisation à constante près concernant le cas holomorphe à une variable est à la base du formalisme de Minda (voir le livre [12] et l'article [11]). Cette renormalisation est essentiellement équivalente à la renormalisation des fonctions holomorphes à valeurs dans un tore complexe.

Il nous semble important de remarquer que dans le cas particulier des fonctions harmoniques les résultats de renormalisation obtenus par cette méthode sont plus faibles que ceux démontrés avant pour le laplacien. En général une P-fonction entière à valeurs dans $\mathbf{R}$ n'est pas renormalisable en une fonction affine non constante comme le montre l'exemple simple des P-fonctions que sont les polynômes à une variable.

Preuve du théorème. Pour une P-application F, on considère $|F'|$ qui joue le même rôle joué avant par $\tilde{f}$.

Le lemme de renormalisation nous dit qu'il existe deux suites comme dans le théorème telles que pour la suite des $s_k(x) := f_k(a_k x + b_k)$, on a: la suite des $s'_k(x)$ tend uniformément sur tout compact vers une limite plus petite que 1 en norme et telle que les $s'_k(0)$ valent 1 en norme. Un argument de normalité valable dans le cas elliptique permet d'affirmer qu'une sous-suite de s'_k a une limite. Cette limite t est une P-application *bornée*. Le théorème de Liouville (voir lemme suivant) nous dit que t est constante. Pour conclure, on peut utiliser le théorème classique d'intégration des limites de suites de fonctions jointe à la compacité de T_n.

LEMME 30. *Une P-fonction f bornée est constante.*

Preuve. Par ellipticité de $P(\partial)$, la transformée de Fourier de la distribution tempérée f est à support en l'origine, donc combinaison de masse de Dirac à l'origine et de ses dérivées en l'origine. Par conséquent f est un polynôme et comme f est bornée, c'est une constante.

4.1 LE CAS DES GROUPES DE LIE COMPLEXES

Les idées précédentes peuvent aussi s'appliquer aux groupes de Lie complexes. Nous ne traiterons pas ce sujet dans toute sa généralité. On fait d'abord quelques rappels:

Soit G un groupe de Lie complexe (le lecteur peu familier avec cette notion pourra se placer dans la situation $G = Gl(n, \mathbf{C})$). Pour une application holomorphe f d'un domaine U de $\mathbf{C}$ à valeurs dans G, on pose: $Df(z) := f(z)^{-1}f'(z)$. L'application Df est holomorphe à valeurs dans l'espace tangent en l'identité (algèbre de Lie), qui est isomorphe à un $\mathbf{C}^n$. Si $Df(z)$ est constante, alors $f(z)$ est de la forme $g\exp(zX)$ pour un certain $g \in G$ et un certain X dans l'algèbre de Lie de G. Ces dernières applications généralisent les applications affines.

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 31. *Soit f_k une suite d'applications holomorphes de U dans G. On suppose qu'il existe $p \in U$ tel que la norme de $Df_k(p)$ tende vers l'infini. Alors il existe une renormalisation des f_k à constante près (au sens des groupes) en une fonction entière de la forme $g\exp(zX)$ avec X non nul. De manière explicite: Il existe une suite g_k dans G, une suite de nombres positifs a_k tendant vers 0 et une suite b_k d'éléments de U tendant vers p telles que la suite de fonctions $g_k f_k(a_k z + b_k)$ tende uniformément vers $g\exp(zX)$ sur tout compact de $\mathbf{C}$.*

Preuve. La preuve utilise les idées précédentes. On applique le lemme général de renormalisation aux $|Df_k|$. Ceci permet d'obtenir une suite renormalisée de fonctions $u_k(z) := f_k(a_k z + b_k)$. On remplace ensuite la suite des u_k par une suite $U_k(z) := g_k u_k(z)$ avec les g_k choisis de telle sorte que $U_k(p) = id$. On a $DU_k = Du_k$. La suite des U_k est alors normale et elle tend après extraction vers une application holomorphe entière non constante F à valeurs dans G. La fonction F est de Brody, c'est à dire qu'elle vérifie $|DF(z)| \leq 1$. Le théorème de Liouville classique nous dit alors que DF est constante. Le théorème se déduit des remarques de début concernant les groupes de Lie.

REMARQUES.

1. Comme cas particulier du théorème, on a la renormalisation à constante près d'applications holomorphes entières non constantes.

2. On a le même type de résultats si on considère des applications holomorphes à valeurs dans un quotient de G par un groupe discret cocompact. Toutefois la situation $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ étudiée par Berteloot et Duval est en relation avec la renormalisation à constante *réelle* près. Dans le cas d'un groupe de Lie complexe, ceci signifie une renormalisation à une constante près variant dans une forme réelle. Une telle renormalisation pourrait être utilisée pour l'étude de tubes généralisés, i.e. des domaines invariants par l'action de la forme réelle (voir [6]).

