Sur la linéarisation des tissus

Autor(en): **Pirio, Luc**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **55 (2009)**

Heft 3-4

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110106

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 55 (2009), 285–328

SUR LA LINÉARISATION DES TISSUS

par Luc PIRIO

ABSTRACT. We present a simple analytic criterion which characterizes linearizable 1-codimensional webs. We also give an invariant geometric interpretation of this criterion, in terms of projective connection. We then explain how our approach allows one to study linearization for more general objects than 1-codimensional webs. By way of illustration, we treat some explicit examples. We end with some historical remarks on this circle of questions.

1. INTRODUCTION

On peut faire remonter la question de la linéarisation des tissus au problème de l'anamorphose en nomographie. Cette problématique date donc de plus d'un siècle. La géométrie des tissus s'est constituée comme discipline autonome à Hambourg vers la fin des années 1920 : Blaschke et ses collaborateurs ont alors établi un nombre important de résultats, qui ont constitué un cadre solide sur lequel s'est bâtie la théorie par la suite. Le problème de savoir si un tissu donné est linéarisable ou pas a bien sûr retenu l'attention de ces géomètres qui en ont donné une solution satisfaisante en dimension 2.

Cette question a été reprise récemment dans ce même cadre par différents auteurs, de façon indépendante semble-t-il. A notre connaissance, il n'y a pas de résultat général concernant la linéarisation des tissus qui ne sont pas plans [1]).

[1]) Nous renvoyons le lecteur à la section 6 pour une discussion sur ce point.

Dans cet article, nous donnons une solution complète au problème de caractériser les d-tissus de codimension 1 linéarisables en dimension n arbitraire, lorsque d est plus grand que $n+2$. Il nous semble que l'approche développée ici peut se généraliser sans véritable problème à la caractérisation des tissus en toute dimension et/ou codimension. La difficulté qu'il y a à savoir si un tissu est linéarisable ou pas provient du fait qu'un tel objet est la donnée d'un ensemble discret de feuilletages, alors que les méthodes classiques permettant d'étudier l'équivalence analytique (locale) d'objets géométriques sont du ressort de la géométrie différentielle et traitent donc des structures géométriques continues. Il se trouve que cette difficulté disparaît si l'on «interpole» *tous* les feuilletages d'un tissu donné par *un* même système différentiel d'ordre 2, puisque le critère suivant est immédiat:

Un tissu est linéarisable si et seulement si les feuilles des différents feuilletages qui le constituent sont des variétés intégrales d'un même système différentiel du second ordre (avec $1 \leq \alpha \leq \beta < n$*)*

$$\frac{\partial^2 x^n}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = F_{\alpha\beta}(x) \tag{1.1}$$

linéarisable, c'est-à-dire équivalent au système «plat»

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = 0 \tag{1.2}$$

via un changement de coordonnées ponctuelles

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto \left(\bar{x}^1(x), \ldots, \bar{x}^n(x)\right).$$

C'est sur ce principe particulièrement simple que repose notre approche. En effet, la caractérisation des systèmes du second ordre (1.1) équivalents par changement de coordonnées ponctuelles au système plat (1.2) est classique et bien comprise. Elle peut se formaliser en termes de connexion projective. L'utilisation alors de la notion d'espace généralisé introduite par É. Cartan permet d'obtenir facilement un critère caractérisant les connexions projectives intégrables, c'est-à-dire (localement) équivalentes à la connexion projective plate.

La question de linéariser un d-tissu W_d se ramène alors à celle de trouver une connexion projective (i.e. un système de la forme (1.1) sous une certaine forme normale) interpolant tous les feuilletages de W_d. Ce problème est en fait très simple puisque équivalent à la résolution d'un système d'équations linéaires, système qui se trouve être surdéterminé lorsque d est suffisamment grand.

REMARQUE. C'est en essayant d'interpréter avec un formalisme plus moderne le chapitre 27 du livre de référence [2] que nous avons compris que la bonne notion pour étudier la question de la linéarisabilité des tissus était la notion de connexion projective. Nous avons ensuite réalisé que l'approche de [2] se généralisait sans véritable difficulté au cas des tissus de codimension 1. Nous avons écrit cet article sans prétendre à une grande originalité mais en espérant faire un exposé clair sur une question naturelle en géométrie des tissus.

Indiquons maintenant comment est organisée la suite de cet article.

Dans la section 2, on commence par énoncer le théorème 2.1 que nous présentons comme notre résultat principal : il s'agit d'un critère caractérisant de façon invariante les $(n+2)$-tissus de codimension 1 linéarisables. On énonce aussi le corollaire 2.2 qui est une adaptation immédiate du résultat précédent au cas des d-tissus lorsque $d > n+2$. On introduit ensuite au § 2.2 les notions et notations qui seront utilisées dans la suite.

L'outil essentiel dans cet article est la notion de connexion projective : on la présente sous différents aspects dans la section 3 et l'on donne les ingrédients utilisés pour caractériser les connexions projectives intégrables par l'annulation de leur courbure. Cette section ne comporte pas de résultat qui ne soit déjà connu et le spécialiste n'y apprendra rien de nouveau. Par contre, elle sera peut-être utile au lecteur peu familier avec les connexions projectives, qui y trouvera une présentation que l'on espère assez complète et bien référencée. Dans tous les cas, cette section peut être sautée en première lecture.

Dans la section 4, nous montrons que les feuilles d'un $(n+2)$-tissu W de codimension 1 sont totalement géodésiques pour une certaine connexion projective Π_W uniquement déterminée qui se trouve donc être canoniquement associée à W. Combiné avec les résultats de la section précédente, cela nous permet d'obtenir assez simplement une preuve de notre résultat principal.

Le point de vue adopté dans cet article permet d'obtenir dans certains cas des critères de linéarisabilité pour des objets plus généraux que les tissus de codimension 1. C'est ce thème qui est discuté dans la section 5. En guise d'illustration, nous traitons plusieurs exemples différents.

Enfin, nous présentons dans la section 6 quelques remarques historiques sur différents travaux antérieurs au présent article qui avaient abordé la question de la linéarisabilité des tissus.

2. Énoncé du résultat principal et notations

Dans tout l'article, on se place dans un cadre holomorphe. Tous les objets considérés seront donc analytiques complexes. Nos résultats sont cependant valides dans un cadre réel, sous des hypothèses de régularité C^k pour k suffisamment grand. Nous laissons le soin au lecteur intéressé d'adapter et/ou de modifier les énoncés/preuves de cet article à d'autres situations.

2.1 Énoncés du résultat principal et d'un corollaire

Nous dirons qu'une connexion projective Π et un tissu W sont *compatibles* si les feuilles de W sont toutes totalement géodésiques pour Π. Cette définition posée, notre résultat principal se formule de la façon suivante :

Théorème 2.1. *Étant donné un $(n+2)$-tissu W de codimension 1 sur un domaine $U \subset \mathbf{C}^n$, il existe une unique connexion projective Π_W qui lui est compatible. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *W est linéarisable ;*
- *Π_W est plate ;*
- *la courbure $\mathfrak{C}_W \in \Omega^2_U \otimes \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$ de Π_W est identiquement nulle.*

Ce théorème se démontre très simplement : on commence par établir l'existence et l'unicité de la connexion projective Π_W compatible avec un $(n+2)$-tissu W donné. C'est la proposition 4.3 dont la preuve repose essentiellement sur de l'algèbre linéaire. Le critère de linéarisation énoncé dans le théorème 2.1 provient alors du critère (classique) caractérisant les connexions projectives plates que l'on aura rappelé auparavant dans la section 3 (cf. le théorème 3.24 ainsi que le corollaire 3.26).

Du théorème précédent, on déduit immédiatement le

Corollaire 2.2. *Soit $d \geq n+2$. Un d-tissu en hypersurfaces sur un domaine $U \subset \mathbf{C}^n$ est linéarisable si et seulement si toutes les connexions projectives de ses $(n+2)$-sous-tissus coïncident et sont plates.*

Dans la section 4, nous énonçons différentes formulations invariantes des conditions de linéarisation qui apparaissent dans le théorème 2.1 et le corollaire 2.2.

2.2 Notations

La liste ci-dessous présente certaines des notations utilisées dans l'article :

n	entier plus grand que 2;
i, j, k, l	indices variant entre 1 et n;
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	indices variant entre 1 et n;
M	variété complexe connexe de dimension n;
U	domaine (i.e. ouvert connexe et simplement connexe) de M identifié à un domaine de $\mathbf{C}^n$;
T_M	fibré tangent de M;
Ω_M^k	k-ième puissance extérieure du fibré cotangent de M;
$x^1, \ldots, x^n$	système de coordonnées holomorphes sur U;
∇	connexion affine sur M;
Γ_{ij}^k	symboles de Christoffel de ∇ dans les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$;
$[\nabla]$	classe d'équivalence projective de ∇;
Π	connexion projective sur M;
Π_{ij}^k	coefficients de Thomas de Π dans les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$;
$D(\mathbf{C}^n, 0)$	groupe $Diff(\mathbf{C}^n, 0)$ des germes de biholomorphismes holomorphes en $(\mathbf{C}^n, 0)$;
G	groupe de Lie complexe;
H	sous-groupe de Lie fermé de G;
$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$	algèbres de Lie de G et H (respectivement);
ρ	application de passage au quotient $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$;
P	H-fibré principal à droite sur M;
ω	$\mathfrak{g}$-connexion de Cartan sur P;
$\Omega = \mathfrak{C}(\omega)$	courbure de ω;
$\mathfrak{t}(\omega)$	torsion $\rho(\Omega)$ de ω;
σ	jauge pour le fibré $P\vert_U \to U$;
ω_σ	forme de soudure $\sigma^*\omega$ associée à σ;
$\mathcal{F}$	feuilletage;
W	tissu;
d	nombre de feuilletages formant W;
W_d	d-tissu.

Quelques commentaires et précisions s'imposent : l'ouvert U désignera le plus souvent un voisinage ouvert connexe et simplement connexe de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ et on aura souvent $M = U$. L'expression *système de coordonnées* $x^1, \ldots, x^n$ *sur* U fera référence aux composantes x^i d'un biholomorphisme $\boldsymbol{x}: U \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{x}(U) \subset \mathbf{C}^n$. Comme l'on s'intéresse au problème de caractériser les tissus linéarisables par un biholomorphisme local, on se permettra de restreindre U autour de l'origine aussi souvent qu'il sera nécessaire de le faire.

Si F est un fibré vectoriel sur M, on commettra l'abus d'écrire F au lieu de $H^0(M,F)$: par exemple, la formule (3.26) doit se comprendre comme $\mathfrak{W}_\Pi \in H^0(U, T_U \otimes (\Omega^1_U)^{\otimes 3})$.

Nous utiliserons souvent les conventions sommatoires des physiciens : si un indice apparaît à la fois en haut et en bas dans une expression mathématique, c'est qu'il faut sommer par rapport à celui-ci. Par exemple, la formule (3.3) est l'abréviation de l'expression $\frac{d^2c^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij} \frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} \equiv 0$, etc.

Par définition, des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_d$ d'un espace vectoriel complexe E de dimension n sont dits *en position générale* si pour toute partie $A \subset \{1, \ldots, d\}$ on a $\dim\left(\sum_{a\in A} E_a\right) = \min\left(n, \sum_{a\in A} \dim(E_a)\right)$, ainsi que $\operatorname{codim}\left(\bigcap_{a\in A} E_a\right) = \min\left(n, \sum_{a\in A} \operatorname{codim}(E_a)\right)$. À chaque sous-espace E_a de codimension c_a est associée une *normale* $\mathfrak{n}_a \in \bigwedge^{c_a}(E)$ qui est unique (modulo multiplication par une constante non-nulle) : il suffit de prendre $\mathfrak{n}_a = \ell^1 \wedge \cdots \wedge \ell^{c_a}$, où $\ell^1, \ldots, \ell^{c_a}$ désigne une base arbitraire de $\operatorname{Ann}(E_a) \subset E^*$. La donnée de $\mathfrak{n}_a$ (modulo multiplication) est équivalente à celle de E_a puisque $E_a = \{v \in E \mid i_v(\mathfrak{n}_a) \equiv 0\}$. Si $n = \sum_{a=1}^d \dim(E_a)$, l'hypothèse de position générale correspond à une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_d$, ce qui équivaut à la condition analytique $\mathfrak{n}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{n}_d \neq 0$.

Soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d$ des feuilletages holomorphes réguliers sur M, de codimensions respectives $c_1, \ldots, c_d$. Chacun d'eux est défini par une *normale* $\Omega_a \in \Omega^{c_a}_M$ qui est unique modulo multiplication par une section partout non-nulle d'un fibré en droites L_a sur M. Par définition, le d-uplet $W_d = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d)$ est un *d-tissu* (ordonné) sur M si les espaces tangents $T_{\mathcal{F}_a,m}$ (pour $a = 1, \ldots, d$) sont en position générale dans $T_{M,m}$, cela quel que soit le point $m \in M$. Un tissu W est dit *mixte* si les codimensions de ses feuilletages ne sont pas toutes égales. Si $c = c_1 = \cdots = c_d$, on parlera simplement de *d-tissu de codimension c*. Lorsque $c = 1$ et $c = n-1$, on parlera aussi de *tissus en hypersurfaces* et de *tissus en courbes* (respectivement). Enfin, lorsque c divise la dimension n de l'espace ambiant (i.e. lorsque $n = kc$ pour un entier k), l'hypothèse de position générale se traduit par

$$\Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_k} \neq 0$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_k$ tels que $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq d$.

Un tissu sur $U \subset \mathbf{C}^n$ est *linéaire* si les feuilles de ses feuilletages sont des (morceaux de) sous-espaces affines de $\mathbf{C}^n$. Un tissu W défini sur M est *linéarisable* s'il existe un germe de biholomorphisme $\varphi\colon (M,m) \to (\mathbf{C}^n, \varphi(m))$

tel que $\varphi_*(W)$ soit un germe de tissu linéaire. C'est une notion qui a tendance à se globaliser[2]) mais que l'on ne regardera ici que d'un point de vue local.

3. Connexions projectives

La notion de connexion projective est assez ancienne. Plusieurs auteurs voient sa naissance en 1921 dans le papier de Weyl [43] qui a induit quasiment immédiatement un grand nombre d'articles sur le sujet. Deux courants d'études ont alors émergé. L'un se trouve souvent désigné comme l'« École de Princeton » (constituée de Berwald, Eisenhart, Thomas, Veblen, Weyl, Whitehead parmi les plus connus), l'autre est principalement le fait d'Élie Cartan. Le point de vue de Cartan sur les connexions projectives est plus abstrait et conceptuel que celui de l'École de Princeton. C'est un cas particulier des notions d'« espace généralisé » et de « connexion de Cartan » introduites par Cartan. L'approche de l'École de Princeton a cet avantage d'être plus élémentaire et plus immédiate pour calculer en coordonnées locales.

Le lecteur insatisfait des quelques lignes d'introduction ci-dessus peut consulter [6] pour une discussion moins caricaturale et plus substantielle des approches de Cartan d'une part et des membres de l'École de Princeton d'autre part, de la notion de connexion projective.

