

Power series that generate class numbers

Autor(en): **Sinnott, Warren**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109928>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*

ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

59

POWER SERIES THAT GENERATE CLASS NUMBERS

by Warren SINNOTT

Let k be a CM field, i.e., k is a totally imaginary quadratic extension of a totally real number field k^+ . Let p be a prime, and let K be the basic \mathbf{Z}_p -extension of k : then $K \subset k(\mu_{p^\infty})$ (here μ_{p^∞} is the group of p -power roots of unity), and k has a unique extension k_n in K of degree p^n over k . Let h_n^* denote the relative class number of k_n/k_n^+ . Then Iwasawa [1] showed that there are integers $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ and ν such that

$$(1) \quad \text{ord}_p(h_n^*) = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

for n greater than or equal to some integer n_0 . One way to show this (not Iwasawa's original method, which gives more general results) is to use Hecke's analytic class number formula and the theory of p -adic L -functions (see for example Sinnott [3]): these results imply that there is a power series $F(T) \in \mathbf{Z}_p[[T - 1]]$ such that

$$(2) \quad h_n^* = h_{n_0}^* \prod_{\substack{\zeta^{p^n}=1 \\ \zeta^{p^{n_0}} \neq 1}} F(\zeta) \text{ for } n \geq n_0.$$

The Weierstrass Preparation Theorem implies that we may write $F(T) = p^\mu Q(T)u(T)$, where $\mu \geq 0$, $Q(T)$ is a monic polynomial of degree λ congruent to $(T - 1)^\lambda \pmod{p}$, and $u(T)$ is a unit in $\mathbf{Z}_p[[T - 1]]$. From this one can see that (2) \implies (1).

But (2) contains much more information than (1), since it gives a formula for the whole relative class number. My questions (basically just questions about formal power series) are:

QUESTION 59.1. *What does (2) tell us about class numbers? I.e., what constraints are imposed on the sequence $\{h_n^*\}$ by the formula (2)?*

For example, (2) has the following curious consequence: let $(h_n^*)'$ denote the “prime-to- p ” part of h_n^* . Then (2) implies that

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n^*)' \text{ exists in } \mathbf{Z}_p^\times.$$

H. Kisilevsky [2] pointed out that one can show that the limit (3) exists for the prime-to- p part (in fact for the ℓ -primary part for any $\ell \neq p$) of the class numbers of *any* \mathbf{Z}_p -extension.

Conversely, we can ask:

QUESTION 59.2. *What does (2) tell us about $F(T)$?*

For example, if $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ then $F(T^a)$ gives the same sequence h_n^* , so $F(T)$ is not completely determined by (2). How much information about $F(T)$ is contained in (2)? The Newton polygon of $F(T^a)$ (as a power series in $\mathbf{Z}_p[[T-1]]$) is the same as the Newton polygon of $F(T)$: does (2) determine the Newton polygon of $F(T)$?

Finally, it would be interesting to know whether a power series as in (2) exists for other \mathbf{Z}_p -extensions:

QUESTION 59.3. *Suppose that K/k is a \mathbf{Z}_p -extension, h_n the class number of k_n : is there a power series $F(T) \in \mathbf{Z}_p[[T-1]]$ such that (2) holds (with h_n in place of h_n^*)?*

These questions are interesting since the “Main Conjecture” of Iwasawa theory (proved in the 1980s by Wiles [4]) relates $F(T)$ — up to a unit in $\mathbf{Z}_p[[T-1]]$ — to a characteristic polynomial defined from the action of $\text{Gal}(K/k)(\simeq \mathbf{Z}_p)$ on the p -primary part of the ideal class group of K .

REFERENCES

- [1] IWASAWA, K. On \mathbf{Z}_l -extensions of algebraic number fields. *Ann. of Math.* (2) 98 (1973), 246–326.
- [2] KISILEVSKY, H. A generalization of a result of Sinnott. *Pacific J. Math.* 181 (1997), Special Issue, (Olga Taussky-Todd: in memoriam), 225–229.
- [3] SINNOTT, W. On p -adic L -functions and the Riemann-Hurwitz genus formula. *Compositio Math.* 53 (1984), 3–17.

- [4] WILES, A. The Iwasawa conjecture for totally real fields. *Ann. of Math.* (2) 131 (1990), 493–540.

W. Sinnott

The Ohio-State University
231 West 18th Avenue
43210 Columbus, OH
USA
e-mail: sinnott@math.ohio-state.edu