Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 1 (1928)

Heft: VI

Artikel: Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger

Autor: Gonseth, F. / Juvet, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109181

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger

par **F. Gonseth, Berne** et **G. Juvet, Neuchâtel.**

(28. VI. 28.)

Introduction. Ce mémoire est le développement de quatre notes que nous avons publiées l'été dernier dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences[1]). Notre propos est de faire voir, d'une part, que l'expression de la force de Lorentz conduit nécessairement à la considération d'un déplacement parallèle dans un espace à cinq dimensions, dont la métrique est, il est vrai, dégénérée, comme l'est celle de l'espace galiléo-newtonien. D'autre part, nous chercherons quelles conséquences on peut tirer de l'étude de cet espace lorsque nous en aurons précisé la nature par quelques hypothèses. Nous retrouverons quelques résultats dus à M. Kaluza, relatifs aux équations de Maxwell[2]), et nous obtiendrons une interprétation nouvelle de l'équation que M. Schrödinger a mise à la racine de sa théorie ondulatoire de la mécanique.

Il convient de dire que c'est en méditant le mémoire fondamental de M. E. Cartan sur les variétés à connexion affine[3]), ceux de M. E. Vessiot sur la propagation par ondes[4]), les chapitres que M. Hadamard a consacrés dans ses deux grands traités[5]) à la théorie des caractéristiques et des bicaractéristiques, la belle thèse[6]) et le livre suggestif[7]) de M. L. de Broglie, ainsi que les brillants mémoires de M. Schrödinger[8]), que nous avons été conduits à la synthèse que nous proposons. Nous ne voulons pas oublier non plus de citer M. Kaluza[9]) qui est le premier à avoir interprété l'électromagnétisme dans un espace à cinq dimensions, non plus que M. O. Klein[10]) et M. Fock[11]) dont les travaux sur ces questions sont pleins d'intérêt. Cependant nous nous écartons de ces trois auteurs sur quelques points; notre méthode est différente et nous paraît plus conforme à la nature des choses, et de plus, nos résultats sont plus complets et conduisent plus avant dans la mécanique ondulatoire.

---

1) C. R. tome **185**, p. 341, 412, 448, 535.

2) Sitzungsber. Berlin, 1921 (II), p. 966—972.

3) Annales Ecole norm. sup. (3), **40**, p. 325, **41**, p. 1.

4) Essai sur la propagation par ondes (Ann. Ec. norm. sup. (3) **26**, p. 403). Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact (Bull. Soc. math. de France, **34**, p. 265).

5) Leçons sur la propagation des ondes, Paris, 1903, et Lectures on Cauchy's Problem in linear partial Equations, New-Haven, 1923.

6) Thèse, Paris, 1924.

7) Ondes et Mouvements, Paris, 1927.

8) Annalen der Physik, 1926, passim.

9) Loc. cit.

10) Zeitschr. f. Phys. **37**, p. 895.

11) Zeitschr. f. Phys. **39**, p. 226.

Sans prétendre donner une bibliographie exhaustive, nous pouvons citer encore quelques travaux de M. L. DE BROGLIE[1]), de M. SCHIDLOF[2]) et de M. ROSENFELD[3]), parus alors que nos Notes des Comptes-rendus étaient rédigées et envoyées, ou même parues. De toute manière, nous n'avons pu nous en inspirer; d'ailleurs leurs points de vue diffèrent du nôtre. Enfin M. J. STRUIK a avisé l'un d'entre nous qu'un mémoire rédigé en collaboration avec M. N. WIENER allait paraître et qu'il traiterait de l'univers à cinq dimensions; nous avons vu ce mémoire[4]) alors que notre travail était rédigé, les méthodes diffèrent beaucoup.

On voit donc que la considération d'un espace à cinq dimensions a fait l'objet de plusieurs travaux; il semble bien que ce que d'aucuns croient un artifice créé par des mathématiciens soit, au contraire, imposé ou du moins suggéré par la nature des choses.

I. Sur les équations de l'électromagnétisme.

1. Considérons dans l'Univers E_4 de MINKOWSKI un point matériel dont la masse au repos soit m, la charge e; soient u^0, u^1, u^2, u^3 les composantes de la vitesse d'univers de ce point, et désignons par $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ avec $\xi^i = m u^i$ les composantes de l'impulsion d'univers de ce même point. Imaginons que dans E_4, il y ait un champ électromagnétique dont les composantes tensorielles soient les fonctions F^{ik}; ce champ exerce sur le point chargé une force, *la force de Lorentz*, dont les composantes se calculent au moyen des F^{ik} et des composantes s^0, s^1, s^2, s^3 du courant créé par le point mobile; les s^i sont données par les formules:

$$s^i = e u^i .$$

La force de Lorentz p^0, p^1, p^2, p^3 est dès lors définie par les équations:

$$p^i = - F^{ik} s_k .$$

Le point matériel chargé a une ligne d'univers dont les équations différentielles sont:

$$d\xi^i = p^i ds ,$$

ds étant l'élément d'arc de cette ligne; on sait que cet élément est défini par son carré qui est une forme quadratique de dx^0, dx^1, dx^2, dx^3 réductible à une somme de quatre carrés de différentielles convenablement choisies; nous supposerons que ce sont celles-ci mêmes que nous avons choisies. Remarquons de plus que

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} .$$

---

[1]) Journal de Physique, **6**, p. 65—73 225—241.