3.1 Définition « à la Princeton » via les connexions affines

3.1.1 Rappels sur les connexions affines. Dans tout ce qui suit, l'on désigne par ∇ une *connexion affine (holomorphe)* sur U, c'est à dire un morphisme de fibrés vectoriels $\nabla\colon T_U \to \Omega^1_U \otimes T_U$ vérifiant l'*identité de Leibniz* $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla(X)$ pour tout germe de fonction holomorphe f et tout germe de champ de vecteurs X sur U. Un système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$ étant fixé sur U, ∇ est complètement caractérisée par la donnée de ses *symboles de Christoffel* Γ^i_{jk} définis par les relations $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma^k_{ij}\, dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$ pour $j = 1, \dots, n$. Les symboles de Christoffel $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ de ∇ relativement à un autre système de coordonnées $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$ sont reliés aux Γ^i_{jk} par les formules classiques

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^\alpha \partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^i}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

---

[2]) Cela signifie ceci : si le germe d'un tissu W en un point $m \in M$ est linéarisable, alors il l'est également en tout point de M.

La *torsion* de ∇ est le tenseur T deux fois contravariant tel que $\nabla_Y(X) - \nabla_X(Y) + [X,Y] + T(X,Y) = 0$ quels que soient les champs de vecteurs X et Y. On vérifie que ∇ est à torsion nulle si et seulement si elle est *symétrique*, c'est-à-dire si dans un (et donc dans tous) système(s) de coordonnées ses coefficients de Christoffel sont symétriques par rapport aux deux indices inférieurs.

DÉFINITION 3.1. Une *paramétrisation géodésique* (ou plus simplement, une *géodésique*) pour la connexion ∇ est une application holomorphe $c\colon t \mapsto c(t)$ définie sur un ouvert de $\mathbf{C}$ à valeurs dans U, telle que

$$\nabla_{\frac{dc}{dt}}\left(\frac{dc}{dt}\right) \equiv 0\,. \tag{3.2}$$

Si c paramétrise une courbe et s'écrit $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$ dans des coordonnées locales $x^1, \dots, x^n$, la relation (3.2) équivaut au système d'équations différentielles ordinaires du second ordre

$$\frac{d^2c^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} \equiv 0\,, \qquad k = 1, \dots, n\,. \tag{3.3}$$

On déduit facilement de la forme du système d'équations (3.3) que, étant donné un vecteur tangent $\tau \in T_{U,u}$ en un point $u \in U$, il existe un unique germe de paramétrisation géodésique $c\colon (\mathbf{C}, 0) \to (U, u)$ tel que $\frac{dc}{dt}|_{t=0} = \tau$.

DÉFINITION 3.2. Une *courbe géodésique* pour ∇ est une courbe qui admet (localement) une paramétrisation géodésique.

PROPOSITION 3.3. *Soit $C \subset U$ une courbe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *C est une courbe géodésique pour la connexion ∇ ;*
2. *il existe une paramétrisation $t \mapsto (c^1(t), \dots, c^n(t))$ de C qui satisfait les équations différentielles*
$$\frac{dc^\ell}{dt}\left(\frac{d^2c^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt}\right) = \frac{dc^k}{dt}\left(\frac{d^2c^\ell}{dt^2} + \Gamma^\ell_{i'j'}\frac{dc^{i'}}{dt}\frac{dc^{j'}}{dt}\right), \tag{3.4}$$
quels que soient $k, \ell = 1, \dots, n$;
3. *toute paramétrisation $t \mapsto (c^1(t), \dots, c^n(t))$ de C satisfait les équations différentielles* (3.4).

De ci-dessus, on déduit que, étant donnée une direction tangente $L \in \mathbf{P}(T_{U,u})$ en $u \in U$, il existe une unique courbe géodésique C passant par u telle que $T_{C,u} = L$. Nous dirons que C est la *courbe géodésique issue de L*.

3.1.2 Connexions affines projectivement équivalentes

Définition 3.4. Deux connexions affines ∇ et $\overline{\nabla}$ sur U sont *projectivement équivalentes* si elles ont les mêmes courbes géodésiques.

Proposition 3.5 ([17, 43]). *Deux connexions affines ∇ et $\overline{\nabla}$ sur U sont projectivement équivalentes si et seulement si il existe des quantités scalaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sur U telles que les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k et $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ de ∇ et $\overline{\nabla}$ (par rapport au même système de coordonnées) vérifient*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \varphi_j + \delta_j^k \varphi_i \tag{3.5}$$

quels que soient $i, j, k = 1, \ldots, n$.

On vérifie immédiatement que l'équivalence projective définit bien une relation d'équivalence sur l'espace des connexions affines. On peut donc poser la

Définition 3.6. Une *connexion projective* Π sur U est la donnée d'une classe d'équivalence projective de connexions affines sur U. On note $\Pi = [\nabla]$ si ∇ est un représentant de Π.

On vient de définir la notion de connexion projective sur une variété complexe isomorphe à un domaine de $\mathbf{C}^n$. La notion générale de connexion projective s'en déduit par recollement.

Définition 3.7. Une *connexion projective* Π sur M est la donnée d'une classe d'équivalence[3]) d'atlas $\{(U_i, [\nabla_i])\}_{i \in I}$ sur M tels que

1. $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de M par des ouverts isomorphes à des domaines de $\mathbf{C}^n$;
2. pour tout $i \in I$, $[\nabla_i]$ est une connexion projective sur U_i (au sens de la définition 3.6) ;
3. on a $[\nabla_i] = [\nabla_j]$ sur toute intersection $U_i \cap U_j$ non-vide.

Remarque 3.8. La définition ci-dessus s'étend bien sûr au réel mais est alors maladroite puisque la définition 3.6 suffit dans ce cadre. En effet, si $\Pi_{\mathbf{R}}$ désigne une connexion projective réelle sur une variété réelle $M_{\mathbf{R}}$ arbitraire

[3]) La notion d'équivalence dont il est question ici est claire vu le contexte. Nous laissons le soin au lecteur de l'expliciter.

(seulement supposée paracompacte pour assurer l'existence de partitions de l'unité), il existe toujours une connexion affine réelle ∇_{R} sur M_{R} telle qu'on puisse écrire globalement $\Pi_{\mathrm{R}} = [\nabla_{\mathrm{R}}]$. Dans le cadre holomorphe, cela est vrai si et seulement si le 1-cocycle (3.2) de [31] est nul dans le groupe de cohomologie $H^1(M, \Omega^1_M)$, ce qui est vérifié si et seulement si le fibré canonique $K_M = \Omega^n_M$ de M peut être muni d'une connexion affine holomorphe (comme il ressort de la lecture[4]) des pages 96–97 de [25]).

PROPOSITION 3.9. *Une connexion affine ∇ étant donnée, il existe une unique connexion symétrique admettant les mêmes paramétrisations géodésiques. C'est la connexion $\overline{\nabla}$ définie par les symboles de Christoffel*

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right).$$

COROLLAIRE 3.10. *Une connexion affine ∇ étant donnée, il existe une connexion symétrique qui lui est projectivement équivalente.*

DÉFINITION 3.11. Une connexion affine ∇ est de *trace nulle relativement à un système de coordonnées* $x^1, \dots, x^n$ si dans celui-ci, les coefficients de Christoffel Γ^k_{ij} de ∇ vérifient (pour $j = 1, \dots, n$)

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{ji} = 0. \tag{3.6}$$

On prendra garde à ce que la notion introduite dans la définition ci-dessus n'est pas invariante mais dépend du système de coordonnées.

Étant donné une connexion projective Π sur U, soit ∇ une connexion affine symétrique qui la représente. Soient Γ^k_{ij} ses coefficients de Christoffel relativement à des coordonnées $x^1, \dots, x^n$ fixées. Posons alors

$$\Pi^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \delta^k_i\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^\ell_{\ell j}\right) - \delta^k_j\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^\ell_{i\ell}\right) \tag{3.7}$$

pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$. Les coefficients Π^k_{ij} définissent une connexion affine sans torsion de trace nulle dans les coordonnées $x^1, \dots, x^n$ qui est (vu (3.7) et d'après la proposition 3.5) projectivement équivalente à ∇. Par ailleurs, on montre facilement que, le système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$ étant toujours fixé, il existe une unique connexion affine symétrique de trace nulle dans la classe d'équivalence projective de ∇.

---

[4]) L'auteur remercie S. Dumitrescu de lui avoir indiqué ces références.

DÉFINITION 3.12. Les quantités Π^k_{ij} définies en (3.7) sont les *coefficients de Thomas* de la connexion projective Π relativement au système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$.

Soient alors $\overline{\Pi}^\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n)$ les coefficients de Thomas de Π relativement à un autre système de coordonnées $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$ sur U. On déduit sans difficulté des formules (3.1) que pour tout $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$, on a

$$\overline{\Pi}^\gamma_{\alpha\beta} = \Pi^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^\alpha \partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^i} - \frac{1}{n+1} \left(\delta^\gamma_\alpha \frac{\partial \log \Delta}{\partial \overline{x}^\beta} + \delta^\gamma_\beta \frac{\partial \log \Delta}{\partial \overline{x}^\alpha} \right) \tag{3.8}$$

où Δ désigne le déterminant jacobien du changement de paramétrisation $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$.

Puisqu'une connexion projective est localement définie par ses coefficients de Thomas, on en déduit la

PROPOSITION 3.13. *La donnée d'une connexion projective sur M est équivalente à la donnée, pour chaque système de coordonnées locales $x^1, \dots, x^n$ sur M, de coefficients Π^k_{ij} vérifiant $\Pi^k_{ij} = \Pi^k_{ji}$ et $\sum_{\ell=1}^n \Pi^\ell_{\ell j} = 0$ pour tout indice i, j, k compris entre 1 et n et satisfaisant aux lois de transformation* (3.8).

REMARQUE 3.14. La proposition ci-dessus permet de donner une définition plus formelle de ce qu'est une connexion projective holomorphe. Si $\{(U_\nu, x_\nu = (x^i_\nu, \dots, x^n_\nu))\}$ est un atlas sur M et si l'on note $\Pi^k_{\nu,ij}$ les coefficients de Thomas de Π dans les cartes (U_ν, x_ν), alors les $\Pi_\nu = \Pi^k_{\nu,ij} dx^i_\nu \otimes dx^j_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^k_\nu}$ définissent une 0-cochaîne sur M à valeurs dans $\mathrm{Sym}^2(\Omega^1_M) \otimes T_M$. Avec ce formalisme, les formules de transformation (3.8) signifient que le cobord de $\{\Pi_\nu\}$ est égal au 1-cocycle $\{S(x_{\mu\nu})\}$ où $S(x_{\mu\nu})$ désigne la « dérivée de Schwarz » du changement de coordonnées $x_\nu \circ x_\mu^{-1}$ (voir [25] et [35]). La donnée d'une connexion projective sur M est équivalente à la donnée d'une 0-cochaîne à valeurs dans $\mathrm{Sym}^2(\Omega^1_M) \otimes T_M$ satisfaisant cette propriété.

3.2 INTERPRÉTATION EN TERMES DE CONNEXION DE CARTAN

Il nous semble intéressant d'interpréter en des termes plus conceptuels la notion de connexion projective. Cela pourra se révéler important par exemple lors de l'étude des tissus globaux sur les variétés compactes.

Pour cela, nous nous appuierons sur le concept d'« espace généralisé » introduit par Cartan, qui peut être considéré comme un équivalent infinitésimal courbe de la notion de géométrie de Klein. Le récent livre de Sharpe [39]

a contribué à populariser ces notions et est une référence assez complète. Pour certains points cependant, nous ferons plutôt référence au livre [28] de Kobayashi.

3.2.1 Espaces généralisés et connexions de Cartan. Soit H un sous-groupe de Lie fermé d'un groupe de Lie complexe G tel que l'espace homogène G/H soit de dimension n. Une *géométrie de Klein modelée sur la paire* (G,H) sur une variété M de dimension n est la donnée d'un atlas $\{(U_\nu, F_\nu)\}$ sur M, les F_ν étant à valeurs dans G/H et vérifiant

$$F_\mu = g_{\mu\nu} \cdot F_\nu \tag{3.9}$$

sur les intersections non-vides $U_\mu \cap U_\nu$, pour certains $g_{\mu\nu} \in G$ constants.

Pour tout ν, notons P_ν le H-fibré principal $P_\nu = F_\nu^* P$ sur U_ν obtenu en tirant en arrière par F_ν le fibré principal tautologique $P = G \to G/H$. Les relations (3.9) impliquent que les P_ν se recollent pour former un H-fibré principal à droite P_M sur M. Soit $\omega_G \in \Omega^1_G \otimes \mathfrak{g}$ la forme de Maurer-Cartan de G. Les "tirés-en-arrière" $F_\nu^*(\omega_G)$ se recollent eux aussi pour former une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1_{P_M} \otimes \mathfrak{g}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\omega_p \colon T_{P_M,p} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme quel que soit $p \in P_M$;
2. $\omega(X^\dagger) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$, où $X^\dagger$ désigne le *champ de vecteurs fondamental* associé à X (c'est-à-dire le générateur infinitésimal du (germe de) flot complexe $z \mapsto \exp(zX)$) ;
3. $R_h^*(\omega) = \mathrm{Ad}(h^{-1}) \cdot \omega$ pour tout $h \in H$, où R_h désigne la multiplication à droite sur P_M par h et $\mathrm{Ad}(h^{-1})$ dénote l'action adjointe de h^{-1} sur $\mathfrak{g}$;
4. l'équation de Maurer-Cartan $d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \equiv 0$.

Une *géométrie de Cartan* (ou plus précisément une *connexion de Cartan*) sur M modelée sur (G,H) (ou plus justement sur $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$) est la donnée d'un H-fibré principal à droite $P_M \to M$ et d'une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1_{P_M} \otimes \mathfrak{g}$ qui vérifient les conditions 1., 2. et 3. ci-dessus, mais pas forcément la condition 4. Les géométries de Klein sont donc des cas particuliers de géométries de Cartan, que l'on dira *plates*. Une géométrie de Cartan localement isomorphe (en un sens naturel) à une géométrie de Klein est dite *intégrable*. En toute généralité, on définit la *courbure de Cartan* de la géométrie de Cartan considérée comme étant la 2-forme différentielle $\mathfrak{C}(\omega) = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \in \Omega^2_{P_M} \otimes \mathfrak{g}$. Celle-ci mesure le défaut de platitude de la géométrie de Cartan donnée, comme on le verra section 3.3.1.

La *torsion* $\mathfrak{t}(\omega)$ d'une connexion de Cartan est définie comme $\mathfrak{t}(\omega) = \rho(\mathfrak{C}(\omega))$ où l'on a noté $\rho \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ le passage au quotient canonique. La

connexion de Cartan ω est *sans torsion* si $\mathfrak{t}(\omega)$ est identiquement nulle, c'est-à-dire si sa courbure $\mathfrak{C}(\omega)$ est à valeurs dans $\mathfrak{h}$.