3. On peut généraliser la notion de P-application pour un groupe de Lie réel G de la manière suivante : Une application f d'un domaine U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans G est une *P-application* si $P(Df) = 0$. On peut alors développer une théorie similaire à celle du cas Euclidien. Nous ignorons toutefois la portée que peut avoir cette notion.

5. ANNEXE SUR L'HYPERBOLICITÉ

On note D_r le disque ouvert centré à l'origine de rayon $r > 0$.

PROPOSITION 32. *Soit X une variété complexe qu'on munit d'une métrique Riemannienne. Alors X est hyperbolique au sens de Kobayashi si et seulement si on a la propriété (P) suivante :*

Pour tout point a de X, il existe un voisinage V et une constante $M > 0$ tels que pour toute application holomorphe $f\colon D_1 \to X$, vérifiant $f(0) \in V$, on ait : $|f'(0)| \leq M$.

Preuve. On suppose d'abord X hyperbolique. Pour a dans X on choisit une boule fermée B pour la métrique de Kobayashi centrée en a et de rayon $2r > 0$ choisi assez petit pour que cette boule soit compacte. (Ceci est possible car la métrique de Kobayashi induit la topologie [10].) On peut alors choisir pour V la boule fermée de centre a et de rayon r pour la métrique de Kobayashi. En effet d'après la propriété de contraction de la métrique de Kobayashi, il existe $r' > 0$ tel que pour toute application holomorphe $f: D_1 \to X$ vérifiant $f(0) \in V$, on ait: $f(D_{r'}) \subset B$. Comme B est compact, un argument de normalité permet de montrer l'existence de M.

La réciproque est plus difficile. On suppose la propriété (P) vérifiée pour X. En chaque point p, on définit l'indicatrice K_p de Kobayashi comme étant le sous-ensemble de l'espace tangent T_p formé des éléments $rf'(0)$ avec $0 < r < 1$ avec f application holomorphe de D_1 dans X vérifiant $f(0) = p$. A cette indicatrice, on associe de manière classique une jauge j_p définie sur T_p par: $j_p(v) = \inf\{t > 0 \mid v/t \in K_p\}$. La propriété (P) signifie alors simplement que pour tout point a, il existe un voisinage V de a et $c > 0$ tel que pour tout $p \in V$ et $x \in T_p$, on a: $j_p(x) \geq c|x|$. On conclut en utilisant le fait que la métrique de Kobayashi est la métrique intégrée par rapport aux j_p (voir [10] pour une preuve de ce théorème assez difficile).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AXLER, S., P. BOURDON and W. RAMEY. *Harmonic Function Theory.* Graduate Texts in Mathematics *137*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] BARTH, T. J. Convex domains and Kobayashi hyperbolicity. *Proc. Amer. Math. Soc. 79* (1980), 556–558.

[3] BERTELOOT, F. et J. DUVAL. Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires. *L'Enseignement Math. (2) 47* (2001), 253–267.

[4] BRODY, R. Compact manifolds and hyperbolicity. *Trans. Amer. Math. Soc. 235* (1978), 213–219.

[5] CHEN H., P. M. GAUTHIER and W. HENGARTNER. Bloch constants for planar harmonic mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 128* (2000), 3231–3240.

[6] COEURÉ, G. et J.-J. LOEB. Le théorème des tubes de Bochner pour les groupes de Lie. *Représentation des groupes et analyse complexe*, Luminy, 1986.

[7] GROMOV, M. Foliated Plateau problem, part II: harmonic maps of foliations. *Geom. Funct. Anal. 1* (1991), 253–320.

[8] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Several Complex Variables.* North Holland/American Elsevier, 1973.

[9] —— *The Analysis of Linear Partial Differential Equations I.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *256*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] KOBAYASHI, S. *Hyperbolic Complex Spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *318*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[11] MINDA, D. Another approach to Picard's theorem and a unifying principle in geometric function theory. In: *Current Topics in Analytic Function Theory*, 186–200. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

[12] SCHIFF, J. L. *Normal Families*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[13] ZALCMAN, L. Normal families: new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 35* (1998), 215–230.

(Reçu le 14 juillet 2006; version révisée reçue le 31 mai 2007)

Jean-Jacques Loeb

Département de Mathématiques
Université d'Angers
2, Boulevard Lavoisier
49045 Angers cedex 01
France *e-mail:* Jean-Jacques.Loeb@univ-angers.fr