[2]) C. R. t. **185**.

[3]) Bull. Acad. roy. de Belgique, Classe des Sciences (5) **13**, no. 6.

[4]) Publ. from. the Massachusetts Inst. of Technology, **2**, **133**, dec. 1927.

Par conséquent, on a:

$$d\,\xi^{i} = -\frac{e}{m} F^{i}_{\cdot k}\, \xi^{k} ds \quad (i = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{1}$$

Ces équations expriment que l'on passe du vecteur impulsion $\vec{\Xi}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ de l'E_4, situé au point $P(x^0, x^1, x^2, x^3)$ de la ligne d'univers à laquelle il est tangent, au vecteur $\vec{\Xi}$, situé au point voisin $P'(x^i + dx^i)$ de cette ligne, en ajoutant à $\vec{\Xi}$ transporté parallèlement à lui-même de P en P' le petit vecteur $\vec{d\Xi}$ de composantes $d\xi^i$. Ce petit vecteur n'étant en général pas nul, la ligne d'univers est courbée; elle n'est pas une droite, c'est-à-dire une géodésique, de l'E_4, et la force de Lorentz a, par suite, une signification qui n'est pas purement géométrique par rapport à l'E_4 de Minkowski.

On sait que M. Weyl, pour opérer une géométrisation de l'électromagnétisme, a donné une extension nouvelle à la géométrie différentielle en introduisant la notion d'étalonnage. Nous opérerons autrement, en conservant la géométrie différentielle classique, mais en introduisant une dimension de plus.

2. Introduisons, en effet, une coordonnée x^4 sans préciser davantage la métrique de l'Univers E_5 à cinq dimensions qui est constitué par l'ensemble des points $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$. Définissons simplement la différentielle dx^4 de la cinquième coordonnée du point matériel que nous considérons et cela de manière que l'on puisse interpréter les équations (1) comme celles d'un déplacement parallèle, ou si l'on veut d'un transport à la Levi-Civita, d'un certain vecteur de l'espace E_5.

Ces desiderata sont réalisés si l'on pose:

$$dx^4 = \frac{e}{m}\, ds$$

où ds est l'élément d'arc de la ligne d'univers E^4 et si l'on choisit le vecteur dont les composantes sont $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ déjà définies et

$$\xi^4 = m\,\frac{dx^4}{ds} = e\,.$$

Cela étant, les équations (1) s'écrivent comme les équations d'un transport parallèle dans l'E_5:

$$d\,\xi^{\alpha} = -G^{\alpha}_{\beta\gamma}\, \xi^{\beta}\, dx^{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4)\,, \tag{2}$$

où les $G_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sont les composantes de la connexion affine en chaque point de l'E_5; on a:

$$\left.\begin{array}{l} G_{ik}^{l} = 0 \\ G_{4i}^{l} = G_{i4}^{l} = F^{l}_{\cdot i} \\ G_{44}^{l} = G_{il}^{4} = G_{i4}^{4} = G_{44}^{4} = 0 \end{array}\right\} (i, k, l = 0, 1, 2, 3)$$

Les quatre premières équations (2) ne sont pas autre chose que les équations (1), et la cinquième qui s'écrit:

$$de = 0$$

exprime la conservation de la charge du point mobile.

3. On peut voir que cette géométrisation s'étend immédiatement au cas où l'E_4 n'est plus minkowskien, mais où il est einsteinien, c'est-à-dire où il est le siège d'un champ de gravitation.

Désignons par Γ_{ik}^{l} les composantes de ce champ, c'est-à-dire celles de la connexion affine de l'E_4 einsteinien.

Le champ électromagnétique plongé dans E_4 aura comme composantes les fonctions F^{ik} et sans qu'il soit nécessaire de préciser davantage, nous voyons que les

$$p^{i} = - F^{ik} s_k$$

sont les composantes de la force de Lorentz agissant sur le point chargé.