L'action adjointe de G sur lui-même induit une action de H sur $\mathfrak{g}$ et donc sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. On en déduit une *action adjointe* de H sur $\mathrm{Hom}\big(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{g}\big)$ qui fait de cet espace vectoriel complexe un H-module. La *fonction courbure* de ω est l'application $K\colon P_M \to \mathrm{Hom}\big(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{g}\big)$ définie de la façon suivante : si $p \in P_M$, alors

$$K_p(\zeta, \zeta') := \mathfrak{C}(\omega)_p\big(\omega_p^{-1}(\zeta), \omega_p^{-1}(\zeta')\big)$$

pour tout $\zeta, \zeta' \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (on montre que K est bien définie et est un tenseur associé à ω (cf. [39, Lemma 5.3.23])).

Il est classique de s'intéresser aux géométries de Cartan « spéciales », i.e. celles dont la fonction courbure est à valeurs dans un sous-H-module spécifique que l'on décrète être le « sous-module normal » N de $\mathrm{Hom}\big(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{g}\big)$. On peut donner une idée de l'intérêt de cette notion de la façon suivante : un bon nombre de structures géométriques[5]) peuvent être interprétées en termes de géométrie de Cartan (en général après plusieurs prolongations différentielles à des ordres plus grands). Se pose alors le problème d'associer de façon canonique une connexion de Cartan ω à la structure géométrique initiale. Dans bon nombre de cas, cela se fait de façon satisfaisante en demandant que ω soit normale (en ayant au préalable choisi et convenablement défini la "bonne" notion de normalité). Dans les cas où cette stratégie s'applique, cela force l'unicité de la connexion de Cartan compatible avec une G-structure donnée et permet (par exemple) d'aborder avec un cadre conceptuel bien dégagé les problèmes d'équivalence.

Nous ne discuterons pas davantage la notion de « connexion de Cartan normale » en toute généralité. Nous donnerons plus bas une définition précise dans le cas des connexions projectives, qui est le seul cas qui nous intéresse ici.

3.2.2 Jets, fibrés de repères et formes canoniques. Soit m un point de M. Pour $k \geq 0$, on note $[\varphi]_0^k$ le jet à l'ordre k en l'origine d'une application holomorphe $\varphi\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to (M, m)$. Si φ est inversible, on dit que $[\varphi]_0^k$ est un *repère d'ordre* k sur M en m. On note $R_k(M)$ l'ensemble des repères d'ordre k sur M. On vérifie que de M, il hérite d'une structure de variété complexe faisant des applications de projections $\pi_k^\ell\colon [\varphi]_0^k \in R_k(M) \mapsto [\varphi]_0^\ell \in R_\ell(M)$ des submersions holomorphes (pour tous

[5]) Par exemple : les connexions projectives, les structures conformes, les structures quasi-grassmanniennes, etc. Nous renvoyons le lecteur aux articles [36, 10] pour un point de vue rigoureux sur cette question.

k, ℓ tels que $k \geq \ell$). On note $G_k(\mathbf{C}^n)$ l'espace des repères d'ordre k en l'origine de $\mathbf{C}^n$: $G_k(\mathbf{C}^n) = \{ [f]_0^k \mid f \in D(\mathbf{C}^n, 0) \}$. La composition des (germes de) biholomorphismes induit une structure de groupe de Lie complexe sur $G_k(\mathbf{C}^n)$. On vérifie alors que l'action

$$\begin{aligned} R_k(M) \times G_k(\mathbf{C}^n) &\longrightarrow R_k(M) \\ \big([\varphi]_0^k, [f]_0^k\big) &\longmapsto [\varphi \circ f]_0^k \end{aligned}$$

fait de $\pi_k \colon R_k(M) \to M$ un $G_k(\mathbf{C}^n)$-fibré principal (à droite).

Supposons que $k > 0$. Chacun des fibrés $R_k(M)$ est muni d'une 1-*forme différentielle canonique* θ_k à valeurs dans l'espace tangent de $R_{k-1}(\mathbf{C}^n)$ en le jet à l'ordre $k-1$ de $Id_{\mathbf{C}^n}$, que l'on note $\mathbb{I}d$ quel que soit k. Soit $v \in T_\xi R_k(M)$ avec $\xi = [\varphi]_0^k$. On définit $\theta_k(v)$ de la façon suivante : soit $\overline{\xi} = \pi_k^{k-1}(\xi) = [\varphi]_0^{k-1}$. Alors le biholomorphisme local $\varphi \colon (\mathbf{C}^n, 0) \to M$ induit un germe de biholomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi^{[k-1]} \colon \big(R_{k-1}(\mathbf{C}^n), \mathbb{I}d\big) &\longrightarrow \big(R_{k-1}(M), \overline{\xi}\big) \\ [g]_0^{k-1} &\longmapsto [\varphi \circ g]_0^{k-1} . \end{aligned}$$

On vérifie que la différentielle de $\varphi^{[k-1]}$ en $\mathbb{I}d$ ne dépend que de ξ et pas du choix de φ. On la note

$$\xi_* = d\varphi_{\mathbb{I}d}^{[k-1]} \colon T_{\mathbb{I}d} R_{k-1}(\mathbf{C}^n) \longrightarrow T_{\overline{\xi}} R_{k-1}(M) .$$

On pose alors

$$\theta_k(v) = \big(\xi_*\big)^{-1} \big(d\pi_k^{k-1}(v)\big) .$$

Les formes différentielles canoniques des fibrés de repères satisfont plusieurs propriétés d'invariance et de compatibilité (cf. [29, §3]). Les deux propriétés des θ_k qui sont les plus importantes ici nécessitent de faire quelques explications préliminaires. Pour $k \geq 1$, on note $\mathfrak{g}_k(\mathbf{C}^n)$ l'algèbre de Lie (complexe) de $G_k(\mathbf{C}^n)$. L'action à droite de ce groupe de Lie sur $R_k(M)$ induit une application injective $X \mapsto X^\dagger$ de $\mathfrak{g}_k(\mathbf{C}^n)$ à valeurs dans l'algèbre des champs de vecteurs sur $R_k(M)$. D'autre part, la différentielle en l'identité de la projection $G_k(\mathbf{C}^n) \to G_{k-1}(\mathbf{C}^n)$ induit un épimorphisme $\mathfrak{g}_k(\mathbf{C}^n) \ni X \mapsto X' \in \mathfrak{g}_{k-1}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, la projection $\pi_k^0 \colon R_k(\mathbf{C}^n) \to R_0(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}^n$ induit une trivialisation $TR_{k-1}(\mathbf{C}^n) = T\mathbf{C}^n \times \mathfrak{g}_{k-1}(\mathbf{C}^n)$, d'où on déduit une injection naturelle de $\mathfrak{g}_{k-1}(\mathbf{C}^n)$ dans $T_{\mathbb{I}d} R_{k-1}(\mathbf{C}^n)$. Ces remarques faites, on vérifie alors que pour tout $X \in \mathfrak{g}_k(\mathbf{C}^n)$, on a

$$\theta_k(X^\dagger) \equiv X' . \tag{3.10}$$

Fixons maintenant $\Gamma \in D(\mathbf{C}^n, 0)$. On peut lui associer le germe de biholomorphisme

$$\begin{aligned}\big(R_{k-1}(\mathbf{C}^n), Id\big) &\longrightarrow R_{k-1}(\mathbf{C}^n)\\ [\varphi]_0^{k-1} &\longmapsto \big[\Gamma\circ\varphi\circ\Gamma^{-1}\big]_0^{k-1}\end{aligned}$$

dont on vérifie que la différentielle en Id ne dépend que de $\gamma = [\Gamma]_0^k \in G_k(\mathbf{C}^n)$. Notons-la $\mathrm{Ad}(\gamma)$. Alors $\mathrm{Ad}\colon \gamma \mapsto \mathrm{Ad}(\gamma)$ définit l'*action adjointe* (à droite) de $G_k(\mathbf{C}^n)$ sur $T_{Id}R_{k-1}(\mathbf{C}^n)$. Cette définition étant posée, on vérifie que pour tout $\gamma \in G_k(\mathbf{C}^n)$, on a

$$R_\gamma^*(\theta_k) = \mathrm{Ad}(\gamma^{-1})\cdot\theta_k\,. \tag{3.11}$$

Le cas $k = 2$ est particulièrement important et particulier. En effet, on a des identifications naturelles

$$T_{Id}R_1(\mathbf{C}^n) \simeq \mathfrak{Aff}(\mathbf{C}^n) \simeq \mathbf{C}^n \oplus \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})\,. \tag{3.12}$$

Il apparaît donc que la seconde forme canonique θ_2 est à valeurs dans une algèbre de Lie. Soient $(e_1,\dots,e_n)$ et $(E_i^j)_{i,j=1}^n$ les bases canoniques de $\mathbf{C}^n$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \simeq M_n(\mathbf{C})$ respectivement. On peut alors décomposer θ_2 composante par composante dans ces bases en tenant en compte de la somme directe (3.12). On note

$$\theta_2 = \sum_{i=1}^n \theta^i e_i + \sum_{i,j=1}^n \theta_j^i E_i^j\,.$$

Si $\varphi\colon (\mathbf{C}^n, 0) \to U \subset \mathbf{C}^n$ est un biholomorphisme, on a au second ordre

$$\varphi(x^1,\dots,x^n) = \sum_{i=1}^n \Big(\varphi^i + \sum_{j=1}^n \varphi_j^i x^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \varphi_{jk}^i x^j x^k\Big)\, e_i$$

avec $(\varphi_j^i)_{i,j=1}^n$ inversible et où les φ_{jk}^i sont symétriques en les indices j et k. On en déduit que les $(\varphi^i, \varphi_j^i, \varphi_{jk}^i)$ forment un système de coordonnées locales sur $R_2(U)$ dans lesquelles la fibration $R_2(U) \to U$ n'est rien d'autre que la projection $(\varphi^i, \varphi_j^i, \varphi_{jk}^i) \longmapsto (\varphi^i)$. On peut alors exprimer (les composantes θ^i et θ_j^i de) la seconde forme canonique θ_2 dans ces coordonnées. En notant $(\psi_j^i)_{i,j=1}^n$ l'inverse de $(\varphi_j^i)_{i,j=1}^n$, on a (cf. [28, p. 141]) :

$$\theta^i = \sum_{j=1}^n \psi_j^i d\varphi^j \qquad \text{et} \qquad \theta_j^i = \sum_{k=1}^n \psi_k^i d\varphi_j^k + \sum_{k,\ell,m=1}^n \psi_k^i \varphi_{\ell j}^k \psi_m^\ell d\varphi^m\,.$$

Un calcul direct permet alors de montrer que, pour tout $i = 1,\dots,n$, la composante θ^i de θ_2 vérifie

$$d\theta^i = -\sum_{j=1}^n \theta_j^i \wedge \theta^j\,. \tag{3.13}$$

3.2.3 CONNEXION PROJECTIVE À LA CARTAN. On note (avec un décalage d'indice) $e^0, \dots, e^n$ la base canonique de $\mathbf{C}^{n+1}$ (ainsi $e^0 = (1, 0 \dots, 0)$, $e^1 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, etc). On a une décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$ avec

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi \in M_{n\times 1}(\mathbf{C}) \right\} \simeq \mathbf{C}^n$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in M_{n\times n}(\mathbf{C}) \\ a = -\mathrm{Tr}(A) \end{array} \right\} \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$$

$$\text{et} \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; v \in M_{1\times n}(\mathbf{C}) \right\} \simeq \mathbf{C}^n .$$

On pose également

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & A \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in M_{n\times n}(\mathbf{C}) \\ v \in M_{1\times n}(\mathbf{C}) \\ a = -\mathrm{Tr}(A) \end{array} \right\} \simeq \mathbf{C}^n \oplus \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) .$$

C'est l'algèbre de Lie du sous-groupe de Lie H de $G = SL_{n+1}(\mathbf{C})$ formé des éléments $g \in G$ laissant invariante la droite engendrée par e^0. Il en découle que le quotient G/H est l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$. Celui-ci est donc un espace homogène que l'on munit de la géométrie de Klein associée à la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Par définition, une *connexion de Cartan projective* sur une variété M est une connexion de Cartan sur M associée à une géométrie de Cartan modelée sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Soit ω une connexion de Cartan projective. En tenant compte de la graduation $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C}) = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, on peut écrire matriciellement

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_i \\ \omega^k & \omega_i^k \end{pmatrix}$$

où les 1-formes ω_0, ω^k, ω_i et ω_i^k (pour $i, k = 1, \dots, n$) vérifient $\omega_0 = -\sum_{i=1}^n \omega_i^i = 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega &= \begin{pmatrix} \Omega_0 & \Omega_i \\ \Omega^k & \Omega_i^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d\omega_0 + \omega_j \wedge \omega^j & d\omega_i + \omega_0 \wedge \omega_i + \omega_j \wedge \omega_i^j \\ d\omega^k + \omega^k \wedge \omega_0 + \omega_j^k \wedge \omega^j & d\omega_i^k + \omega^j \wedge \omega_j + \omega_i^j \wedge \omega_j^k \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Par définition, ω est sans torsion si la 2-forme $\rho(\Omega)$ à valeurs dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}_{-1}$ est identiquement nulle. Cela équivaut à ce que $\Omega^k = 0$ quel que soit $k = 1, \dots, n$.

Il découle des propriétés d'invariance d'une connexion projective ω définie sur l'espace total P d'un H-fibré principal au dessus de U que celle-ci est complètement déterminée par sa restriction à n'importe quelle sous-variété $V \subset P$ de dimension n transverse à la fibration $P \to U$. Cette remarque justifie l'astuce classique (due à Cartan) consistant à utiliser une *jauge*, à savoir une section (locale) σ du fibré principal P, pour ramener l'étude de ω sur P à celle de la *forme de soudure* ω_σ (associée à σ) sur U, qui est définie comme étant le tiré-en-arrière $\omega_\sigma = \sigma^*(\omega) \in \Omega^1_U \otimes \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$. On impose aussi à σ d'être telle que la 1-forme $\overline{\omega}_\sigma = \rho(\omega_\sigma) \in \Omega^1_U \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ induise un isomorphisme de $T_{U,u}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ quel que soit $u \in U$.

Si $\widehat{\sigma}$ est une autre jauge, il existe une application $h\colon U \to H$ telle que $\widehat{\sigma} = \sigma \cdot h$. Par hypothèse, on a $R_k^*(\omega) = \mathrm{Ad}(k^{-1}) \cdot \omega$ pour tout $k \in H$ (puisque ω est une connexion de Cartan). On en déduit la relation

$$\omega_{\widehat{\sigma}} = \mathrm{Ad}(h^{-1}) \cdot \omega_\sigma + h^*(\omega_H) \tag{3.15}$$

où l'on a noté ω_H la forme de Maurer-Cartan de H.

PROPOSITION 3.15. *Les coordonnées $x^1, \dots, x^n$ étant fixées sur U, il existe essentiellement un unique choix de jauge σ (que l'on dira être « la » jauge standard relativement aux x^i) telle que la forme de soudure associée soit de la forme*

$$\omega_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ dx^k & \omega_i^k \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Le terme « essentiellement » signifie ici que deux jauges standards σ_1 et σ_2 sont liées par une relation de la forme $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot (\zeta\, Id_{n+1})$ où ζ désigne un nombre complexe tel que $\zeta^{n+1} = 1$.

