Zeitschrift: Zeitschrift des Vereins Schweizerischer Konkordatsgeometer [ev. = Journal de la Société suisse des géomètres concordataires]

Herausgeber: Verein Schweizerischer Konkordatsgeometer = Association suisse des géomètres concordataires

Band: 7 (1909)

Heft: 4

Artikel: Über Fehlergrenzen [Fortsetzung]

Autor: [s.n.]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-180697

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3° *Assurance collective contre les accidents.* Du moment que cette question a rencontré si peu d'intérêt de la part des membres de la Société, la participation à l'assurance étant minime et aucune réduction importante sur les primes n'étant à attendre des Compagnies d'assurance, il est décidé de proposer à l'assemblée générale de laisser tomber cette affaire.

4° *Admission des géomètres brevetés vaudois.* Par l'entremise du comité de la Société Vaudoise des géomètres une cinquantaine de ses membres ont demandé l'admission dans la Société Suisse des géomètres concordataires. Cette démarche de nos collègues du Canton de Vaud est à saluer avec joie et sera du plus grand intérêt. Il est décidé, sous réserve de ratification de l'assemblée générale, de recevoir dans la société les géomètres brevetés annoncés. Les communications officielles paraitront dorénavant en allemand et en français dans l'organe de la Société.

5° *Programme et ordre du jour de l'assemblée générale.* Ceux-ci sont établis d'accord avec les délégués de section d'Argovie, Bâle et Soleure. Ils seront communiqués prochainement aux intéressés.

Lucerne, Avril 1909.

Le Président de la S. S. G. C.
Le Secr. *H. Muller.*

Über Fehlergrenzen.

(Fortsetzung.)

Im ersten Artikel über diesen Gegenstand, Heft 3, ist durch Versehen ein Satz ausgeblieben und eine Zahl geändert worden. Wir bitten unsere Leser, als Zeile 9 von unten auf Seite 46 einzuschalten: „Für $l = 800$ m wäre der Einfluß der regelmäßigen Fehler gleich dem der zufälligen Fehler“, und dann fortzufahren: „Für $^2/_3$ a, also dem Doppelten des „mittleren“ Fehlers, würden die regelmäßigen Fehler für $l > \mathbf{640}$ überwiegen, ... und wollte der Verifikator als Konzession sogar den doppelten mittleren Fehler zulassen, so stünde man bei Distanzen von 640 m an vor dem gleichen Dilemma“.

Wir haben in unserem Schlußsatze die Behauptung aufgestellt, daß vom Grenz- oder Maximalfehler im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung so lange nicht auf einen mittleren Fehler, der $^1/_3$ des Maximalfehlers betragen soll, übergegangen werden könne, als

einseitig wirkende Fehlereinflüsse in unseren Messungen sich geltend machen. Denselben Gedanken drückt Jordan in seiner Begründung der Längenmeßtoleranzformel

$$m = \sqrt{\alpha \sqrt{l} + (\beta l)^2}$$

in folgender Weise aus: „Der Begriff des mittleren Fehlers ist also nicht an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden; man kann den mittleren Fehler als Genauigkeitsmaß für solche Messungen benützen, bei welchen einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein mittlerer Fehler, welcher konstante Teile enthält, im allgemeinen nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.“ Darin liegt eben der Schluß, daß in dem angezogenen Falle vom mittleren Fehler nicht auf den Maximalfehler oder umgekehrt vom Maximalfehler auf den mittleren Fehler geschlossen werden darf. Diesem folgt ohne weiteres, daß unsere Fehlertoleranzen, sobald einseitig wirkende Fehlerquellen auftreten, als Grenzfehler aufzufassen sind, welche bei einigermaßen anständigen Messungen nur in Ausnahmefällen auftreten sollen.

Verhältnis des mittleren Fehlers zum Maximalfehler.

Die Theorie der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate setzt zu ihrer Begründung nur sehr kleine, mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv und negativ auftretende Fehler voraus, einseitig wirkende Fehlerursachen sind ausgeschlossen. Ferner wird die Anzahl der Messungen und damit der Fehler als eine unbegrenzte, der Maximalfehler selbst als unendlich groß vorausgesetzt. Es zeigt sich indessen, daß auch eine beschränkte Zahl von Messungen der Behandlung nach der Fehlertheorie zugänglich ist, und zwar um so eher, je gleichartiger dieselben bei kleiner Anzahl sind.

