K0 and the passage from integral to rational coefficients

Autor(en): **Reich, Holger**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-109923

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 54 (2008), 154–155

54

K_0 AND THE PASSAGE FROM INTEGRAL TO RATIONAL COEFFICIENTS

by Holger REICH

We are outlining the following conjecture, already stated in [2].

CONJECTURE 54.1. *For every group G the map $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}G) \to \widetilde{K}_0(\mathbf{Q}G)$ induced from the natural inclusion $\mathbf{Z}G \to \mathbf{Q}G$ is the zero-map.*

Here for a ring R we denote by $\widetilde{K}_0(R)$ the *reduced projective class group*, i.e. the cokernel of the map $K_0(\mathbf{Z}) \to K_0(R)$ induced from the natural map $\mathbf{Z} \to R$. Hence the conjecture says that for every finitely generated projective $\mathbf{Z}G$-module P the module $P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ is a stably free $\mathbf{Q}G$-module.

Swan proved the conjecture in the case where G is a finite group (see [3], Theorem 8.1). I think that somehow the conjecture above should be implied by the K-theoretic Farrell–Jones Conjecture, which is discussed in the contribution by Wolfgang Lück. Indeed if G is torsion-free the Farrell–Jones Conjecture predicts that $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}G) = 0$ and hence in that case the conjecture above is clearly implied by the Farrell–Jones Conjecture. But in the general case I do not know how to derive it from the Farrell–Jones Conjecture. One can however show that the Farrell–Jones Conjecture implies that the map

$$\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}G) \otimes \mathbf{Q} \to \widetilde{K}_0(\mathbf{Q}G) \otimes \mathbf{Q}$$

is the zero-map, see [2], Proposition 3.11 (iii), for a more precise statement and a proof.

Further evidence for the conjecture above is given by the following fact, which is true for all groups. If we compose the map in the conjecture above with the map induced from the inclusion of $\mathbf{Q}G$ into the group von Neumann algebra $\mathcal{N}G$ then the resulting composition

$$\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}G) \to \widetilde{K}_0(\mathbf{Q}G) \to \widetilde{K}_0(\mathcal{N}G),$$

is the zero-map. This is proven in [1], Theorem 9.62.

REFERENCES

[1] LÜCK, W. *L^2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete *44* (3. Folge). Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] LÜCK, W. and H. REICH. The Baum–Connes and the Farrell–Jones conjectures in K- and L-theory. In: *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, 703–842. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[3] SWAN, R. G. Induced representations and projective modules. *Ann. of Math. (2) 71* (1960), 552–578.

Holger Reich

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Universitätsstr. 1
D-40225 Düsseldorf
Germany
e-mail: reich@math.uni-duesseldorf.de