

# Cohomological finiteness conditions : spaces versus H-spaces

Autor(en): **Castellana, Natàlia / Crespo, Juan A / Scherer, Jérôme**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109891>

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*

ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

## 22

### COHOMOLOGICAL FINITENESS CONDITIONS: SPACES VERSUS $H$ -SPACES

by Natàlia CASTELLANA, Juan A. CRESPO and Jérôme SCHERER

We wish to ask a very naive and classically flavored question. Consider a finite complex  $X$  and an integer  $n$ . Does its  $n$ -connected cover  $X\langle n \rangle$  satisfy any cohomological finiteness property? When  $X$  is an  $H$ -space we have:

**THEOREM 22.1** ([3]). *Let  $X$  be a finite  $H$ -space and  $n$  an integer. Then  $H^*(X\langle n \rangle; \mathbf{F}_p)$  is finitely generated as an algebra over the Steenrod algebra.*

This leads naturally to ask whether the same statement holds for arbitrary spaces. Of course, some restriction on the fundamental group will be needed, as the universal cover of  $S^1 \vee S^2$  is an infinite wedge of copies of  $S^2$ .

**QUESTION 22.2.** *Let  $X$  be a simply connected finite space and  $n \geq 2$ . Is  $H^*(X\langle n \rangle; \mathbf{F}_p)$  finitely generated as an algebra over the Steenrod algebra?*

The “difference” between a space and its  $n$ -connected cover is a Postnikov piece. Thus, a first step towards a solution to Question 22.2 would be to understand the cohomology of finite type Postnikov pieces.

**QUESTION 22.3.** *Is the cohomology of a finite-type Postnikov piece finitely generated as an algebra over the Steenrod algebra?*

Again, we know from [3], Corollary 3.8, that the answer is yes if the Postnikov piece is an  $H$ -space. The proof of Theorem 22.1 is based on L. Smith’s analysis of the Eilenberg–Moore spectral sequence, and the following algebraic result, whose proof relies deeply on the Borel–Hopf structure theorem.

**THEOREM 22.4 ([3]).** *Let  $A$  be an unstable Hopf algebra which is finitely generated as an algebra over the Steenrod algebra. Then so is any unstable Hopf subalgebra  $B \subset A$ .*

For plain unstable algebras, this is false, as pointed out to us by Hans-Werner Henn. Consider the unstable algebra  $H^*(\mathbf{CP}^\infty \times S^2; \mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p[x] \otimes E(y)$  where both  $x$  and  $y$  have degree 2. Turn the ideal generated by  $y$  into an unstable subalgebra by adding 1. This is isomorphic, as an unstable algebra, to  $\mathbf{F}_p \oplus \Sigma^2 \mathbf{F}_p \oplus \Sigma^2 \tilde{H}^*(\mathbf{CP}^\infty; \mathbf{F}_p)$ , which is not finitely generated.

Where do these questions come from? The condition that  $H^*(X; \mathbf{F}_p)$  is finitely generated as an algebra over the Steenrod algebra is equivalent to the condition that the indecomposables  $QH^*(X; \mathbf{F}_p)$  are finitely generated as a module over the Steenrod algebra. This guarantees that  $QH^*(X; \mathbf{F}_p)$  lives in the Krull filtration of the category  $\mathcal{U}$  of unstable modules, introduced by Schwartz in [5]: an unstable module  $M$  lives in  $\mathcal{U}_n$  if and only if  $\bar{T}^{n+1}M = 0$ , where  $\bar{T}$  denotes Lannes' reduced  $T$  functor. This algebraic filtration can be compared with Bousfield's  $B\mathbf{Z}/p$ -nullification filtration, [1] (a connected space  $X$  is  $B\mathbf{Z}/p$ -null if the space of pointed maps  $\text{map}_*(B\mathbf{Z}/p, X)$  is contractible).

**THEOREM 22.5 ([2]).** *Let  $X$  be a connected  $H$ -space satisfying that  $T_V H^*(X; \mathbf{F}_p)$  is of finite type for any elementary abelian  $p$ -group  $V$ . Then  $QH^*(X; \mathbf{F}_p)$  is in  $\mathcal{U}_n$  if and only if  $\Omega^{n+1}X$  is  $B\mathbf{Z}/p$ -null.*

Dwyer and Wilkerson have shown in [4] that the case  $n = 0$  holds for arbitrary spaces. However, our methods rely so deeply on the  $H$ -structure that we still don't know if one should look for a positive or negative answer to our last question.

**QUESTION 22.6.** *Let  $X$  be a connected space such that  $T_V H^*(X; \mathbf{F}_p)$  is of finite type for any elementary abelian  $p$ -group  $V$ , and let  $n \geq 1$ . Is it true that  $QH^*(X; \mathbf{F}_p)$  is in  $\mathcal{U}_n$  if and only if  $\Omega^{n+1}X$  is  $B\mathbf{Z}/p$ -null?*

## REFERENCES

- [1] BOUSFIELD, A.K. Localization and periodicity in unstable homotopy theory. *J. Amer. Math. Soc.* 7 (1994), 831–873.
- [2] CASTELLANA, N., J.A. CRESPO and J. SCHERER. Deconstructing Hopf spaces. *Invent. Math.* 167 (2007), 1–18.

- [3] CASTELLANA, N., J.A. CRESPO and J. SCHERER. On the cohomology of highly connected covers of finite Hopf spaces. *Adv. Math.* 215 (2007), 250–262.
- [4] DWYER, W.G. and C.W. WILKERSON. Spaces of null homotopic maps. In: *Proceedings of the 1988 Luminy Conference*, 97–108. Astérisque 191, Soc. Math. France, 1990.
- [5] SCHWARTZ, L. *Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, 1994.

Natàlia Castellana

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
E-08193 Bellaterra  
Spain  
*e-mail:* natalia@mat.uab.es

Juan A. Crespo

Departamento de Economía  
Universidad Carlos III de Madrid  
E-28903 Getafe  
Spain  
*e-mail:* jacrespo@eco.uc3m.es

Jérôme Scherer

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
E-08193 Bellaterra  
Spain  
*e-mail:* jscherer@mat.uab.es