Les équations du mouvement de ce point sont dès lors:

$$m\left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^{i}_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds}\right) = p^i, \ (i = 0, 1, 2, 3); \tag{3}$$

on les transforme dans les suivantes:

$$d\xi^i + \Gamma^{i}_{kl} \xi^k dx^l + \frac{e}{m} F^{l}_{\cdot k} \xi^k ds = 0 \tag{4}$$

en posant encore:

$$\xi^i = m u^i = m \frac{dx^i}{ds} \cdot$$

Si l'on convient que

$$dx^4 = \frac{e}{m} ds \tag{5}$$

et si l'on définit les composantes $G_{\beta\gamma}^{\alpha}$ de la connexion affine d'un espace E_5, par les équations:

$$\left\{\begin{array}{l} G_{ik}^{l} = \Gamma_{ik}^{l} \\ G_{4i}^{l} = G_{i4}^{l} = F^{l}_{\cdot i} \\ G_{44}^{i} = G_{ik}^{l} = G_{4i}^{4} = G_{44}^{4} = 0 \end{array}\right. \quad (i, k, l = 0, 1, 2, 3 \tag{6}$$

les équations (4) s'écrivent:

$$d\,\xi^i + G_{\alpha\,\beta}^{\;\;i}\,\xi^\alpha\,dx^\beta = 0$$

et l'équation

$$d\,\xi^4 + G_{\alpha\,\beta}^{\;\;4}\,\xi^\alpha\,dx^\beta = 0$$

est identiquement satisfaite, si l'on admet l'invariabilité de la charge. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si l'on attache à un point matériel de masse m, chargé de e, mobile dans un champ électromagnétique et dans un champ gravifique, le vecteur dont les composantes dans l'espace à cinq dimensions sont:

$$m\,\frac{dx^0}{ds}\,,\quad m\,\frac{dx^1}{ds}\,,\quad m\,\frac{dx^2}{ds}\,,\quad m\,\frac{dx^3}{ds}\,,\quad e$$

ce vecteur se déplace parallèlement à lui-même. Ici ds est l'élément de la projection de la ligne d'univers de l'E_5 sur l'E_4.

Il est donc possible de cette manière de définir des systèmes inertiaux pour la gravitation et l'électromagnétisme à la fois.

4. Nous n'avons pas pour autant constitué une relativité à cinq dimensions, car les considérations précédentes, et le fait que nous ne connaissons pas de phénomènes où intervienne une variation de la charge nous obligent à ne considérer que des changements de variables

$$(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4) \text{ en } (\overline{x}^0,\ \overline{x}^1,\ \overline{x}^2,\ \overline{x}^3,\ \overline{x}^4)$$

pour lesquels:

$$\left\{\begin{array}{l}(\overline{x}_0,\ \overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3) \text{ soient des fonctions des seuls } (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\\ \text{et } \overline{x}^4 \text{ soit fonction de } x^4 \text{ seulement,}\end{array}\right. \tag{7}$$

et à admettre que les fonctions qui interviennent dans nos raisonnements ne dépendent pas d'x^4. C'est d'ailleurs seulement dans ces conditions que les équations (5) présentent quelque caractère d'invariance.

En effet, le calcul montre aisément que si l'on fait un changement de variables (7) les composantes de la connexion affine $\overline{G}_{\beta\,\gamma}^{\;\;\alpha}$ de l'E_5 rapporté aux x^α s'expriment au moyen des composantes de la connexion affine $\overline{\Gamma}_{k\,l}^{\;\;i}$ et du champ $\overline{F}^{ik}$ par les équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{G}_{ik}^{\;\;l} = \overline{\Gamma}_{kl}^{\;\;i}\\ \overline{G}_{4\,i}^{\;\;l} = \overline{G}_{i\,4}^{\;\;l} = \overline{F}^{l\,\cdot}_{\cdot\,i}\\ \overline{G}_{44}^{\;\;i} = \overline{G}_{i\,k}^{\;\;4} = \overline{G}_{4\,i}^{\;\;4} = \overline{G}_{44}^{\;\;4} = 0\end{array}\right.$$

identiques aux équations (6) à la barre près qui indique que les fonctions surlignées sont relatives aux nouvelles coordonnées.

Ce calcul est fondé sur les formules de transformation des composantes de la connexion affine; celles-ci ne constituant pas un tenseur; l'on a au contraire:

$$\overline{G}^{\alpha}_{\beta\gamma} = G^{\varrho}_{\tau\sigma} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \overline{x}_{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \overline{x}_{\gamma}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x_{\varrho}} + \frac{\partial^2 x^{\varrho}}{\partial \overline{x}_{\beta}\, \partial \overline{x}_{\gamma}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x_{\varrho}},$$

le dernier groupe de termes des seconds membres montrant bien ce fait. Or si dans ces seconds membres, on introduit les hypothèses (7) et les valeurs (6) et si l'on tient compte des formules:

$$\overline{\Gamma}^{l}_{ik} = \Gamma^{t}_{rs} \frac{\partial x^{r}}{\partial \overline{x}_{i}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}_{k}} \frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x_{t}} + \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}_{i}\, \partial \overline{x}_{k}} \frac{\partial \overline{x}^{l}}{\partial x_{t}}$$

$$\text{et } \overline{F}^{i}_{\cdot k} = F^{r}_{\cdot s} \frac{\partial \overline{x}^{i}}{\partial x_{r}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \overline{x}_{k}}$$

on obtient le résultat annoncé.