Die Voraussetzungen für Ausgleichungsrechnungen treffen demnach am meisten zu bei Triangulierungen erster Ordnung, wo durch die auf die Arbeit verwendete Sorgfalt einseitige Fehlerwirkungen bis zur Einflußlosigkeit herab gemindert werden können. „Allerdings häufen sich die Zweifel und Schwierigkeiten der M. d. kl. Q. um so mehr, je weiter man von den Triangulierungen I. Ordnung zu der II. bis IV. Ordnung herabsteigt, allein auf diesem Gebiete hat sich die M. d. kl. Q. siegreich bewährt; sie

dient bei Triangulierungen niederer Ordnung lediglich dem Zweck, auf eine möglichst willkürfreie Art zu widerspruchsfreien und plausibeln Resultaten zu gelangen". (Jordan.)

Wenn also für die Operationen niederen Ranges auch zugegeben wird und muß, daß die Methode der kleinsten Quadrate nicht ganz einwandsfrei ist, so muß dagegen wieder das Zugeständnis gemacht werden, daß bis jetzt nichts besseres an deren Stelle gesetzt werden kann, unter der Bedingung jedoch, daß die Art ihrer Anwendung eine willkürfreie und vor allem aus dem feinen Instrument angepaßte sei, daß die Einsicht in ihr Wesen und dasjenige, was sie zu leisten imstande ist, eine um so weitere sei, je näher sie an die Grenze des Versagens gelangt. Wie nicht das Instrument die Musik macht, sondern der Künstler, so soll auch die M. d. kl. Q. nicht zum herrschenden Prinzip werden, dessen kritiklose Sklaven wir sind; wir wollen sie benützen ohne Willkür, aber mit kritischem Verständnis, ohne von ihr die Wahrheit, sondern nur eine Annäherung an die Wahrheit zu begehren.

Messen wir nach Art. 9 der eidg. Instruktion für die Ausführung der schweiz. Forsttriangulation IV. Ordnung einen Winkel, so erhalten wir für denselben im allgemeinen eine Schlußdifferenz, welche als wahrer Fehler aufzufassen ist. Reihen wir $2n + 1$ solcher Schlußdifferenzen ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen, aber nach ihren absoluten Werten aneinander, so ergibt uns die $n + 1^{te}$ Zahl den wahrscheinlichen Fehler einer solchen Messung. Dieser wahrscheinliche Fehler ist offenbar das Genauigkeitskriterium, welches der Billigkeit am meisten entspricht, denn es liegen ebenso viele Fehler unter, als über demselben.

Da sich dieses Genauigkeitmaß indessen für die Anwendung in der M. d. kl. Q. als nicht zweckdienlich erweist, hat man in derselben den sog. mittleren Fehler eingeführt, welcher sich als Quadratwurzel aus der Summe sämtlicher Fehlerquadrate dividiert durch die Anzahl der Fehler ergibt.

Das Verhältnis des wahrscheinlichen Fehlers r zum mittleren Fehler m ist nach der Wahrscheinlichkeitstheorie

$$r : m = 0{,}6745 : 1 \text{ oder angenähert}$$

$$r = {}^2/_3\, m \qquad m = \frac{3}{2}\, r$$

Ferner ist der sogenannte Maximalfehler M durch die Beziehung gegeben

$$M = 3\,m \backsim 4{,}5\,r$$

in einer Reihe von 1000 Fehlern wird der wahrscheinliche Fehler die 500. Stelle einnehmen, der mittlere Fehler die 683., der sogenannte Maximalfehler die 997.; man nennt deshalb den Maximalfehler auch Fehler des 1000. Falles.

Wir geben hier (nach Jordan Anhang 21) eine Tabelle der Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n fachen mittleren Fehler, aus welcher sehr deutlich hervorgeht, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers mit dessen Größe sehr rasch abnimmt.

Es ergibt sich auch aus der Tabelle und das scheint uns von besonderer Wichtigkeit, daß die Wahrscheinlichkeit des doppelten mittleren Fehlers 0,954, die des dreifachen 0,997 ist. Wenn wir also bei 100 Messungen 4.3 %, welche besonders große Abweichungen zeigen, durch Nachmessungen ausscheiden, wie es tatsächlich jeder gewissenhafte Geometer praktiziert, so können wir das Verhältnis des wahrscheinlich noch verbleibenden Maximalfehlers zum doppelten des mittleren Fehlers herunterdrücken, mit andern Worten, der mittlere Fehler wird bei kritischer Behandlung unseres Messungsmaterials, wie es z. B. Art. 9 der zitierten Instruktion vorsieht, halb so groß als der Maximalfehler. Man hätte also nach der von uns vorausgesetzten Ausscheidung

$$M = 2\,m = 3\,r$$

d. h. der wahrscheinliche Fehler, welcher in Nordamerika von den Geodäten als Genauigkeitsmaß allgemein angenommen wird, wäre $^1/_3$ des Maximalfehlers.