Notons $\omega_i^k = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^k\, dx^j$ les décompositions en composantes scalaires des coefficients ω_i^k de la matrice (3.16) d'une forme de soudure standard dans les coordonnées $x^1, \dots, x^n$. Ils vérifient $\sum_{i=1}^n \omega_{ij}^i = 0$ pour tout j. De (3.14) et (3.16) il vient que ω est sans torsion si et seulement si $\omega_{ij}^k = \omega_{ji}^k$ quels que soient $i, j, k = 1, \dots, n$.

On suppose désormais ω sans torsion dans tout ce qui suit.

Si $\overline{\sigma}$ désigne "la" jauge standard relativement à un autre système de coordonnées $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$ sur U, il existe une application $h\colon U \to H$ (essentiellement unique) telle que $\overline{\sigma} = \sigma \cdot h$, que l'on peut expliciter (cf. [13, §3.2]). Utilisant (3.15), on peut alors établir le

COROLLAIRE 3.16. *Pour $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$, la composante scalaire $\overline{\omega}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (dans les coordonnées $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$) du coefficient $\overline{\omega}^{\gamma}_{\alpha}$ de "la" forme de soudure standard $\omega_{\overline{\sigma}}$ s'obtient à partir des composantes scalaires ω^k_{ij} selon les formules de transformation* (3.8).

On déduit des résultats précédents que les composantes scalaires ω^k_{ij} des coefficients ω^k_i d'une forme de soudure standard d'une connexion de Cartan projective sans torsion peuvent être considérées comme des coefficients de Thomas. Vu la proposition 3.13, il en découle qu'à une connexion de Cartan projective sans torsion on peut associer de façon canonique une connexion projective au sens de la définition 3.6.

Tournons nous maintenant vers la question inverse: étant donnée une connexion projective au sens de la définition 3.6, peut-on lui associer une connexion de Cartan projective de façon canonique ?

La réponse est oui mais nécessite d'introduire la notion de connexion de Cartan projective *normale*, ce que nous allons faire maintenant en suivant [39] de près. Soit ω une connexion de Cartan projective sur un H-fibré principal $P \to M$ (on suppose toujours que ω est sans torsion). Alors sa courbure peut être vue comme un tenseur $\Omega\colon P \to \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{h}\right)$. Le passage au quotient $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_0$ induit un morphisme (de H-module)

$$\mu_1\colon \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{h}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{g}_0\right). \tag{3.17}$$

La représentation adjointe $\mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ induit un isomorphisme $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{h}/\mathfrak{g}_1 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ (cf. [39, Lemma 8.1.7] d'où on déduit un isomorphisme

$$\mu_2\colon \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{g}_0\right) \simeq \bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad}} \bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}). \tag{3.18}$$

On considère alors le morphisme

$$\mu_3\colon \bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \simeq \bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \longrightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$$

donné par

$$(A^* \wedge B^*) \otimes C^* \otimes \eta \longmapsto (B^*(\eta)A^* - A^*(\eta)B^*) \otimes C^* \tag{3.19}$$

et on définit le *sous-H-module normal* N de $\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{h}\right)$ comme étant

$$N = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{Hom}\left(\bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{h}\right) \xrightarrow{\mu_3\circ\mu_2\circ\mu_1} (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*\Big).$$

Conformément à la «philosophie» évoquée plus haut, on pose alors la

DÉFINITION 3.17. Une connexion de Cartan projective sans torsion ω est *normale* si sa courbure est à valeurs dans N.

Il n'est pas difficile d'expliciter en coordonnées cette notion de normalité. Tout d'abord, on a le

LEMME 3.18 ([30, Prop. 2]). *La matrice de courbure* (3.14) *admet une décomposition de la forme*

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^{n} K_{uv}\, \omega^u \wedge \omega^v \tag{3.20}$$

où les K_{uv} *sont des applications définies sur* P *et à valeurs dans* $\mathfrak{g}$, *antisymétriques en les indices* u *et* v.

REMARQUE 3.19. Ce résultat n'est pas spécifique aux connexions de Cartan projectives mais est vérifié par toute connexion de Cartan ω subordonnée à un espace généralisé modelé sur une paire $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}')$ lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ admet une décomposition en somme directe $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_k$ telle que $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_k$. Pour des indications concernant la preuve, voir [28, p. 137] ou bien [30, Prop. 2] pour le cas projectif.

D'après le lemme ci-dessus, on peut noter $\Omega_i^k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} K_{iuv}^k \omega^u \wedge \omega^v$ (pour $i, k = 1, \ldots, n$) la décomposition en composantes scalaires (antisymétriques en les indices inférieurs u et v) du coefficient Ω_i^k de la matrice de courbure (3.14). On vérifie alors le

LEMME 3.20. *La connexion de Cartan sans torsion* ω *est normale si et seulement si*

$$\Omega_0 = 0 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} K_{ikv}^k = 0 \quad \textit{pour tout} \;\; i, v = 1, \ldots, n.$$

Le lecteur intéressé pourra consulter [39, p. 336] où les calculs sont explicités.

On explique maintenant comment la notion de connexion projective telle qu'elle est définie dans la section 3.1 peut être interprétée comme une connexion de Cartan projective. Le groupe des transformations projectives de $\mathbf{P}^n$ qui laissent fixe un même point est isomorphe au sous-groupe $H(\mathbf{C}^n)$ de $D(\mathbf{C}^n, 0)$ formé par les applications inversibles de la forme

$$\left(x^1, \ldots, x^n\right) \longmapsto \left(\frac{\sum_{i=1}^n s_i^1\, x^i}{1 + \sum_{i=1}^n s_i\, x^i}, \ldots, \frac{\sum_{i=1}^n s_i^n\, x^i}{1 + \sum_{i=1}^n s_i\, x^i} \right).$$

On vérifie que la restriction de $[\cdot]_0^k \colon D(\mathbf{C}^n, 0) \to G_k(\mathbf{C}^n)$ à $H(\mathbf{C}^n)$ est injective si $k \geq 2$. On désigne par $H_k(\mathbf{C}^n)$ son image (qui est donc isomorphe à $H(\mathbf{C}^n)$) et on note $\mathfrak{h}_k(\mathbf{C}^n)$ l'algèbre de Lie associée.

On peut identifier les connexions affines symétriques sur M avec les G-structures du second ordre $B_G \subset R_2(M)$ où $G = GL_n(\mathbf{C}) = G_1(\mathbf{C}^n) < G_2(\mathbf{C}^n)$ (cf. [30]). On vérifie que deux connexions affines ∇ et ∇' sur M sont projectivement équivalentes si et seulement si les deux G-structures associées $B_G(\nabla)$ et $B_G(\nabla')$ vérifient

$$B_G(\nabla) \cdot H_2(\mathbf{C}^n) = B_G(\nabla') \cdot H_2(\mathbf{C}^n).$$

On montre ainsi (cf. [30, Prop. 10]) que sur la variété M, il existe une correspondance biunivoque entre les connexions projectives (au sens de la définition 3.6) et les $H_2(\mathbf{C}^n)$-structures du second ordre.

Fixons à partir de maintenant une connexion projective Π sur M. On note $B_\Pi \subset R_2(M)$ la $H_2(\mathbf{C}^n)$-structure associée. Soit ϖ la restriction de θ_2 à B_Π que l'on considère vu (3.12) comme un élément

$$\varpi \in \Omega^2\big(B_\Pi\big) \otimes \big(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0\big),$$

où l'on a procédé aux identifications naturelles $\mathfrak{g}_{-1} \simeq \mathbf{C}^n$ et $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$. Soit $\varpi = \varpi_{-1} + \varpi_0$ la décomposition de ϖ induite par l'identification $\mathfrak{Aff}(\mathbf{C}^n) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$. En utilisant les relations (3.10), (3.11) et (3.13) satisfaites par la seconde forme canonique, on peut alors montrer le

THÉORÈME 3.21 (É. Cartan [11]). *Il existe une unique* 1*-forme* $\varpi_1 \in \Omega^1(B_\Pi) \otimes \mathfrak{g}_1$ *telle que*

1. $\omega_\Pi := \varpi_{-1} + \varpi_0 + \varpi_1$ *constitue une connexion de Cartan projective sur le* H*-fibré principal* B_Π *;*
2. *la torsion* $\mathfrak{t}(\omega_\Pi)$ *de* ω_Π *est identiquement nulle ;*
3. ω_Π *est une connexion de Cartan projective normale.*

Démonstration. Reprenant la preuve du Theorem 4.2 de [28], on montre qu'il y a existence et unicité locale. L'unicité locale permet alors d'en déduire le théorème par recollement.

On peut résumer le contenu de cette sous-section par le

COROLLAIRE 3.22. *La notion de connexion projective introduite dans la définition* 3.6 *coïncide avec la notion de connexion de Cartan projective normale sans torsion.*

3.3 Critère de platitude

On rappelle ci-dessous la caractérisation des connexions projectives intégrables. Il s'agit d'un résultat classique qui remonte aux travaux [33, 41] de Lie et Tresse dans le cas plan. En dimension supérieure, la caractérisation des connexions projectives intégrables est due à Weyl [43] et à Cartan [11] (indépendamment).

3.3.1 Caractérisation des connexions de Cartan intégrables. La notion générale et abstraite de connexion de Cartan trouve l'une de ses justifications dans la simplicité et le caractère naturel du critère (très classique) qui caractérise l'intégrabilité de ces objets. En effet, cette caractérisation s'obtient facilement à partir des deux résultats d'existence et d'unicité suivants :

Lemme 3.23. *On suppose M connexe et simplement connexe. Soit $\varpi \in \Omega^1_M \otimes \mathfrak{g}$.*

1. *Il existe $f\colon M \to G$ holomorphe telle que $\varpi = f^*(\omega_G)$ si et seulement si $d\varpi + \frac{1}{2}[\varpi, \varpi] = 0$.*
2. *Soient $f, \widehat{f}\colon M \to G$ holomorphes. Il existe $g \in G$ tel que $\widehat{f} = g \cdot f$ si et seulement si $f^*(\omega_G) = \widehat{f}^*(\omega_G)$.*

Démonstration. Nous renvoyons à [23, § 1] ou encore à [39, Chap. 3].

En combinant les deux résultats précédents, on obtient immédiatement le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.24. *Une connexion de Cartan est intégrable si et seulement si sa courbure de Cartan est identiquement nulle.*

3.3.2 Intégrabilité d'une connexion projective. Nous allons expliciter la condition d'intégrabilité donnée par le théorème 3.24 dans le cas des connexions projectives. On note encore ω la connexion de Cartan projective normale sans torsion associée à une connexion projective Π sur M via le théorème 3.21.

Dans la section précédente, nous avons vu que dans un système de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$, la forme de connexion standard s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ dx^k & \omega_i^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{ij} dx^j \\ dx^k & \Pi_{ij}^k dx^j \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

où les Π^k_{ij} sont les coefficients de Thomas de Π. Puisque ω est normale et sans torsion, la courbure Ω de la forme de soudure standard a une forme particulière. Des lemmes 3.18 et 3.20, on déduit que l'on peut écrire (3.14) sous la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_i \\ 0 & \Omega^k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{iuv}\, dx^u \wedge dx^v \\ 0 & \Omega^k_{iuv}\, dx^u \wedge dx^v \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Nous allons exprimer les quantités scalaires ω_{ij}, Ω_{ijuv} et Ω^k_{ijuv} en termes des coefficients de Thomas de Π.

Quels que soient $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$, on définit

$$W^i_{jk\ell} = \Pi^i_{jk\ell} + \frac{1}{n-1}\Big(\delta^i_\ell\, \Pi_{jk} - \delta^i_k\, \Pi_{j\ell}\Big) \tag{3.23}$$

où l'on a posé (avec sommation sur m et s variant entre 1 et n)

$$\Pi^i_{jkl} = \frac{\partial \Pi^i_{j\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^\ell} + \Pi^m_{j\ell}\, \Pi^i_{mk} - \Pi^m_{jk}\, \Pi^i_{m\ell} \quad \text{et} \quad \Pi_{jk} = \Pi_{kj} = \Pi^m_{jmk} = \frac{\partial \Pi^m_{jk}}{\partial x^m} - \Pi^s_{jm}\, \Pi^m_{sk}\,.$$

On peut alors vérifier que (3.21) et (3.22) s'écrivent respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ dx^k & \omega^k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1-n}\Pi_{ij}\, dx^j \\ dx^k & \Pi^k_{ij}\, dx^j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \Omega_i \\ 0 & \Omega^k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1-n}\Pi_{iuv}\, dx^u \wedge dx^v \\ 0 & \frac{1}{2}\, W^k_{iuv}\, dx^u \wedge dx^v \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

où pour $i, u, v = 1, \dots, n$ les Π_{iuv} désignent les coefficients antisymétriques en les indices u et v, uniquement déterminés par les relations suivantes

$$d(\Pi_{ij}\, dx^j) + \Pi_{ku}\Pi^k_{iv}\, dx^u \wedge dx^v = \Pi_{iuv}\, dx^u \wedge dx^v\,.$$

Explicitement, on a (avec sommation sur m variant entre 1 et n):

$$\Pi_{iuv} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \Pi_{iu}}{\partial x^v} - \frac{\partial \Pi_{iv}}{\partial x^u} + \Pi^m_{iu}\Pi_{mv} - \Pi^m_{iv}\Pi_{mu}\Big)\,. \tag{3.25}$$

On en déduit que les quantités $W^i_{jk\ell}$ sont les composantes d'un tenseur de type (1,3) associé à Π de façon invariante. En effet, en utilisant (3.8) (ou bien (3.15)), on vérifie qu'elles satisfont les lois de transformation

$$\overline{W}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = W^i_{jkl} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^\delta}$$

quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, n$.

DÉFINITION 3.25. Le tenseur

$$\mathfrak{W}_\Pi \in T_U \otimes (\Omega^1_U)^{\otimes 3} \tag{3.26}$$

dont les composantes sont données par les formules (3.23) est le *tenseur de Weyl* de la connexion projective Π.

Dans la situation examinée, le théorème 3.24 s'énonce comme suit:

COROLLAIRE 3.26. *Une connexion projective* Π *est intégrable si et seulement si sa courbure* (3.22) *est identiquement nulle.*

On montre que les composantes W^i_{jkl} du tenseur de Weyl $\mathfrak{W}_\Pi$ vérifient les «identités de Bianchi-Cartan» $W^i_{jkl} + W^i_{klj} + W^i_{ljk} = 0$ quels que soient i, j, k, l compris entre 1 et n. Cela implique en particulier que le tenseur de Weyl d'une connexion projective est toujours identiquement nul en dimension $n = 2$. A contrario, lorsque $n > 2$, on peut montrer que les Π_{iuv} sont identiquement nuls si tous les $W^i_{jk\ell}$ le sont. On a donc le

COROLLAIRE 3.27. *En dimension* $n > 2$, *une connexion projective* Π *est intégrable si et seulement si son tenseur de Weyl* $\mathfrak{W}_\Pi$ *est identiquement nul.*

Lorsque $n = 2$, on déduit de l'annulation du tenseur de Weyl $\mathfrak{W}_\Pi$ que les quantités Π_{iuv} satisfont aux lois de transformation

$$\overline{\Pi}_{\overline{\imath}\,\overline{u}\,\overline{v}} = \Pi_{iuv} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^{\overline{\imath}}} \frac{\partial x^u}{\partial \overline{x}^{\overline{u}}} \frac{\partial x^v}{\partial \overline{x}^{\overline{v}}}$$

quels que soient $\overline{\imath}, \overline{u}, \overline{v} = 1, \ldots, n$. Elles sont donc les composantes d'un *tenseur de courbure* 3 fois covariant

$$\mathfrak{P}_\Pi \in (\Omega^1_U)^{\otimes 3}$$

attaché à Π de façon invariante. On a alors le

COROLLAIRE 3.28. *En dimension* $n = 2$, *une connexion projective* Π *est intégrable si et seulement si son tenseur de courbure* $\mathfrak{P}_\Pi$ *est identiquement nul.*

3.4 SOUS-VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES

Nous allons maintenant faire le lien entre la théorie des connexions projectives et celle des systèmes différentiels du second ordre qui sont sous une certaine forme normale bien spécifique. Commençons par rappeler ce qu'est une sous-variété totalement géodésique.