II. Sur la métrique de l'E_5.

5. Nous avons donc vu que dans l'Univers E_5 que nous avons défini, les coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) sont encore séparées d'x^4 et nous avons en particulier:

$$G^{l}_{ik} = \Gamma^{l}_{ik} \quad (i, k, l = 0, 1, 2, 3)$$

où les Γ^{l}_{ik} sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce du ds^2 de l'E_4 (x^0, x^1, x^2, x^3). Dans ces conditions, la loi de transformation des $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ dans E_5 exige simplement que les Γ^{l}_{ik} se transforment comme les composantes d'une connexion affine d'un E_4 et les $F^{i}_{\cdot k}$ comme celles d'un tenseur dans le même E_4.

Une telle connexion possède un groupe fondamental à 15 paramètres. Ce groupe joue vis-à-vis du groupe de Lorentz des déplacements dans E_4, le même rôle que joue le groupe de la cinématique galiléenne de la mécanique classique vis-à-vis du groupe des déplacements dans un E_3. Or le groupe de la cinématique galiléenne ne peut être caractérisé par un ds^2 à quatre dimensions non-dégénéré. La fusion ne s'opère que grâce au groupe de Lorentz. Dans notre E_5, il en sera de même; le groupe à 15 paramètres ne peut pas être caractérisé par un ds^2 non-dégénéré de l'E_5.

Nous allons cependant déterminer un ds^2 qui nous fournira *à peu près* la même connexion; c'est-à-dire que nous allons opérer une réunion de la cinquième coordonnée aux autres, analogue à celle qu'on opère quand on fond le temps et l'espace dans la synthèse minkowskienne, ou si l'on veut, semblable à celle qui fait passer du groupe de cinématique galiléenne classique au groupe de Lorentz.

Mais de même qu'on abandonne la mécanique et la cinématique classiques lorsqu'on passe de l'espace et du temps absolus à l'Univers de Minkowski, de même, nous abandonnerons l'électromagnétisme de Minkowski — et par suite nous modifierons l'expression de la force donnée par Lorentz — en passant de l'Univers de Minkowski-Einstein, à l'Univers E_5.

6. Supposons tout d'abord que pour $i, k = 0, 1, 2, 3$ les g_{ik} soient ceux de l'E_4 einsteinien, on aura:

$$G^{\,l}_{i\,k} = \Gamma^{\,l}_{i\,k}\,.$$

Les équations:

$$G^{\,l}_{4\,i} = G^{\,l}_{i\,4} = F^{\,l\,\cdot}_{\cdot\,i}$$

donnent alors:

$$G_{4\,l,\,i} = G_{l\,4,\,i} = F_{i\,l}\,, \tag{8}$$

car on a bien:

$$G_{4\,l,\,i} = g_{i\,r}\,G^{\,r}_{4\,l} + g_{i\,4}\,G^{\,4}_{4\,l} = g_{i\,r}\,F^{\,r\,\cdot}_{\cdot\,e} = F_{i\,l}\,,$$

puisque $F_{i\,l} = g_{i\,r}\,F^{\,r\,\cdot}_{\cdot\,i} + g_{i\,4}\,F^{\,4\,\cdot}_{\cdot\,l}$ et que $F^{\,4\,\cdot}_{\cdot\,l}$ n'a pas de sens par lui-même.

Tant que les fonctions que nous considérons ne dépendent pas d'x^4, — on voit l'analogie avec le cas statique de la relativité, — les équations (8) s'écrivent, en rappelant que:

$$F_{i\,l} = \frac{\partial\,\varphi_i}{\partial\,x^l} - \frac{\partial\,\varphi_e}{\partial\,x^i}$$

$$\frac{\partial\,g_{4\,i}}{\partial\,x^l} - \frac{\partial\,g_{4\,l}}{\partial\,x^i} = 2\left(\frac{\partial\,\varphi^i}{\partial\,x^l} - \frac{\partial\,\varphi^l}{\partial\,x^i}\right)$$

Nous les résoudrons en posant:[1])

$$g_{4\,l} = 2\,\varphi_l\,.$$

---

[1]) On pourrait poser plus généralement:

$$g_{4\,l} = 2\,\varphi_l + \frac{\partial\,\lambda}{\partial\,x_l}\,,$$

λ étant une fonction de x^0, x^1, x^2, x^3.