Jordan führt in seiner Ausgleichungsrechnung IV. Auflage 1895 22 Dreiecksschlüsse der Gradmessung in Ostpreußen an. In der Diskussion Seite 467 sagt er:

Da der mittlere Fehler m = 1,178" ist, müßte (nach dem vorher berechneten Verhältnis $\frac{M}{m} = 1{,}568$)

$M = 1{,}568 \times 1{,}178 = 1{,}847$ werden, und in der Tat ist der größte Wert 1,86", also sehr nahe dem theoretischen 1,847". Das Verhältnis $M : m = 1{,}568$ ist hier erheblich kleiner als das Verhältnis $M : m = 3$, welches für assymptotisches Fehlergesetz gilt, und man kann daraus auf Ausscheidung der großen Fehler schließen. (Also in einer offiziellen, wissenschaftlichen Publikation!)

Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den *n* fachen *mittleren* Fehler.

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,0000	0,0080	0,0159	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0637	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	0,3829	0,3900	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5746	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6090	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7016	0,7063	0,7109	0,7154	0,7198	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7498	7539	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030
1,3	8064	8098	8132	8165	8197	8229	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	0,8664	0,8689	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266
1,8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9518	9533	9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	0,9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9785	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9867	9861	9865	9869	9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
$n=$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$W=$	0,9973	0,9981	0,9986	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999
$n=$	4,0	4,1								$n=\infty$
$W=$	0,9999	1,0000								$W=1$

Ebenfalls der Gradmessung für Ostpreußen hat Jordan 18 unabhängige Messungen eines Winkels entnommen. Indem er von den 18 Messungen diejenige mit der größten Abweichung ausscheidet, ergeben die 17 verbleibenden

$$M : m = 2{,}182$$

Für die 27 Dreiecksschlüsse der Simplontriangulation von Professor Rosenmund, in welcher Korrektionen für die Lotstörungen bereits eingeführt sind, erhalte ich ein Verhältnis

$$M : m = 2{,}30$$

Mit Ausscheidung des größten Fehlers wird das Verhältnis etwas günstiger und stellt sich zu

$$M : m = 2{,}24$$

In unserer Zeitschrift Jahrgang 1905, Seite 3, gibt Sutter eine Ausgleichung von 417 Horizontalabschlüssen ohne jede Ausscheidung. Die Natur der Operation entspricht durchaus der Zufälligkeit der Fehler, trotzdem erhält er für das Verhältnis von M : m den Wert

$$M : m = 2{,}73$$

ein weiterer Beweis, daß das Erreichen des Maximalfehlers für unsere Messungen als beinahe ausgeschlossen betrachtet werden kann.

Weder die Instruktion des Konkordates, deren Verfasser ein gründlicher Kenner der Methode der kleinen Quadrate war, noch diejenige für die Forsttriangulation IV. Ordnung sprechen von einem Maximalfehler, sie bestimmen lediglich die Grenze, welche nicht überschritten werden soll, so gibt die erstere für Dreiecksschlüsse IV. Ordnung 23", letztere 20" an, gestehen also implizite die von uns beanspruchten Ausscheidungen zu.

Nach diesem werden die Fehler

eines Dreiecksschlusses		m = 10"	r = 6,67"
eines Dreieckswinkels	$\frac{m}{\sqrt{3}} =$	5,75	3,83
einer Richtung	$\frac{m}{\sqrt{6}} =$	4,08	2,71

Nach unsern Erfahrungen kann bei 8maliger Repetition mit einem Sechszöller ein Winkel von Dreiecken IV. Ordnung, wie sie durch die Instruktion vorgeschrieben ist, innerhalb eines mittleren Fehlers von 3" gemessen werden; diese Zahl gibt indessen nur die innere Übereinstimmung der Messung an, Auffassungsfehler,

Beleuchtungseinflüsse und namentlich die Exzentrizitäten sind in diesem Betrage nicht inbegriffen. So bald deshalb die Dreiecks-winkel zu Dreiecksschlüssen verwendet werden sollen, erhält man nicht den nach der Methode der kleinsten Quadrate zu erwartenden Widerspruch von 3" $\sqrt{3}$ = 5,2", sondern einen größeren, weil die angeführten Fehlerquellen nicht als rein zufällige zu betrachten sind.