DÉFINITION 3.29. Une sous-variété $V \subset U$ est *totalement géodésique* pour une connexion affine ∇ si pour tout $v \in V$ et pour toute direction tangente $L \in \mathbf{P}(T_{V,v})$, le germe en v de la courbe géodésique issue de L est inclus dans V.

EXEMPLE 3.30. Les sous-espaces affines (de n'importe quelle dimension) sont des sous-variétés totalement géodésiques pour la connexion affine sur $\mathbf{C}^n$ dont les symboles de Christoffel sont identiquement nuls.

3.4.1 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DES SOUS-VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES. On fixe un entier m compris entre 1 et $n-1$. Soit aussi $Z\colon t = (t^1, \dots, t^m) \mapsto Z(t) = (Z^1(t), \dots, Z^n(t))$ un germe d'application de rang m qui paramétrise un germe de sous-variété $V^m \subset U$ de dimension m. Une traduction immédiate de la définition 3.29 ci-dessus donne que V^m est totalement géodésique si et seulement si, pour tout $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^m)$ dans le domaine de définition de Z et pour tout $\tau = (\tau^1, \dots, \tau^m) \in \mathbf{C}^m$ non nul, il existe $\psi\colon (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}^m, t_0)$ holomorphe avec $\psi'(0) = \tau$ et telle que le germe d'application $Z \circ \psi$ paramétrise une courbe géodésique. La proposition 3.4 combinée avec un simple calcul formel à l'ordre 2 nous donne alors la

PROPOSITION 3.31. *L'application Z paramétrise une sous-variété V^m totalement géodésique pour ∇ si et seulement si il existe des fonctions scalaires $C^\ell\colon t \mapsto C^\ell(t) \in \mathbf{C}$ pour $\ell = 1, \dots, n$, telles qu'on ait identiquement*

$$\frac{\partial^2 Z^k}{\partial t^a \partial t^b} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial Z^i}{\partial t^a} \frac{\partial Z^j}{\partial t^b} = \sum_{\ell=1}^{m} C^\ell \frac{\partial Z^k}{\partial t^\ell} \qquad (k = 1, \dots, n) \tag{3.27}$$

sur U, cela quels que soient les indices a, b compris entre 1 et m.

Une sous-variété générique V^m de dimension m vérifie la *condition de transversalité*

($\mathcal{T}$) *V^m est transverse à la projection $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$.*

Celle-ci est vérifiée si et seulement si V^m peut être définie (localement) comme le graphe d'une application $t = (t^1, \dots, t^m) \mapsto (Z^{m+1}(t), \dots, Z^n(t))$ de rang m. On suppose que V^m vérifie ($\mathcal{T}$) dans ce qui suit. Sous cette hypothèse, on peut reformuler la proposition 3.31 pour obtenir la

PROPOSITION 3.32. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la sous-variété V^m est totalement géodésique pour la connexion affine ∇ ;*
2. *il existe une paramétrisation $t=(t^1,\dots,t^m)\mapsto\big(t^1,\dots,t^m,Z^{m+1}(t),\dots,Z^n(t)\big)$ de V^m qui satisfait le système différentiel suivant (avec $k=m+1,\dots,n$ et $a,b=1,\dots,m$ tels que $a\leq b$) :*

$$(\mathcal{S}^m_\nabla):\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 Z^k}{\partial t^a\partial t^b}&=\sum_{c=1}^{m}\sum_{i,j=m+1}^{n}\frac{\partial Z^i}{\partial t^a}\frac{\partial Z^j}{\partial t^b}\frac{\partial Z^k}{\partial t^c}\Gamma^c_{ij}\\&+\sum_{c=1}^{m}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial Z^k}{\partial t^c}\left(\frac{\partial Z^i}{\partial t^a}\Gamma^c_{ib}+\frac{\partial Z^i}{\partial t^b}\Gamma^c_{ai}\right)-\sum_{i,j=m+1}^{n}\frac{\partial Z^i}{\partial t^a}\frac{\partial Z^j}{\partial t^b}\Gamma^k_{ij}\\&+\sum_{c=1}^{m}\frac{\partial Z^k}{\partial t^c}\Gamma^c_{ab}-\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial Z^i}{\partial t^a}\Gamma^k_{ib}-\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial Z^i}{\partial t^b}\Gamma^k_{ai}-\Gamma^k_{ab}\,;\end{aligned}\right.$$

3. *toute paramétrisation $t\mapsto\big(t^1,\dots,t^m,Z^{m+1}(t),\dots,Z^n(t)\big)$ de V^m satisfait $(\mathcal{S}^m_\nabla)$.*

Pour une démonstration de cette proposition via la méthode du repère mobile, on peut consulter [26, § 40-41].

REMARQUE 3.33. Le système $(\mathcal{S}^1_\nabla)$ n'est rien d'autre que le système (3.4) de la proposition 3.3 caractérisant les courbes géodésiques pour ∇. Il est complètement intégrable pour une raison évidente. Par contre, aucun des systèmes $(\mathcal{S}^m_\nabla)$ pour $m>1$ n'est complètement intégrable a priori. On peut montrer (cf. [26, 44]) que si l'un d'eux l'est, alors ∇ est *projectivement plate*, i.e. $[\nabla]$ est intégrable (et donc les systèmes différentiels $(\mathcal{S}^m_\nabla)$ sont tous complètement intégrables).

La proposition ci-dessus montre que, étant donné un système de coordonnées $x^1,\dots,x^n$ sur U, à toute connexion affine ∇ on peut associer la série $(\mathcal{S}^m_\nabla)$ de systèmes différentiels du second ordre dont les solutions paramétrisent des sous-variétés totalement géodésiques pour ∇. Il découle immédiatement des définitions 3.4 et 3.29 que deux connexions affines sont projectivement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes sous-variétés totalement géodésiques. On peut donc poser la

DÉFINITION 3.34. Une sous-variété V est *totalement géodésique pour une connexion projective* Π si V l'est pour une (et alors pour toute) connexion affine qui représente Π localement.

Cette définition étant posée et justifiée, on peut formuler une version projective de la proposition 3.32 (et qui s'en déduit de façon immédiate). Notons Π_{ij}^k les coefficients de Thomas d'une connexion projective Π sur U relativement à un système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$. Soit V^m une sous-variété de U de dimension $m < n$ vérifiant la condition de transversalité $(\mathcal{T})$.

PROPOSITION 3.35. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la sous-variété V^m est totalement géodésique pour la connexion projective Π ;*
2. *il existe une paramétrisation $t=(t^1, \dots, t^m) \mapsto \big(t^1, \dots, t^m, Z^{m+1}(t), \dots, Z^n(t)\big)$ de V^m qui satisfait le système différentiel suivant (avec $k = m+1, \dots, n$ et $a, b = 1, \dots, m$ tels que $a \leq b$) :*

$$(\mathcal{S}_\Pi^m) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z^k}{\partial t^a \partial t^b} = \displaystyle\sum_{c=1}^{m} \sum_{i,j=m+1}^{n} \frac{\partial Z^i}{\partial t^a} \frac{\partial Z^j}{\partial t^b} \frac{\partial Z^k}{\partial t^c} \Pi_{ij}^c \\ \qquad + \displaystyle\sum_{c=1}^{m} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial Z^k}{\partial t^c} \left(\frac{\partial Z^i}{\partial t^a} \Pi_{ib}^c + \frac{\partial Z^i}{\partial t^b} \Pi_{ai}^c \right) - \sum_{i,j=m+1}^{n} \frac{\partial Z^i}{\partial t^a} \frac{\partial Z^j}{\partial t^b} \Pi_{ij}^k \\ \qquad + \displaystyle\sum_{c=1}^{m} \frac{\partial Z^k}{\partial t^c} \Pi_{ab}^c - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial Z^i}{\partial t^a} \Pi_{ib}^k - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial Z^i}{\partial t^b} \Pi_{ai}^k - \Pi_{ab}^k \, ; \end{cases}$$

3. *toute paramétrisation $t \mapsto \big(t^1, \dots, t^m, Z^{m+1}(t), \dots, Z^n(t)\big)$ de V^m satisfait $(\mathcal{S}_\Pi^m)$.*

REMARQUE 3.36. En dimension $n = 2$, il n'y a qu'un seul système $(\mathcal{S}_\Pi^m)$ associé à une connexion projective Π. C'est le système $(\mathcal{S}_\Pi^1)$ qui se réduit en fait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = A\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^3 + B\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 + C\frac{dy}{dt} + D \tag{3.28}$$

où A, B, C et D s'expriment en fonction des coefficients de Thomas de Π via les relations

$$A = \Pi_{22}^1 \, , \quad B = 2\Pi_{12}^1 - \Pi_{22}^2 \, , \quad C = \Pi_{11}^1 - 2\Pi_{12}^2 \quad \text{et} \quad D = -\Pi_{11}^2 \, . \tag{3.29}$$

En combinant (3.29) avec les relations $\Pi_{ij}^k = \Pi_{ji}^k$ et $\Pi_{1j}^1 + \Pi_{2j}^2 = 0$, on peut exprimer les Π_{ij}^k en fonction de A, B, C et D. On en déduit des formules explicites exprimant Π_{112} et Π_{212} (définis en (3.25)) en fonction de A, B, C, D et de leurs dérivées partielles d'ordre 1 et 2. D'après le corollaire 3.28, Π est intégrable si et seulement si $\Pi_{112} = \Pi_{212} = 0$. Lorsqu'on exprime ces deux conditions en termes de A, B, C, D et de leurs dérivées partielles, on retrouve le critère de Lie et Tresse caractérisant les équations (3.28) équivalentes, par un changement de coordonnées ponctuelles, à l'équation plate $d^2\bar{y}/d\bar{t}^2 = 0$.

3.4.2 RESTRICTION D'UNE CONNEXION PROJECTIVE. On commence par rappeler deux faits élémentaires. Soit V une sous-variété de M que l'on suppose munie de deux connexions affines ∇ et $\overline{\nabla}$. Alors :

(1) si V est totalement géodésique pour ∇, celle-ci induit de façon naturelle une connexion affine $\nabla|_V$ sur V (par restriction) ;

(2) si V est totalement géodésique pour ∇ et pour $\overline{\nabla}$, les connexions affines induites $\nabla|_V$ et $\overline{\nabla}|_V$ sont projectivement équivalentes (en tant que connexions affines sur V) si ∇ et $\overline{\nabla}$ le sont.

On peut donc poser la

DÉFINITION 3.37. Soit V une sous-variété totalement géodésique pour une connexion projective Π sur M. Par restriction, Π induit une connexion projective sur V bien définie, que l'on note $\Pi|_V$.

On vérifie alors sans difficulté que l'opération de restriction d'une connexion projective le long d'une sous-variété totalement géodésique satisfait les propriétés énoncées par le

LEMME 3.38. *Soient V et V' deux sous-variétés totalement géodésiques pour une connexion projective Π sur M. Alors*

1. *la connexion projective induite $\Pi|_V$ est intégrable si Π l'est;*
2. *sous l'hypothèse que l'intersection $V \cap V'$ est lisse, celle-ci est encore une sous-variété totalement géodésique pour Π. De plus $\big(\Pi|_V\big)|_{V'} = \big(\Pi|_{V'}\big)|_V = \Pi|_{V\cap V'}$.*

Bien qu'élémentaire, ce lemme est particulièrement utile pour prouver la proposition 4.3. Celle-ci est cruciale pour établir le théorème 2.1 qui est notre résultat principal.

4. CRITÈRE DE LINÉARISABILITÉ D'UN TISSU EN HYPERSURFACES

Nous abordons maintenant la question centrale examinée dans cet article : celle de donner un critère analytique caractérisant les tissus linéarisables.

4.1 LINÉARISABILITÉ DES $(n+2)$-TISSUS EN DIMENSION n

Dans cette section, on fixe et on note $W = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^d)$ un d-tissu de codimension 1 sur U. Pour tout $i = 1, \dots, d$, l'on désigne par Ω^i une 1-forme différentielle sur U qui définit $\mathcal{F}^i$.

DÉFINITION 4.1. Une connexion projective Π est *compatible avec le tissu* W (ou encore, que Π est *admissible par* W) si les feuilles des feuilletages qui constituent W sont des hypersurfaces totalement géodésiques pour Π.

EXEMPLE 4.2. La connexion projective plate est compatible avec n'importe quel tissu linéaire.

PROPOSITION 4.3. *Il existe une unique connexion projective compatible avec un* $(n+2)$*-tissu donné.*

Démonstration. L'assertion que l'on veut démontrer étant de nature invariante, on ne perd pas en généralité en supposant que n des feuilletages de W sont normalisés. On fixe donc un système de coordonnées $x^1, \dots, x^n$ sur U dans lesquelles on a

$$\Omega^m = \begin{cases} dx^m - dx^n & \text{pour} \quad m = 1, \dots, n-1\,, \\ dx^n & \text{pour} \quad m = n\,, \\ \sum_{a=1}^{n-1} \Omega^m_a \, dx^a - dx^n & \text{pour} \quad m = n+1, n+2\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ces normalisations impliquent que pour $m = 1, \dots, n+2$, une feuille de $\mathcal{F}^m$ satisfait la condition $(\mathcal{T})$ de la section 3.4 et donc est paramétrisée par une application $\mathcal{Z}^m \colon t = (t^1, \dots, t^{n-1}) \mapsto (t, Z^m(t))$ où Z^m vérifie

$$\frac{\partial Z^m}{\partial t^a} = \begin{cases} \delta^m_a & \text{pour} \quad m = 1, \dots, n\,, \\ \Omega^m_a\big(t, \mathcal{Z}^m(t)\big) & \text{pour} \quad m = n+1, n+2\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

quel que soit a compris entre 1 et $n-1$.

La prolongation différentielle au second ordre des équations (4.2) est immédiate. On obtient

$$\frac{\partial^2 Z^m}{\partial t^a \partial t^b} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m = 1, \dots, n\,, \\ X^m_a\big(\Omega^m_b\big) & \text{si} \quad m = n+1, n+2\,, \end{cases} \tag{4.3}$$

pour tous a, b tels que $1 \le a \le b < n$, où l'on a posé $X^m_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + \Omega^m_a \frac{\partial}{\partial x^n}$ quel que soit m.