On aurait dès lors:

$$G_{i\,4,\,4} = g_{4\,l}\, G^{\,l}_{i\,4} + g_{44}\, G^{\,4}_{i\,4} = 2\,\varphi_l\, F^{l}_{\cdot\,i}$$
$$G_{44,\,i} = g_{i\,l}\, G^{\,l}_{44} + g_{44}\, G^{\,4}_{44} = 0$$

donc d'une part:

$$\frac{\partial\, g_{44}}{\partial\, x_i} = 4\,\varphi_l\, F^{l}_{\cdot\,i}$$

et d'autre part:

$$\frac{\partial\, g_{44}}{\partial\, x_i} = 0\,.$$

Il est donc impossible de conserver la connexion introduite tout d'abord d'après l'électromagnétisme classique.

7. C'est pourquoi nous définirons un ds^2 à cinq dimensions arbitrairement. Ce sera ce ds^2 qui déterminera dès lors la connexion affine. Cependant l'arbitraire dont nous userons sera modéré par les considérations précédentes. Nous poserons:

$$g_{44} = \psi^2$$

où ψ est une fonction de x^0, x^1, x^2, x^3 et *le ds^2 que proposons dès lors de mettre à la racine d'une nouvelle forme de l'électromagnétisme est*:

$$ds^2 = g_{i\,k}\, d\,x^i\, d\,x^k + 4\,\varphi_i\, d\,x^i\, d\,x^4 + \psi^2\, d\,x^4\, d\,x^4 \qquad (9)$$

les g_{ik} $(i,\ k = 0, 1, 2, 3)$ sont des fonctions de x^0, x^1, x^2, x^3 qui en l'absence d'un champ électromagnétique, se réduisent aux coefficients du ds^2 einsteinien relatif au champ gravifique donné.

Les $g_{i4} = 2\,\varphi_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ sont, au facteur 2 près les composantes du potentiel électromagnétique.

Le coefficient ψ^2 est le carré d'une fonction de x^0, x^1, x^2, x^3.

Les lignes d'univers (dans l'E_5) d'un point matériel chargé sont les géodésiques de ce ds^2.

Nous pourrions postuler l'équation:

$$\frac{d\,x^4}{d\,s} = \frac{e}{m}$$

ou l'équation:

$$\frac{d\,x^4}{d\,\sigma} = \frac{e}{m}$$

$d\sigma$ étant l'élément linéaire dans l'E_4, $x^4 =$ const. Elles définissent toutes les deux un rapport $\frac{e}{m}$ variable. On peut se demander dès lors comment il faut répartir cette variabilité sur e et sur m respectivement.

III. Sur la mécanique ondulatoire.

8. Si l'on rapproche les mémoires de M. VESSIOT[1]), particulièrement celui du Bulletin de la Société mathématique de France (t. XXXIV) sur l'interprétation mécanique des transformations de contact, et tout spécialement la fin de ce mémoire, des analyses de M. HADAMARD sur les bicaractéristiques attachées à une équation de propagation[2]), il est possible d'exprimer les principes de la mécanique ondulatoire d'une manière très simple.

Etant donnée une équation (0) aux dérivées partielles du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes, on peut définir des *multiplicités caractéristiques* attachées à (0), au moyen d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (J), et des courbes, les *bicaractéristiques*, de (0), qui sont les caractéristiques de (J).

C'est par des procédés réguliers de calcul que l'on arrive à l'équation (J) à partir de l'équation (0); il suffit de chercher les multiplicités pour lesquelles le problème de Cauchy relatif à (0) est indéterminé. On passe de (J) aux bicaractéristiques par la même condition pour le problème de Cauchy relatif à (J).

Si l'on identifie (J) avec l'équation de Jacobi du mouvement d'un point matériel, les trajectoires de ce point matériel sont les bicaractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre (0) parmi lesquelles se trouve l'équation de Schrödinger. On peut distinguer celle-ci des autres, dans un certain nombre de cas, par des raisons d'invariance.

Nous allons montrer que dans une relativité à cinq dimensions, il est aisé de donner un sens très précis à l'équation de Schrödinger, et de plus, nous pourrons faire voir que cette équation s'obtient d'une manière très naturelle.

9. La théorie de la relativité à cinq dimensions que nous proposons ici est une théorie de l'invariance dans l'E_5; mais elle est de plus, comme la gravifique d'Einstein, une théorie physique qui permet de définir les coefficients du ds^2 au moyen des masses et des charges.

Pour commencer, nous traiterons le mouvement d'un point matériel, en supposant qu'il n'y a pas de champ électromagnétique; les potentiels sont tous nuls.

---

[1]) Loc. cit. note 4.

[2]) Loc. cit. note 5.

Le ds^2 de l'E_5 a dès lors des coefficients dont le tableau suivant donne l'aspect:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} & 0 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi^2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

Les g_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ sont déterminés dans la théorie d'Einstein par les équations:

$$R_{ik} = 0 \ (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{11}$$

dans les régions de l'E_4 où ne se trouvent pas de masses; les R_{ik} sont les composantes du tenseur de Riemann contracté, relatif au ds^2 de l'E_4.