Vieljährige Zusammenstellungen aus unserer Praxis bestätigen uns, daß der wahrscheinliche Fehler eines Dreiecksschlusses IV. Ordnung sich auf ungefähr den oben angegebenen Wert von 6,7" stellt, sie beweisen gleichzeitig das feine, durch langjährige Erfahrung gebildete Gefühl des alten Praktikers vom eidg. topographischen Bureau, der den oben angegebenen Grenzfehler festsetzte.

Leider ist ihm im gleichen Art. 10 unter „C. Koordinatenrechnung" ein Lapsus unterlaufen, der schon zu unangenehmen Erörterungen Veranlassung gegeben hat. Es heißt dort: Die Resultate einer Triangulation sind nur dann annehmbar, wenn die aus den endgültigen Koordinaten abgeleiteten Richtungen (Azimute oder aus den Azimuten abgeleitete Winkel) von den durch direkte Beobachtung gefundenen nicht mehr abweichen als:

25" = 75" bei Distanzen bis 3000 Meter
15" = 45" „ „ über 3000 „

Nach gewöhnlicher Übung wird einem in Klammer gesetzten Satzteil eine nur sekundäre Bedeutung zugeschrieben; im vorliegenden Falle ist dies um so zwingender, als der Klammerausdruck einen inneren Widerspruch aufweist, indem er Azimut und Winkel als gleichwertige Begriffe auffaßt, obwohl ein Winkel aus der Differenz zweier Richtungen gebildet wird. Da zudem im Schlußsatze noch ausdrücklich auf Distanzen Bezug genommen wird, und wohl von der Länge einer Richtung im Sinne von Art. 10, nicht aber von der Länge eines Winkels gesprochen werden kann, so scheint eine Interpretation, wie sie ein Verifikator dem Schlußsatz geben wollte, ohne weiteres als ausgeschlossen. Um zu zeigen, zu welchen Irrungen auch eine gute Vermessungsinstruktion führen kann, wenn sie einseitig oder willkürlich angewendet wird, lassen wir diese Inpretation hier folgen.

Die Verifikation nahm an:

Maximalfehler eines Winkels im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate . . . . . 15"

Mittlerer Fehler eines Winkels im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate . . . . . 5"
Mittlerer Fehler einer Richtung . . . . . 3,6"
Also wahrscheinlicher Fehler einer Richtung . . . . . 2,4"

Zu welchen Absurditäten solche Fehlerbetrachtungen führen, möge noch an einem weiteren Beispiele gezeigt werden.

In demselben Artikel bestimmt die Instruktion: „Die Differenz in der Bestimmung einer Dreiecksseite soll 1 : 5000 nicht übersteigen." Nehmen wir an, es sei diese Seite doppelt bestimmt, so dürfte der Maximalfehler des arithmetischen Mittels aus den beiden Angaben nur

$$\frac{1}{5000\sqrt{2}} = \frac{1}{7000}$$

der mittlere Fehler $^1/_{21000}$, der wahrscheinliche Fehler einer Dreieckseite IV. Ordnuug nur $^1/_{31500}$ betragen. An solche gewagte Schlüsse hat Kollege Brönnimann offenbar nicht gedacht, als er sich in Jahrgang 1904, Nr. 1, unserer Zeitschrift über die beiden eidgenössischen Instruktionen in folgender Weise vernehmen ließ: „Die beiden eidgenössischen Instruktionen zeichnen sich aus durch eine einfache, klare und sorgfältige Redaktion, frei von spitzfindigen Plackereien, verraten sie deutlich die Feder des im praktischen Dienste erfahrenen Fachmannes." (Fortsetzung folgt.)

Distanzablesung an horizontaler Latte.

Von Anton v. Sprecher.

(Schluß.)

Als Nachteile dieser Methode fallen in Betracht:

1. die Unmöglichkeit der Anwendung beim Meßtisch,
2. die breite, freie Sicht, um beide Marken sehen zu können,
3. die Erfordernis eines zweiten Gehülfen zum Festhalten der Latte.

In Bezug auf den erst genannten Nachteil kann man sich unter Umständen noch vorteilhaft dadurch behelfen, daß man neben dem Meßtisch noch einen Theodolith aufstellt, die Distanz nach einem oder mehreren wichtigen, aber auf anderm Wege kaum bestimmbaren Punkten mittelst Distanzwinkel ermittelt und auf dem Meßtisch aufzeichnet. Auf diese Weise habe ich in sehr