Soit Π^k_{ij} les coefficients de Thomas (dans les coordonnées $x^1, \dots, x^n$) d'une connexion projective Π sur U. Notons

$$S(\Pi)_{ab} : \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^a \partial t^b} = \frac{\partial Z}{\partial t^a}\frac{\partial Z}{\partial t^b} \sum_{c=1}^{n-1} A^c \frac{\partial Z}{\partial t^c} + \sum_{c=1}^{n-1} \left(\frac{\partial Z}{\partial t^a} B^c_b + \frac{\partial Z}{\partial t^b} B^c_a \right) \frac{\partial Z}{\partial t^c} + \sum_{c=1}^{n-1} C^c_{ab} \frac{\partial Z}{\partial t^c} + D_{ab}$$

les équations différentielles scalaires du second ordre (pour a, b tels que $1 \le a \le b \le n-1$) qui constituent le système $S(\Pi) = (S^{n-1}_\Pi)$ des

hypersurfaces totalement géodésiques pour Π. La proposition 3.35 nous dit que Π est admissible par W si et seulement si les fonctions $Z_1, \dots, Z_{n+2}$ satisfont $S(\Pi)$. En d'autres termes : la proposition est démontrée si l'on établit l'existence et l'unicité de coefficients A^c, B^c_a, C^c_{ab} et D_{ab} holomorphes sur U (pour $a, b, c = 1, \dots, n-1$), symétriques en les indices a et b, tels que Z_m soit solution de toutes les équations $S(\Pi)_{ab}$, cela quel que soit $m \in \{1, \dots, n+2\}$. Vu (4.2) et (4.3), cela équivaut à ce que soient vérifiées les relations

$$0 = \delta^m_a \delta^m_b \sum_{c=1}^{n-1} A^c \delta^m_c + \sum_{c=1}^{n-1} \left(\delta^m_a B^c_b + \delta^m_b B^c_a\right) \delta^m_c + \sum_{c=1}^{n-1} C^c_{ab} \delta^m_c + D_{ab} \tag{4.4}$$

et

$$X^\ell_a(\Omega^\ell_b) = \Omega^\ell_a \Omega^\ell_b \sum_{c=1}^{n-1} A^c \Omega^\ell_c + \sum_{c=1}^{n-1} \left(\Omega^\ell_a B^c_b + \Omega^\ell_b B^c_a\right) \Omega^\ell_c + \sum_{c=1}^{n-1} C^c_{ab} \Omega^\ell_c + D_{ab}$$

pour $m = 1, \dots, n$, $\ell \in \{n+1, n+2\}$ et a, b tels que $1 \leq a \leq b \leq n-1$.

Un simple décompte permet de voir que les relations (4.4) induisent $n(n-1)(n+2)/2$ équations linéaires non-homogènes en les coefficients A^c, B^c_a, C^c_{ab} et D_{ab}. Or ceux-ci sont également au nombre de $n(n-1)(n+2)/2$ (en prenant en compte leurs symétries par rapport aux indices a et b). Une conséquence immédiate est qu'il suffit de montrer l'unicité des tels coefficients : l'existence sera alors assurée par un simple fait d'algèbre linéaire. Mieux encore, il suffit de montrer que seuls les coefficients nuls satisfont (4.4) lorsqu'on suppose que les membres de gauche $X^\ell_a(\Omega^\ell_b)$ de ces équations sont identiquement nuls pour $\ell = n+1$ et $\ell = n+2$.

On suppose donc que les coefficients A^c, B^c_a, C^c_{ab} et D_{ab} vérifient (pour $m = 1, \dots, n$ et $\ell = n+1, n+2$)

$$0 = \delta^m_a \delta^m_b \sum_{c=1}^{n-1} A^c \delta^m_c + \sum_{c=1}^{n-1} \left(\delta^m_a B^c_b + \delta^m_b B^c_a\right) \delta^m_c + \sum_{c=1}^{n-1} C^c_{ab} \delta^m_c + D_{ab} \tag{4.5}$$

$$\text{et} \qquad 0 = \Omega^\ell_a \Omega^\ell_b \sum_{c=1}^{n-1} A^c \Omega^\ell_c + \sum_{c=1}^{n-1} \left(\Omega^\ell_a B^c_b + \Omega^\ell_b B^c_a\right) \Omega^\ell_c + \sum_{c=1}^{n-1} C^c_{ab} \Omega^\ell_c + D_{ab}\,.$$

Montrons alors qu'on a forcément $A^c = B^c_a = C^c_{ab} = D_{ab} = 0$ quels que soient a, b, c entre 1 et $n-1$ avec a plus petit que b. Pour ce faire nous raisonnerons par récurrence sur la dimension n de l'espace ambiant.

Le cas $n = 2$ est facile : la question se ramène à celle de la non-annulation d'un certain déterminant de Vandermonde. C'est un cas classique traité dans [2, § 29], référence à laquelle nous renvoyons le lecteur.

Le cas suivant $n = 3$ peut aussi être traité par un calcul direct que l'on va détailler par souci de complétude et surtout parce qu'il est important pour la suite. On peut écrire les équations (4.5) sous la forme matricielle

$$M_W S = 0\,, \tag{4.6}$$

où

$$^tS = \left(A^1, A^2, B^1_1, B^2_1, B^1_2, B^2_2, C^1_{11}, C^1_{12}, C^1_{22}, C^2_{11}, C^2_{12}, C^2_{22}, D_{11}, D_{12}, D_{22}\right)$$

et où M_W est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(\Omega^4_1)^3 & (\Omega^4_1)^2\,\Omega^4_2 & 2(\Omega^4_1)^2 & 2\Omega^4_1\,\Omega^4_2 & 0 & 0 & \Omega^4_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^1_2 & 1 & 0 & 0 \\
(\Omega^4_1)^2\,(\Omega^4_2) & \Omega^4_1\,(\Omega^4_2)^2 & \Omega^4_1\,\Omega^4_2 & (\Omega^4_2)^2 & (\Omega^4_1)^2 & \Omega^4_1\,\Omega^4_2 & 0 & \Omega^4_1 & 0 & 0 & \Omega^4_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\Omega^4_1\,(\Omega^4_2)^2 & (\Omega^4_2)^3 & 0 & 0 & 2\Omega^4_1\,\Omega^4_2 & 2(\Omega^4_2)^2 & 0 & 0 & \Omega^4_1 & 0 & 0 & \Omega^4_2 & 0 & 0 & 1 \\
(\Omega^5_1)^3 & (\Omega^5_1)^2\,\Omega^5_2 & 2(\Omega^5_1)^2 & 2\Omega^5_1\,\Omega^5_2 & 0 & 0 & \Omega^5_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^5_2 & 1 & 0 & 0 \\
(\Omega^5_1)^2\,(\Omega^5_2) & \Omega^5_1\,(\Omega^5_2)^2 & \Omega^5_1\,\Omega^5_2 & (\Omega^5_2)^2 & (\Omega^5_1)^2 & \Omega^5_1\,\Omega^5_2 & 0 & \Omega^5_1 & 0 & 0 & \Omega^5_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\Omega^5_1\,(\Omega^5_2)^2 & (\Omega^5_2)^3 & 0 & 0 & 2\Omega^5_1\,\Omega^5_2 & 2(\Omega^5_2)^2 & 0 & 0 & \Omega^5_1 & 0 & 0 & \Omega^5_2 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Par un calcul direct, on montre que

$$\det\left(M_W\right) = 4 \prod_{i<j<k} \left(\frac{\Omega^i \wedge \Omega^j \wedge \Omega^k}{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3} \right). \tag{4.7}$$

L'hypothèse de position générale satisfaite par les feuilletages de W se traduit par le fait que le terme de droite de l'égalité (4.7) est un élément de $\mathcal{O}_U$ inversible. Par conséquent $M_W \in GL_{15}(\mathcal{O}_U)$ et donc (4.6) n'admet que la solution triviale comme solution. Cela démontre la proposition dans le cas $n = 3$.

Considérons maintenant le cas général $n > 3$ que l'on va traiter en se ramenant au cas $n = 3$ par tranchage. Fixons α et β tels que $1 \leq \alpha < \beta < n$ et notons $V_{\alpha\beta}$ l'intersection de feuilles des feuilletages $\mathcal{F}^i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{\alpha, \beta\}$. C'est l'intersection d'un 3-plan affine avec U, sur laquelle x^α, x^β et x^n induisent un système de coordonnées affines.

L'hypothèse de position générale satisfaite par les feuilletages de W permet de considérer la trace $W_{\alpha\beta} = W|_{V_{\alpha\beta}}$ de W sur $V_{\alpha\beta}$: c'est le 5-tissu induit par les 1-formes différentielles

$$\Omega^s|_{V_{\alpha\beta}} = \begin{cases} dx^\alpha \qquad\qquad - dx^n & \text{si } s = \alpha\,, \\ \qquad\qquad dx^\beta - dx^n & \text{si } s = \beta\,, \\ \qquad\qquad\qquad dx^n & \text{si } s = n\,, \\ \Omega^s_\alpha\, dx^\alpha + \Omega^s_\beta\, dx^\beta - dx^n & \text{si } s \in \{n+1, n+2\}\,. \end{cases}$$

Puisque c'est une intersection d'hypersurfaces totalement géodésiques, la sous-variété $V_{\alpha\beta}$ est totalement géodésique pour Π (d'après le lemme 3.38). On peut donc considérer la restriction $\Pi_{\alpha\beta} = \Pi|_{V_{\alpha\beta}}$ de Π à $V_{\alpha\beta}$. Clairement, $\Pi_{\alpha\beta}$ est admissible par $W_{\alpha\beta}$ et par voie de conséquence, quelles que soient les constantes $\tau^1, \ldots, \tau^{n-1}$, les applications

$$(t^\alpha, t^\beta) \longmapsto Z_p\big(\tau^1, \ldots, \tau^{\alpha-1}, t^\alpha, \tau^{\alpha+1}, \ldots, \tau^{\beta-1}, t^\beta, \tau^{\beta+1}, \ldots, \tau^{n-1}\big)$$

(pour $p \in \{\alpha, \beta, n, n+1, n+2\}$) vérifient le système formé par les restrictions à $V_{\alpha\beta}$ des équations (4.5). On vérifie immédiatement que celui-ci n'est rien d'autre que le système (4.5) associé à la connexion projective $\Pi_{\alpha\beta}$. On se trouve donc ramené au cas $n = 3$ que l'on a pu traiter de manière directe. On montre ainsi que $A^\gamma = B^\gamma_\delta = C^\gamma_{\delta\epsilon} = D_{\delta\epsilon} = 0$ pour tout $\gamma, \delta, \epsilon \in \{\alpha, \beta\}$. Cela étant valable quels que soient α et β, il en découle que (4.5) n'admet que la solution triviale. On en déduit la proposition.

Soit W un $(n+2)$-tissu. Notons Π_W la connexion projective admissible par W. Si φ désigne un (germe de) biholomorphisme, il est immédiat que $\varphi^*(\Pi_W)$ est admissible par $\varphi^*(W)$. Par unicité, il en découle que

$$\varphi^*(\Pi_W) = \Pi_{\varphi^*(W)}\,.$$

En d'autres termes : Π_W est canoniquement attachée à W.

DÉFINITION 4.4. La connexion projective Π_W est la *connexion projective canonique* du tissu W. La *courbure de Cartan* de W notée $\mathfrak{C}_W$ est la courbure $d\omega_W + \omega_W \wedge \omega_W \in \Omega^2_M \otimes \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$ de la connexion projective normale ω_W associée à Π_W.

De la proposition 4.3, il vient que $\mathfrak{C}_W$ est attachée à W de façon invariante : on a

$$\varphi^*(\mathfrak{C}_W) = \mathfrak{C}_{\varphi^*(W)}$$

pour tout (germe de) biholomorphisme φ.

Vu l'exemple 4.2, la connexion projective canonique d'un $(n+2)$-tissu linéaire est la connexion projective plate. Comme conséquence, il vient que Π_W est intégrable si W est linéarisable. La réciproque est tout aussi immédiate. On a donc le

THÉORÈME 4.5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *le $(n+2)$-tissu W est linéarisable ;*
2. *la connexion projective Π_W est intégrable ;*
3. *la courbure de Cartan $\mathfrak{C}_W$ est identiquement nulle ;*
4. *le tenseur de Weyl $\mathfrak{W}_{\Pi_W}$ est identiquement nul (lorsque $n > 2$) ;*
5. *le tenseur de courbure $\mathfrak{P}_{\Pi_W}$ est identiquement nul (lorsque $n = 2$).*

4.2 LINÉARISABILITÉ DES d-TISSUS EN DIMENSION n

Il est facile d'adapter les résultats de la section précédente au cas des tissus de codimension 1 formés de plus de $n+2$ feuilletages. On fixe $d \geq n+2$ dans ce qui suit ainsi qu'un d-tissu en hypersurfaces $W_d = (\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^d)$ sur U. Pour ℓ compris entre $n+2$ et d, on pose

$$W(\ell) = (\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^{n+1}, \mathcal{F}^\ell).$$

Chacun des $W(\ell)$ est un $(n+2)$-tissu sur U. On note $\Pi(\ell)$ sa connexion projective canonique. Il est clair que W est linéarisable si et seulement si il existe une connexion projective intégrable admissible par W et donc par tous les $W(\ell)$. On en déduit le

COROLLAIRE 4.6. *Le d-tissu W_d est linéarisable si et seulement si*

(1) *la connexion projective $\Pi(n+2)$ est plate ; et*

(2) *les connexions projectives $\Pi(n+2), \ldots, \Pi(d)$ coïncident.*

Il n'est pas difficile d'exprimer la condition (2) de ce corollaire en termes d'invariants différentiels scalaires. Pour tous $i,j,k = 1, \ldots, n$ et quel que soit ℓ compris entre $n+2$ et d, notons $\Pi(\ell)^k_{ij}$ (resp. $\overline{\Pi}(\ell)^k_{ij}$) les coefficients de Thomas de la connexion projective $\Pi(\ell)$ relativement à un système de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ (resp. $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n$) sur U. Quel que soit ℓ strictement plus grand que $n+2$ et pour tous $i,j,k = 1, \ldots, n$, posons

$$\Sigma(\ell)^k_{ij} = \Pi(\ell)^k_{ij} - \Pi(n+2)^k_{ij} \qquad \text{et} \qquad \overline{\Sigma}(\ell)^k_{ij} = \overline{\Pi}(\ell)^k_{ij} - \overline{\Pi}(n+2)^k_{ij}.$$

En utilisant (3.8), on établit que les quantités $\Sigma(\ell)_{ij}^k$ et $\overline{\Sigma}(\ell)_{ij}^k$ s'expriment les unes en fonction des autres via les formules de transformation

$$\overline{\Sigma}(\ell)_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Sigma(\ell)_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial \overline{x}^\gamma}{\partial x^k} .$$

En d'autres termes, les quantités $\Sigma(\ell)_{ij}^k$ sont les composantes (dans les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$) d'un tenseur

$$\Sigma(\ell) \in T_U \otimes \mathrm{Sym}^2(\Omega_U^1)$$

canoniquement associé à la paire $(W(n+2), \mathcal{F}^\ell)$. Par définition, $\Sigma(\ell)$ est identiquement nul si et seulement si les connexions projectives $\Pi(n+2)$ et $\Pi(\ell)$ coïncident. On peut alors reformuler le corollaire 4.6 en des termes purement invariants :

COROLLAIRE 4.7. *Le d-tissu W_d est linéarisable si et seulement si*

(1) *la courbure de Cartan $\mathfrak{C}_{W(n+2)}$ est identiquement nulle ; et*

(2) *les tenseurs $\Sigma(n+2), \ldots, \Sigma(d)$ sont tous identiquement nuls.*

On en déduit une généralisation en dimension n arbitraire d'un résultat classique de [2, § 29] :

COROLLAIRE 4.8. *Soit $d \geq n+2$. Modulo les transformations projectives, un d-tissu en hypersurfaces dans un espace de dimension n admet au plus une linéarisation.*

Démonstration. Il faut (et il suffit de) montrer que si W_d et $\varphi^*(W_d)$ sont des tissus linéaires, alors φ est la restriction d'une transformation projective. Par hypothèse, la connexion projective plate est admissible par W_d et par $\varphi^*(W_d)$. Chacun d'eux admettant au plus une connexion admissible, on en déduit que φ laisse invariante la structure projective canonique de $\mathbf{P}^n$. En termes plus élémentaires : φ transforme les droites projectives en droites projectives. Il est classique qu'un tel biholomorphisme n'est rien d'autre que la restriction d'une transformation projective, d'où le corollaire.