Nous supposerons que les g_{ik} et ψ^2 sont déterminés en dehors des masses par les équations:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

où les $R_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de Riemann contracté, relatif cette fois au ds^2 de l'E_5.

Il est clair que les équations (12) diffèrent des équations (11), car pour obtenir le tableau (10) nous avons modifié la connexion impliquée par les équations (11). Cette modification sera très faible si l'on suppose que les dérivées $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ sont très petites et négligeables vis-à-vis des $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}$ et que toutes les fonctions g_{ik} et ψ ont des dérivées par rapport à x^4 plus petites encore.

Le calcul est dès lors très simple qui permet de trouver les $R_{\alpha\beta}$. On trouve que les équations:

$$R_{ik} = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

sont précisément les équations d'Einstein qui déterminent les g_{ik} du ds^2 de l'E_4 einsteinien. Les équations

$$R_{i4} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

sont identiquement satisfaites et l'équation

$$R_{44} = 0$$

s'écrit:

$$\psi \frac{\partial (g^{hi} \psi_i)}{\partial x^h} + \Gamma^h_{ih} \psi g^{ik} \psi_k = 0$$

ou

$$g^{hi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\,\partial x^h}+\left(\Gamma^h_{lh}\,g^{li}+\frac{\partial g^{hi}}{\partial x^h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=0 \qquad (0)$$

équation aux dérivées partielles du second ordre en ψ, linéaire par rapport aux dérivées secondes.

10. Cherchons les caractéristiques de cette équation. Puisque les coefficients g_{ik} sont des fonctions des x^0, x^1, x^2, x^3 et qu'ils ne contiennent pas la fonction inconnue, ni ses dérivées premières, les caractéristiques ne sont pas déterminées à l'aide d'une intégrale choisie de (0), elles sont déterminées par l'équation (0) seulement[1]).

Ces caractéristiques sont des multiplicités,

$$S\,(x^0,\,x^1,\,x^2,\,x^3)=0\,,$$

définies par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre[2]):

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=0\,. \qquad (J)$$

Cette équation (J) a des caractéristiques elle aussi, qui sont des courbes. Ces courbes sont donc les bicaractéristiques de (0); leurs équations sont:

$$\frac{d\,x^0}{g^{0k}\dfrac{\partial S}{\partial x^k}}=\frac{d\,x^1}{g^{1k}\dfrac{\partial S}{\partial x^k}}=\frac{d\,x^2}{g^{2k}\dfrac{\partial S}{\partial x^k}}=\frac{d\,x^3}{g^{3k}\dfrac{\partial S}{\partial x^k}}=$$

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^0}\right)}{-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g^{ih}}{\partial x^0}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^i}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^h}\right)}=\frac{d\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^1}\right)}{-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g^{ih}}{\partial x^1}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^i}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^h}\right)}=$$

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^2}\right)}{-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g^{ih}}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^i}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^h}\right)}=\frac{d\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^3}\right)}{-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g^{ih}}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^i}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial x^h}\right)}\,.$$

Or on sait que ces équations définissent les géodésiques du ds^2 de l'E_4, le rapport commun a pour valeur la moitié de l'élément d'arc de ladite géodésique.

Mais il est connu que dans l'E_4 einsteinien, les trajectoires d'un point matériel sont les géodésiques du ds^2 de l'E_4.

---

[1]) Cf. Hadamard, Propagation, p. 315.

[2]) Hadamard, loc. cit., p. 271.

On voit donc que ces trajectoires ne sont pas autre chose que les bicaractéristiques de (0).

11. Cependant avec nos hypothèses, nous avons négligé la variabilité des fonctions g_{ik} et ψ par rapport à x^4, cela revient à considérer dans l'E_5, les variétés $x^4 = \text{const}$. Nous avons donc le résultat suivant:

Si l'on considère un Univers einsteinien E_4 comme une section $x^4 = const.$ d'un Univers E_5 à cinq dimensions $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ dont le ds^2 a pour coefficients les fonctions du tableau (10), *les équations de la gravitation sont les équations $R_{ik} = 0 (i, k = 0, 1, 2, 3)$ relatives à ce ds^2 et les trajectoires d'un point matériel, de masse assez petite pour ne pas modifier le champ gravifique d'une manière sensible, sont les bicaractéristiques de l'équation $R_{44} = 0$, qui détermine ψ lorsque les g^{ik} sont connus.*

L'équation $R_{44} = 0$ régit une propagation d'ondes; on peut la prendre pour l'équation de Schrödinger de la mécanique ondulatoire du point matériel.

Si le champ gravifique est nul, l'équation (0) est tout simplement l'équation de d'Alembert, ou si l'on veut, l'équation de Laplace de l'E_4; ses bicaractéristiques sont les droites de l'E_4 qui portent des vecteurs de temps, c'est-à-dire les lignes d'Univers d'un point matériel libre.