REMARQUE 4.9. L'énoncé du corollaire précédent n'est pas valide lorsque $d = n+1$. En effet, soit C une courbe algébrique dans $\mathbf{P}^n$, irréductible, non-dégénérée et de degré $n+1$. On sait qu'alors son genre arithmétique vérifie $p_a(C) \leq 1$. Supposons qu'il y ait égalité (de telles courbes existent quel que soit n ; C est alors dite « de Castelnuovo »). Via la dualité projective,

il est classique d'associer à C un $(n+1)$-tissu linéaire W_C «algébrique» de codimension 1 défini sur un ouvert de Zariski de l'espace projectif dual $\check{\mathbf{P}}^n$. Par le théorème d'addition d'Abel, la trace (par rapport à la série linéaire hyperplane) de «la» 1-forme régulière non-nulle sur C est identiquement nulle. On en déduit que le rang de W_C est 1, c'est-à-dire que l'on peut trouver des intégrales premières (locales) $u_1, \ldots, u_{n+1}$ des feuilletages qui composent W_C (localement) telles que $u_1 + \cdots + u_{n+1} \equiv 0$. On vérifie alors que l'application $U = (u_1, \ldots, u_n)$ transforme W_C en «le» $(n+1)$-tissu parallélisable W_0, c'est-à-dire le tissu formé des pinceaux d'hyperplans parallèles $\{x^i = cst.\}$ (pour $i = 1, \ldots, n$) et $\{x^1 + \cdots + x^n = cst.\}$. En utilisant le théorème d'Abel et sa réciproque, on montre ainsi qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'espace des linéarisations locales de W_0 modulo composition à gauche par une transformation projective et l'espace des courbes algébriques irréductibles de $\mathbf{P}^n$, non dégénérées, de degré $n+1$ et de genre arithmétique 1. Comme conséquence directe vient que W_0 admet un nombre infini (une famille continue en fait) de linéarisations projectivement indépendantes.

Dans le cas des tissus plans ($n = 2$), Gronwall a conjecturé en 1912 qu'un 3-tissu admet au plus une classe d'équivalence projective de linéarisations lorsqu'il n'est pas parallélisable. Si l'on sait maintenant que ce nombre de classes de linéarisations est fini (voir [7, 42, 40, 24, 19]), la «Conjecture de Gronwall» n'est toujours pas démontrée à ce jour. On peut la généraliser à la dimension $n > 1$ arbitraire : un $(n+1)$-tissu en hypersurfaces non-parallélisable admet-il au plus une classe d'équivalence projective de linéarisations ? Il semble que l'on puisse se ramener au cas plan par tranchage.

5. Généralisations

5.1 Un critère général de linéarisation

La méthode qui nous a permis d'obtenir le critère de linéarisabilité du théorème 4.5 pour les tissus en hypersurfaces est en fait très générale puisqu'elle s'applique à des objets plus généraux que les tissus de codimension 1.

Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ des entiers strictement positifs. Posons $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ et $d = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. Décidons d'appeler un *$\underline{a}$-tissu généralisé* sur $U \subset \mathbf{C}^n$ la donnée notée $W_{\underline{a}}$ de d feuilletages $\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^d$ sur U dont exactement a_c sont de codimension c, cela pour tout entier c compris entre 1 et $n-1$. C'est une notion plus générale que celle de tissu mixte : on ne demande pas

forcément que les espaces tangents des feuilletages de $W_{\underline{a}}$ soient en position générale.

Cette définition étant posée, il se trouve que l'approche utilisée pour établir le théorème 4.5 s'adapte quasiment sans changements à la question de caractériser les tissus généralisés linéarisables, puisqu'il est toujours aussi évident qu'*un tissu généralisé est linéarisable si et seulement s'il existe une connexion projective intégrable qui lui est compatible.*

La question de l'intégrabilité d'une connexion projective compatible avec un tel $W_{\underline{a}}$ étant classique et bien comprise, le problème de caractériser les tissus généralisés linéarisables se ramène donc à la question de savoir s'il existe des coefficients de Thomas Π_{ij}^k tels que pour tout $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, les feuilles de dimension m d'un tel tissu $W_{\underline{a}}$ donné sont solutions du système différentiel (S_Π^m) de la proposition 3.35. C'est une question d'algèbre linéaire sur l'anneau de fonctions holomorphes $\mathcal{O}_U$. En effet, ayant fixé un système de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ sur U, une connexion projective Π sur U est définie par ses coefficients de Thomas. L'espace $\{(\Pi_{ij}^k)_{i,j,k=1}^n\}$ de ces coefficients est un $\mathcal{O}_U$-module libre de rang $(n-1)n(n+2)/2$. Un simple décompte montre que la condition pour que les feuilles d'un feuilletage de codimension c sur U soient totalement géodésiques pour Π consiste en

$$p(n,c) = \frac{c(n-c)(n-c+1)}{2}$$

équations scalaires non-homogènes en les Π_{ij}^k (à coefficients dans $\mathcal{O}_U$). La condition pour qu'une connexion projective Π soit admissible par un tissu généralisé $W_{\underline{a}}$ va donc consister en un système $S(W_{\underline{a}})$ formé de

$$\mu(\underline{a}) = \sum_{c=1}^{n-1} p(n,c)\, a_c$$

équations scalaires du même type. Si les entiers $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont tels que $\mu(\underline{a}) \geq \frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$, l'on s'attend à ce que le système $S(W_{\underline{a}})$ soit surdéterminé et donc n'admette au plus qu'une seule solution. Si une solution existe et est unique, on la note $\Pi_{W_{\underline{a}}}$. Elle est alors canoniquement attachée à $W_{\underline{a}}$ (par unicité) et comme pour les tissus de codimension 1, $W_{\underline{a}}$ est linéarisable si et seulement si la courbure $\mathfrak{C}(\Pi_{W_{\underline{a}}})$ est identiquement nulle.

5.2 Exemples de tissus en courbes non-linéarisables

Afin d'illustrer l'approche présentée ci-dessus, donnons-nous un paramètre $\epsilon \in \mathbf{C}$ non nul et considérons le 8-tissu en courbes W_8^ϵ dans $\mathbf{C}^3$ dont les

feuilles sont les courbes intégrales des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x} + Z_a^2 \frac{\partial}{\partial y} + Z_a^3 \frac{\partial}{\partial z}$ dont les composantes $Z_a = (1, Z_a^2, Z_a^3)$ sont

$$\begin{array}{llll} Z_1 = (1,0,0) & Z_2 = (1,1,0) & Z_3 = (1,0,1) & Z_4 = (1,1,1) \\ Z_5 = (1,-1,1) & Z_6 = (1,1,-1) & Z_7 = (1,-1,-1) & Z_8 = \left(1, \epsilon\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right). \end{array}$$

Une condition nécessaire pour que W_8^ϵ soit linéarisable est qu'il existe une connexion projective qui lui soit compatible. De façon plus explicite, cela équivaut à l'existence de fonctions holomorphes $A^k, B_i^k, C_{ij}^k, D_{ij}$ pour $i,j,k = 2,3$, symétriques en les indices inférieurs i et j, telles que les feuilles de W_8^ϵ soient toutes solutions des équations différentielles du second ordre (pour $\ell = 2,3$):

$$\frac{d^2 Z^\ell}{dt^2} = A^\ell + \sum_{i=2}^{3} B_i^\ell \frac{dZ^i}{dt} + \sum_{i,j=2}^{3} C_{ij}^\ell \frac{dZ^i}{dt}\frac{dZ^j}{dt} + \frac{dZ^\ell}{dt}\Big(\sum_{i,j=2}^{3} D_{ij}\frac{dZ^i}{dt}\frac{dZ^j}{dt}\Big).$$

Un calcul immédiat montre que de telles fonctions $A^k, B_i^k, C_{ij}^k, D_{ij}$ existent si et seulement le paramètre ϵ vaut 1. En conséquence, le tissu W_8^ϵ n'est pas linéarisable si $\epsilon \neq 1$. C'est en fait une condition nécessaire et suffisante dans cet exemple: on vérifie immédiatement que W_8^1 est linéarisable (il est linéaire !).

5.3 Un exemple sur les espaces de modules de courbes de genre 0

Soit m un entier plus grand que 4. L'on désigne par $M_{0,m}$ l'espace de modules des courbes algébriques de genre 0 avec m points distincts marqués et numérotés: en d'autres termes, c'est l'espace des configurations projectives de m points distincts de $\mathbf{P}^1$. C'est une variété quasi-projective lisse de dimension $m-3$.

L'opération d'oubli d'un point d'une configuration induit un morphisme $M_{0,m} \to M_{0,m-1}$. Un élément de $M_{0,m}$ étant composé de m points, il existe m tels morphismes d'oublis sur $M_{0,m}$. Plus généralement, pour k compris entre 1 et $m-1$, il existe $\binom{m}{k}$ morphismes d'oublis de k points $M_{0,m} \to M_{0,m-k}$. Si $k < m-3$, les ensembles de niveaux d'un tel morphisme d'oubli forment un feuilletage de codimension $m-3-k$ sur $M_{0,m}$. On vérifie sans difficulté que les feuilletages de codimension k induits par deux de ces morphismes sont différents. Par conséquent, pour tout $k \in \{1, \ldots, m-4\}$, l'ensemble des feuilletages associés aux oublis de k points définissent un $\binom{m}{k}$-tissu généralisé de codimension $c = m-3-k$ sur $M_{0,m}$, que l'on note $W^c(M_{0,m})$.

Le plus élémentaire de ces tissus est le 5-tissu plan $W^1(M_{0,5})$ qui n'est rien d'autre que le célèbre « tissu de Bol » considéré dans [4, 18, 14]. Les tissus généralisés en hypersurfaces $W^1(M_{0,m})$ naturellement définis sur les espaces de modules $M_{0,m}$ ont été considérés en premier lieu par Burau dans [8] (sous une forme différente mais équivalente). Les m-tissus en courbes $W^{m-4}(M_{0,m})$ sont introduits et étudiés dans [14], où il est montré que ceux-ci sont de rang maximal (cf. [14] pour des précisions). Ces résultats font apparaître les tissus $W^c(M_{0,m})$ (pour $m \geq 3$ et $c = 1, \ldots, m-4$) comme des tissus potentiellement intéressants du point de vue de leur rang et de leurs relations abéliennes, que l'on peut suspecter être liées aux polylogarithmes.

On s'intéresse ci-dessous à la question de savoir si certains des $W^c(M_{0,m})$ sont linéarisables. Plus précisément, nous montrons que les tissus en hypersurfaces $W^1(M_{0,m})$ ne le sont pas. On notera que le théorème 4.5 ne s'applique pas aux tissus $W^1(M_{0,m})$. En effet, ce sont des tissus généralisés : leurs normales ne vérifient pas l'hypothèse de position générale définie dans la section 2.2 (sauf lorsque $m = 5$).

L'étude de la linéarisabilité des tissus $W^1(M_{0,m})$ est rendue particulièrement facile si l'on applique la proposition suivante qui est une conséquence immédiate des résultats de la section 3.4.2.

PROPOSITION 5.1. *Si un d-tissu W_d en hypersurfaces est linéarisable, alors tout tissu obtenu par tranchage de W_d le long des feuilles de l'un ou plusieurs des feuilletages qui le constituent est aussi linéarisable.*

Il est classique que le tissu de Bol $W^1(M_{0,5})$ n'est pas linéarisable (cf. [2, p. 262]). On suppose donc $m > 5$ dans ce qui suit. Les applications d'oublis de $m-4$ points $M_{0,m} \to M_{0,4}$ sont autant d'intégrales premières des feuilletages de $W^1(M_{0,m})$. Chacune se factorise (de plusieurs façons possibles) par une application d'oubli de $m-5$ points :

$$\begin{tikzcd} M_{0,m} \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_{0,4}\,. \\ & M_{0,5} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On en déduit que $W^1(M_{0,m})$ admet comme sous-5-tissu le tissu $\pi^* W^1(M_{0,5})$ obtenu en tirant en arrière le tissu de Bol $W^1(M_{0,5})$ par une application d'oubli $\pi\colon M_{0,m} \to M_{0,5}$. Si l'on considère alors le tissu obtenu en prenant la restriction de $W^1(M_{0,m})$ le long d'une intersection convenable de $m-5$ de ses feuilles, on obtient un tissu plan qui admet $W^1(M_{0,5})$ comme sous-

5-tissu. Celui-ci n'étant pas linéarisable, on peut conclure en appliquant la proposition 5.1.

PROPOSITION 5.2. *Aucun des tissus $W^1(M_{0,m})$ n'est linéarisable.*

Combiné avec les résultats récents [12] de Cavalier et Lehmann, ce résultat ouvre une perspective intéressante dans l'étude des « tissus exceptionnels ». Par des calculs directs, nous avons vérifié (avec J. V. Pereira) que le tissu $W^1(M_{0,6})$ est bien de rang maximal : la dimension de l'espace de ses relations abéliennes prend la valeur maximale possible pour un 15-tissu régulier (au sens de [12]) dans un espace de dimension 3, à savoir la borne $\pi'(15,3) = 26$ de Cavalier et Lehmann. Ce tissu n'étant pas linéarisable, il n'est pas équivalent à un tissu algébrique, c'est-à-dire à un tissu associé via la dualité projective à une courbe algébrique gauche. Suivant une terminologie classique en géométrie des tissus, on dira que $W^1(M_{0,6})$ est *exceptionnel*. Il serait intéressant de savoir si tous les $W^1(M_{0,m})$ le sont aussi et, si c'est le cas, de décrire explicitement leurs relations abéliennes[6]).