IV. Retour aux équations de l'électromagnétisme. Les équations du champ et l'équation de Schrödinger.

12. Nous avons obtenu la gravifique einsteinienne comme approximation d'une relativité à cinq dimensions en partant d'une forme de ds^2 définie par l'équation (9), où l'on a supposé les φ^i nuls.

Si on tient compte des φ^i, c'est-à-dire si l'on cherche à établir les équations du champ définissant les g_{ik}, les φ_i et ψ on est conduit à des équations compliquées, dont nous donnerons une approximation en supposant encore que les fonctions susdites ont des dérivées par rapport à x^4 qui sont négligeables; nous admettrons de plus que les φ_i et les F^{ik} ne sont pas considérables, nous les négligerons vis-à-vis de ψ. On voit donc que nous introduirons les potentiels électromagnétiques avec une prudence bien calculée, afin de ne pas brusquer le jeu des approximations.

Avec ces hypothèses, les composantes de la connexion affine de l'E_5 sont:

$$G^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

où les Γ_{ik}^{l} sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce attachés au ds^2 de l'E_4 einsteinien (x^0, x^1, x^2, x^3);

$$G_{4i}^{l} = G_{i4}^{l} = F^{l}_{\cdot i}$$

où l'indice l a été élevé au moyen des g^{ik} de l'E_4:

$$G_{ik}^{4} = 0$$
$$G_{i4}^{4} = \frac{\psi_i}{\psi}$$
$$G_{44}^{i} = -\psi\,\psi^i$$
$$G_{44}^{4} = 0\,.$$

Il faut bien entendre ici que les $G_{\alpha\beta}^{\gamma}$ sont des symboles de Christoffel de deuxième espèce du ds^2 de l'E_4, mais nos hypothèses nous permettent de distinguer les symboles de Christoffel du ds^2 de l'E_4, car dans le calcul du déterminant des $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)$ et de ses mineurs, on néglige les φ_i et leurs dérivées vis-à-vis de ψ.

13. Cela étant, on calcule aisément:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial G_{\alpha\gamma}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} + G_{\alpha\beta}^{\gamma} G_{\gamma\delta}^{\delta} - G_{\alpha\gamma}^{\delta} G_{\beta\delta}^{\gamma}$$

et l'on a les résultats suivants:

les $R_{ik} (i, k = 0, 1, 2, 3)$ sont ceux d'Einstein;

les $R_{i4} (i = 0, 1, 2, 3)$ sont les divergences du champ électromagnétique, prises par rapport au ds^2 de l'E_4[1]):

$$R_{i4} = \frac{\partial F^{h}_{\cdot i}}{\partial x^{h}} - \Gamma_{ih}^{l} F^{h}_{\cdot l} + \Gamma_{hr}^{r} F^{h}_{\cdot i} = F^{h}_{\cdot i/h}\,;$$

enfin:

$$R_{44} = -\psi \left[\frac{\partial (g^{ri}\psi_i)}{\partial x^{r}} + \Gamma_{ih}^{h}\,\psi^i \right].$$

Il n'y a là aucune difficulté, c'est du calcul algébrique très simple.

14. Nous ne pouvons plus écrire $R_{\alpha\beta} = 0$ pour déterminer les coefficients du ds^2 de l'E_5, car la présence du champ nous force à considérer un tenseur d'énergie. Dans un E_4 einsteinien, on pose, comme on sait:

$$R_{ik} = \varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right) \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

[1]) Cf. Kaluza, loc. cit.

où T_{ik} est le tenseur d'énergie et de quantité de mouvement et $\varkappa$ une constante de l'ordre de 10^{-47} C. G. S. Or,

$$T_{ik} = m u_i u_k \text{ et } T = m u_i u^i \left(u^i = \frac{d x^i}{d \sigma} \right).$$

Nous prendrons alors comme équations du champ dans E_5 les équations:

$$R_{\alpha\beta} = \mu \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \tag{13}$$

avec $T_{\alpha\beta} = m u_\alpha u_\beta$, $T = m u_\alpha u^\alpha$, μ étant une constante qui doit se confondre avec $\varkappa$ si l'on ne tient pas compte des variations d'x^4.

Cela admis, pour $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ les équations (13) redonnent les équations d'Einstein, à l'approximation que nous avons admise.

Pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, et $\beta = 4$ on aura:

$$F^{h\cdot}_{\cdot i/h} = \mu \left(m u_i \cdot u_4 - \frac{1}{2} g_{4i} T \right)$$

ou

$$F^{h\cdot}_{\cdot i/h} = \mu m (u_i u_4 - \varphi_i u_\alpha u^\alpha).$$

Or

$$u_4 = g_{4\alpha} u^\alpha = 2 \varphi_i \frac{d x^i}{d s} + \psi^2 \frac{d x^4}{d s}$$

et

$$u_\alpha u^\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1 .$$

Par conséquent, en négligeant $\varphi_i \frac{du^i}{ds}$ et φ_i devant $\psi^2 \frac{du^4}{ds}$, ce qui est conforme à nos hypothèses, il vient:

$$F^{h\cdot}_{\cdot i/h} = \mu m u_i \psi^2 \frac{d x^4}{d s}$$

Or nous avons posé plus haut:

$$d x^4 = \frac{e}{m} d \sigma$$

nous admettrons que dans un E_5 il faut poser:

$$d x^4 = \frac{e}{m} d s$$

et si l'on pose encore $e u_\alpha = s_\alpha$, les s_i seront les composantes du courant dans E_5, s_0, s_1, s_2, s_3 se réduisant aux composantes du courant dans E_4, si $x_4 = \text{const}$. On voit que:

$$F^{h\cdot}_{\cdot i/h} = \mu \psi^2 \cdot s_i .$$

Or les équations de Maxwell s'écrivent dans un Univers einsteinien quelconque:

$$F^{h}_{\cdot\, i/h} = s_i \ .$$

Admettons donc que $\mu\, \psi^2$ est très voisin de l'unité, ce qui donne l'ordre de grandeur de ψ puisque μ est de l'ordre de $\varkappa$, les équations (13) pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $\beta = 4$ redonnent avec nos approximations l'un des groupes des équations de Maxwell. M. Kaluza a montré que l'autre groupe résulte d'une identité à laquelle satisfont les symboles de Christoffel du ds^2.[1])

Enfin l'équation (13) pour laquelle $\alpha = \beta = 4$ s'écrit:

$$\frac{\partial\,(g^{r\,i}\,\psi_i)}{\partial\, x^r} + \Gamma^{h}_{i\,h}\,\psi^i = -\,\mu\,\psi^3 \cdot \frac{e^2}{m}\ ,$$

avec les approximations permises, et après division par ψ.

Or si $\mu\psi^2$ est voisin de l'unité, on aura:

$$\frac{\partial\,(g^{r\,i}\,\psi_i)}{\partial\, x^r} + \Gamma^{h}_{i\,h}\,\psi^i + \frac{e^2}{m}\,\psi = 0\ . \qquad (0_1)$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui définit ψ lorsque les g_{ik} sont connus. Les bicaractéristiques de (0_1) sont encore les géodésiques du ds^2 de l'E_4, et par conséquent, les trajectoires d'un point matériel, si le champ électromagnétique est négligeable vis-à-vis du champ gravifique; c'est une équation de Schrödinger.

Si on néglige le champ de gravitation, ou plutôt si l'on néglige la courbure de l'espace, cette équation se réduit à:

$$\Box\,\psi + \frac{e^2}{m}\,\psi = 0\ .$$

Les solutions périodiques de la forme

$$\psi = \varphi\,(x,\, y,\, z)\; e^{2\pi i \nu t}$$

sont telles que

$$\Delta\,\varphi + \left(\frac{4\pi^2\,\nu^2}{c^2} + \frac{e^2}{m}\right)\psi = 0\ .$$

C'est l'équation même de Schrödinger avec le terme $\frac{e^2}{m}\,\psi$ en plus. Or pour les fréquences ν qui intéressent la physique de l'atome, $\frac{e^2}{m}$ est négligeable vis-à-vis de $\frac{4\,\pi^2\,\nu^2}{c^2}$. Notre approximation est donc bonne.

---

[1]) Loc. cit.

15. Les hypothèses simplificatrices qui nous ont permis de négliger le potentiel électromagnétique vis-à-vis du potentiel gravifique et de ψ^2, qu'on pourrait appeler le *potentiel des ondes*, nous ont donné la mécanique einsteinienne comme première approximation, et les équations du champ électromagnétique. De plus, en généralisant la théorie de la relativité par une extension à E_5, nous avons pu donner une interprétation nouvelle de l'équation de Schrödinger.

Le maniement des équations (13) lorsqu'on tient compte de tous les facteurs est beaucoup plus compliqué. La relation entre les bicaractéristiques de l'équation (13) où $\alpha = \beta = 4$ et les géodésiques de l'E_5 est moins simple que nous ne l'avions cru tout d'abord.[1])

Cependant le fait que nous pouvons retrouver les équations du champ et celles du mouvement données par les théories de l'E_4 dans le cadre d'une nouvelle relativité dans un E_5, et qu'en plus de cela nous obtenons une interprétation de l'équation de Schrödinger, nous encourage à poursuivre notre tentative.

Si le champ électromagnétique devient prédominant, les méthodes d'approximation doivent être transformées de bout en bout. Ce que nous avons fait jusqu'ici c'est de la mécanique ondulatoire macroscopique; pour retrouver les lois des phénomènes atomiques dans leurs détails, il faut faire de la mécanique ondulatoire microscopique.

---

[1]) Cf. notre quatrième note, in fine.