5.4 UN CRITÈRE DE LINÉARISATION POUR CERTAINS TISSUS MIXTES DANS $\mathbf{C}^3$

Suivant la méthode décrite dans la section 5.1 ci-dessus, nous avons obtenu un critère de linéarisation pour certains tissus mixtes en dimension 3 :

PROPOSITION 5.3. *Dans un espace de dimension 3, il existe une unique connexion projective Π_W compatible avec un 6-tissu mixte W formé de trois feuilletages en hypersurfaces et de trois feuilletages en courbes. Par conséquent, W est linéarisable si et seulement si la courbure $\mathfrak{C}(\Pi_W)$ de Π_W est identiquement nulle.*

La preuve repose sur un calcul formel direct. Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ des 1-formes différentielles et X_1, X_2, X_3 des champs de vecteurs en trois variables x, y, z, définissant des feuilletages non-singuliers en l'origine de $\mathbf{C}^3$. On note W le 6-tissu mixte généralisé défini par ces feuilletages (dont trois sont en hypersurfaces et trois sont des feuilletages par courbes). Nous avons vérifié (par un calcul en MAPLE®) que le déterminant du système linéaire caractérisant les connexions projectives sur $(\mathbf{C}^3, 0)$ compatibles avec W est égal à

---

[6]) J. V. Pereira nous informe avoir démontré que les $W^1(M_{0,m})$ sont en effet tous de rang maximal, voir [37].

$$\Delta = -512 \left(\frac{\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3}{dx \wedge dy \wedge dz} \right)^3 \left(\frac{X_1 \wedge X_2 \wedge X_3}{\partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z} \right)^2 \prod_{i,j=1}^{3} \omega_i(X_j) .$$

Puisque Δ ne s'annule pas si et seulement si les feuilletages qui composent W sont en position générale (au sens de la définition de la section 2.2), cela démontre la proposition ci-dessus.

5.5 Remarques au sujet du cas général

Notons encore $W_{\underline{a}}$ un tissu formé de a_c feuilletages de codimension c pour $c = 1, \ldots, n-1$. Comme on l'a dit plus haut, l'existence et l'unicité d'une connexion projective (locale) compatible avec $W_{\underline{a}}$ se traduit par un problème d'algèbre linéaire avec autant d'équations que d'inconnues lorsque $\mu(\underline{a}) = (n-1)n(n+2)/2$. Sous cette hypothèse, il est tentant de conjecturer que si $W_{\underline{a}}$ est un tissu mixte dont les feuilletages sont en position générale, ce problème admet une unique solution.

Des calculs effectifs nous ont montré que cela n'est pas vrai dans tous les cas. Par exemple, en dimension 4, nous avons vérifié qu'il existe une famille continue de connexions projectives compatibles avec un 6-tissu dans $\mathbf{C}^4$ formé de cinq feuilletages en hypersurfaces et d'un feuilletage de codimension 2 (cas $n = 4$ et $\underline{a} = (5, 1, 0)$).

Une autre situation se présente : celle où il y a existence et unicité d'une connexion projective compatible avec un tissu donné $W_{\underline{a}}$ générique, sans que la notion de « généricité » impliquée ne soit reliée (semble-t-il) au fait que les feuilletages de $W_{\underline{a}}$ soient en position générale. Par exemple, nous avons vérifié qu'un 12-tissu en courbes dans $\mathbf{C}^4$ est compatible avec une unique connexion projective s'il est « suffisamment générique ».

6. Quelques remarques historiques

En guise de conclusion, nous voudrions revenir sur l'histoire du problème de la linéarisation des tissus.

Comme cela est évoqué dans l'introduction, la question de la linéarisabilité d'un tissu s'est d'abord posée relativement à des questions en « Théorie des Abaques » ou « Nomographie ». C'est Lalanne dans [32] qui, le premier, a pensé à simplifier la lecture des abaques en trois variables $A(x, y, z) = 0$ en les rectifiant (quand c'est possible) au moyen de « transformations anamorphiques », c'est-à-dire de changements de coordonnées ponctuelles de la forme $(x, y) \mapsto (\overline{x}(x), \overline{y}(y))$. C'est ensuite Massau dans [34] qui a compris l'intérêt de

se permettre les transformations ponctuelles $(x, y) \mapsto (\overline{x}(x, y), \overline{y}(x, y))$ les plus générales pour essayer de rectifier une abaque en trois variables ou, en termes plus modernes, pour chercher à linéariser un 3-tissu plan.

C'est apparemment en relation avec des questions d'algébrisation des tissus que Blaschke et ses collaborateurs ont étudié la question de la linéarisabilité des tissus plans. La section §29 du livre [2] y est entièrement consacrée. Les auteurs y montrent que, un système de coordonnées x, y étant choisi, les feuilles d'un 4-tissu plan W_4 donné sont aussi des courbes intégrales d'une unique équation différentielle du second ordre de la forme

$$y'' = A(y')^3 + B(y')^2 + Cy' + D\,, \tag{6.1}$$

forme invariante par les changements de coordonnées ponctuelles. L'équation (6.1) est donc canoniquement attachée à W_4. Les auteurs en déduisent plusieurs résultats sur les 4-tissus plans. En effet, on peut lire en bas de la page 247:

> *Dann und nur dann läßt sich ein 4-Gewebe geradlinig machen, wenn das zugehörige quasigeodätische System mit den Geraden der Ebene topologisch äquivalent ist.*

(ce qui est un critère de linéarisation d'un 4-tissu plan), et juste en dessous:

> *Eine topologische Abbildung, die vier Geradenscharen in vier Geradenscharen überführt, ist sicher projektiv.*

(ce qui est notre corollaire 4.8 dans le cas $n = 2$).

Le critère caractérisant l'équivalence d'un "quasigeodätisches System" avec celui des droites du plan n'apparaît pas explicitement dans le corps du texte de la section §29, mais est clairement évoqué dans le cinquième des *Aufgaben und Lehrsätze zu* §29, page 249. Le critère de Tresse y est juste mentionné, les auteurs renvoyant à l'*Aufgabe* 2 de la section §22, où les références [41, 5, 16, 11] sont données. À noter aussi que les géomètres allemands connaissaient l'interprétation géométrico-invariante du critère caractérisant la platitude de l'équation (6.1) en termes de connexion projective ("projektiver Zusammenhang") comme le montre la lecture de l'*Aufgabe* 11, page 249.

Vu la description des résultats de [2] faite ci-dessus, il apparaît comme certain que les géomètres allemands qui étudiaient les tissus vers 1930 connaissaient un critère géométrique s'exprimant en termes d'invariants différentiels caractérisant les tissus plans linéarisables[7]). Ces résultats ont été oubliés par la suite, semble-t-il.

---

[7]) C'est d'ailleurs en faisant référence aux résultats de la section §29 qu'est démontré dans le second paragraphe de la section §31 de [2] que le 5-tissu de Bol n'est pas linéarisable.

Récemment, Hénaut a abordé la question de la linéarisation des tissus plans dans [27]. S'appuyant sur les travaux [33, 41] de Lie et Tresse, il obtient un critère caractérisant les tissus plans linéarisables qui est essentiellement le même que celui obtenu par les géomètres allemands. Hénaut a travaillé indépendamment, sans connaître leurs résultats : s'il cite le livre [2], c'est pour dire que seuls des cas particuliers y ont été traités (cf. [27], p. 531).

Dernièrement en 2004, Akivis, Goldberg et Lychagin reviennent sur la linéarisabilité des tissus plans dans [1]. Insistant sur le fait que les résultats de Hénaut énoncés dans [27] ne sont pas formulés en des termes invariants, ils reprennent une approche proposée en 1973 par Akivis et obtiennent une caractérisation des tissus plans linéarisables qui s'exprime par l'annulation de certains invariants différentiels explicites. Ils disent résoudre une conjecture posée par Blaschke à la fin de la section § 42 de [3], où l'on peut lire :

> *Es scheint also möglich zu sein, eine beliebige Wabe in der Umgebung dritter Ordnung eines Punktes durch eine geradlinige Wabe zu ersetzen, während eine Annäherung in vierter Ordnung im allgemeinen nicht mehr möglich ist. Für die "Streckbarkeit" einer W_4 haben wir also zwei Bedingungen vierter Ordnung zu erwarten.*

Bien que cela ne soit pas complètement explicite, Blaschke semble bien conjecturer à cet endroit quelle doit être la forme que l'on peut attendre d'un critère caractérisant les 4-tissus plans linéarisables. Cela est surprenant, puisque, comme on l'a dit plus haut, un tel critère était déjà présenté dans [2], livre datant de 1938 dont il est l'un des deux auteurs.

Alors que nous terminions la préparation de cet article, Goldberg et Lychagin ont rendu disponible la prépublication [20] où ils abordent le problème de la linéarisation des tissus de codimension 1 en dimension arbitraire.

Enfin, un mois après que nous avions diffusé le présent article sous forme de prépublication [38], Goldberg et Lychagin ont rendu accessible un texte en russe [21] où ils présentent plusieurs résultats similaires (voire identiques pour certains) à ceux que nous avions obtenus. Leur papier a depuis été publié [22].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKIVIS, M. A., V. V. GOLDBERG and V. V. LYCHAGIN. Linearizability of d-webs, $d \geq 4$, on two-dimensional manifolds. *Selecta Math. (N.S.) 10* (2004), 431–451.

[2] BLASCHKE, W. und G. BOL. *Geometrie der Gewebe. Topologische Fragen der Differentialgeometrie.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen *49*. Springer, Berlin, 1938.

[3] BLASCHKE, W. *Einführung in die Geometrie der Waben.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955.

[4] BOL, G. Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene. *Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. 11* (1936), 387–393.

[5] —— Topologische Fragen der Differentialgeometrie XXXIV: Über topologische Invarianten von zwei Kurvenscharen im Raum. *Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. 9* (1932), 15–47.

[6] BOREL, A. Élie Cartan, Hermann Weyl et les connexions projectives. In: *Essays on Geometry and Related Topics*, Mémoires dédiés à André Haefliger, Vol. 1, 43–58. Monograph L'Enseign. Math. *38*. Geneva, 2001.

[7] BORŮVKA, O. Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs. *Publ. Fac. Sci. Masaryk 72* (1926), 40 pp. et: Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs. II. *Publ. Fac. Sci. Masaryk 85* (1927), 34 pp.

[8] BURAU, W. On certain models for congruences of rational normal curves. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 15* (1966), 41–50.

[9] ČAP, A. and A. R. GOVER. Tractor calculi for parabolic geometries. *Trans. Amer. Math. Soc. 354* (2002), 1511–1548.

[10] ČAP, A. and H. SCHICHL. Parabolic geometries and canonical Cartan connections. *Hokkaido Math. J. 29* (2000), 453–505.

[11] CARTAN, É. Sur les variétés à connexion projective. *Bull. Soc. Math. France 52* (1924), 205–241.

[12] CAVALIER, V. and D. LEHMANN. Regular holomorphic webs of codimension one. Prépublication arXiv:math/0703596 (2007).

[13] CRAMPIN, M. and D. J. SAUNDERS. Projective connections. *J. Geom. Phys. 57* (2007), 691–727.

[14] DAMIANO, D. B. Webs and characteristic forms of Grassmann manifolds. *Amer. J. Math. 105* (1983), 1325–1345.

[15] D'OCAGNE, M. Coordonnées parallèles et axiales. Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[16] DUBOURDIEU, J. Questions topologiques de géométrie différentielle. Mem. Sci. Math. *78*. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

[17] EISENHART, L. P. Spaces with corresponding paths. *Proc. Nat. Acad. Sci. 8* (1922), 233–238.

[18] GEL'FAND, I. M. and R. D. MACPHERSON. Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm. *Adv. Math. 44* (1982), 279–312.

[19] GOLDBERG, V. V. and V. V. LYCHAGIN. On the Blaschke conjecture for 3-webs. *J. Geom. Anal. 16* (2006), 69–115.

[20] GOLDBERG, V. V. and V. V. LYCHAGIN. Geodesic webs and PDE systems of Euler equations. Prépublication arXiv:0810.5417 (octobre 2008).

[21] GOLDBERG, V. V. and V. V. LYCHAGIN. Geodesic webs of hypersurfaces. Prépublication arXiv:0812.2126 (décembre 2008).

[22] GOLDBERG, V. V. and V. V. LYCHAGIN. Geodesic webs of hypersurfaces. *Dokl. Math. 79* (2009), 284–286.

[23] GRIFFITHS, P. On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry. *Duke Math. J. 41* (1974), 775–814.

[24] GRIFONE, J., M. ZOLTÁN and J. SAAB. On the linearizability of 3-webs. *Nonlinear Anal. 47* (2001), 2643–2654.

[25] GUNNING, R. C. On uniformization of complex manifolds: the role of connections. *Mathematical Notes 22*. Princeton University Press, Princeton, 1978.

[26] HACHTROUDI, M. Les espaces d'éléments à connexion projective normale. Actual. Sci. Industr. *565*. Hermann & Cie, Paris, 1937.

[27] HÉNAUT, A. Sur la linéarisation des tissus de $\mathbf{C}^2$. *Topology 32* (1993), 531–542.

[28] KOBAYASHI, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Classics in Mathematics. Springer, 1995. Reprint of: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete *70*. Springer, 1972.

[29] —— Canonical forms on frame bundles of higher order contact. In: Proc. Sympos. Pure Math. Vol. III, 186–193. Amer. Math. Soc., Providence, 1961.

[30] KOBAYASHI, S. and T. NAGANO. On projective connections. *J. Math. Mech. 13* (1964), 215–235.

[31] KOBAYASHI, S. and T. OCHIAI. Holomorphic projective structures on compact complex surfaces. *Math. Ann. 249* (1980), 75–94.

[32] LALANNE, L. Appendice sur la représentation graphique des tableaux numériques, appendice du «Cours complet de météorologie» de L. Kaemtz, traduit et annoté par C. Martin, Paris, Paulin (1843), téléchargeable à l'url http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k95083j.capture

[33] LIE, S. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten III. *Lie Arch. 8* (1883), 371–458.

[34] MASSAU, J. Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand, Livre III *10* (1887), 1–535.

[35] MOLZON, R. and K. P. MORTENSEN. The Schwarzian derivative for maps between manifolds with complex projective connections. *Trans. Amer. Math. Soc. 348* (1996), 3015–3036.

[36] OCHIAI, T. Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 152* (1970), 159–193.

[37] PEREIRA, J. V. Webs and arrangements. En préparation.

[38] PIRIO, L. Sur la linéarisation des tissus. Prépublication arXiv:0811.1810 (novembre 2008).

[39] SHARPE, R. W. *Differential Geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Graduate Texts in Mathematics *166*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[40] SMIRNOV, S. V. On certain problems of uniqueness in the theory of webs. *Volž. Mat. Sb. Vyp. 2* (1964), 128–135.

[41] TRESSE, A. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. *Acta Math. 18* (1893), 1–88.

[42] VAONA, G. Sul teorema fondamentale della nomografia. *Boll. Unione Mat. Ital. (3) 16* (1961), 258–263.

[43] WEYL, H. Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. *Gött. Nachr.* (1921), 99–112.

[44] YEN, C.-T. Sur la connexion projective normale associée à un feuilletage du deuxième ordre. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 34* (1953), 55–94.

(Reçu le 19 novembre 2008)

Luc Pirio

IRMAR, UMR 6625 du CNRS
Université Rennes 1
Campus de Beaulieu
F-35000 Rennes
France
e-mail : luc.pirio@univ-rennes1.fr