Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 2 (1929)

Heft: II

Artikel: Die Temperaturschwankungen der Elektroden als Ursache der Hysterese von Entladungen

Autor: Wehrli, M. / Hardung, V.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109443

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Temperaturschwankungen der Elektroden als Ursache der Hysterese von Entladungen

von **M. Wehrli** und **V. Hardung.**

(9. IV. 1929.)

Es wird die Temperatur einer Elektrode von verschiedener Form, Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität berechnet beim Auftreffen eines periodisch veränderlichen Energiestromes W_0.

Man erhält drei Gesetze: Die Temperaturschwankungen der Elektroden nehmen mit steigender Grundfrequenz von W_0 ab; bei hohen Frequenzen wird die Elektrodentemperatur konstant. Die Temperaturschwankungen eilen sowohl der auftreffenden als auch der abfliessenden Energie nach. Die Phasenverschiebungen liegen im ersten Falle zwischen 0 und $\pi/2$, im zweiten zwischen 0 und $\pi/4$. Sie nehmen mit steigender Frequenz zu.

Diese thermischen Beziehungen bilden die Grundlage der am häufigsten vorkommenden Hysterese von Entladungen mit kleinem Elektrodenabstand. Es wird eine allgemeine Methode zur Berechnung der dynamischen Charakteristiken aufgestellt. Der Zusammenhang zwischen der Energie W_0, der Stromstärke und der Elektrodenspannung wird dabei von der Theorie der stationären Entladungen auf die nichtstationären ausgedehnt. Zur Ermittlung der Beziehung zwischen Elektrodentemperatur, Stromstärke und Spannung (Charakteristische Fläche) werden zwei experimentelle Methoden angegeben.

Unter speziellen Voraussetzungen ergibt sich die SIMON'sche Differentialgleichung, deren Konstanten vollständig erklärt werden können.

§ 1. *Einleitung.* Eine Hysterese tritt ein, wenn zwei gekoppelte Variable verschieden grosse Einstellzeiten haben. Nach den grundlegenden Arbeiten von H. SIMON[1]) und seinen Mitarbeitern weiss man, dass es beim Lichtbogen die Elektrodentemperaturen sind (nach H. SIMON im wesentlichen die Temperatur ϑ_0 der Kathode), welche die grossen Einstellzeiten besitzen, während sich bei vorliegender Elektrodentemperatur die übrigen Variablen, wie Stromstärke und Entladungsspannung, sehr rasch einstellen[2]).

---

[1]) H. SIMON, Phys. Zeitschr. **6**, 297, 1905 und **7**, 433, 1906.

Für weitere Literatur s.: A. HAGENBACH, Der elektrische Lichtbogen, Handbuch der Radiologie IV, 2, zweite Auflage, 1924. — A. HAGENBACH, Der elektrische Lichtbogen, Handbuch der Physik XIV, 324, 1927. Verlag J. Springer, Berlin.

[2]) Dass bei genügend raschen Strom- oder Spannungsänderungen schliesslich auch diese kurzen Einstellzeiten zu einer Hysterese in der Entladungsbahn führen können, ist sehr wohl möglich. Von solchen Vorgängen soll in dieser Arbeit abgesehen werden, ebenso von der thermischen Hysterese in grösserer Entfernung der Elektroden, s. R. SEELIGER, Jahrb. d. Radioakt. **20**, 353, 1923.

Das grundlegende Problem ist deshalb, die Temperatur der Elektroden als Funktion der Zeit zu bestimmen, eine rein *thermodynamische Aufgabe*, die hier an die Spitze gestellt, möglichst allgemein durchgeführt werden möge. Ferner wird der Einfluss der Form, der Wärmeleitfähigkeit λ und der Wärmekapazität c der Elektroden näher studiert und auf die dynamischen Charakteristiken angewendet.

Kapitel I.

§ 2. *Das thermodynamische Problem.* Auf irgend eine Elektrode treffe pro Sekunde die Energie W_0, welche vollständig als Wärme aufgenommen werden möge. Die Hysterese wird dann merklich, wenn die zeitliche Änderung von W_0 einen gewissen kritischen Wert überschreitet. W_0 kann eine beliebige Funktion der Zeit t sein. Es sollen nur die zwei wichtigsten Fälle behandelt werden, nämlich:

1. Der Abschaltvorgang, wo das W_0 von einer bestimmten Zeit an Null ist.
2. Der periodische Fall, wobei W_0 eine periodische Funktion der Zeit t wird und als Fourierreihe angesetzt werden kann:

$$W_0 = \frac{B_0}{2} + \sum_1^N A_m \sin(m\,\omega\,t + a_m) + B_m \cos(m\,\omega\,t + a_m)\,. \quad (1)$$

Wegen der Periodizität von W_0 wird auch die Temperatur des Elektrodenfleckes eine periodische Funktion der Zeit sein und sich ebenfalls darstellen lassen in der Form:

$$\vartheta_0 = \frac{b_0}{2} + \sum_1^N (a_m \sin m\,\omega\,t + b_m \cos m\,\omega\,t) \quad (2)$$

ω bedeutet dabei die Kreisfrequenz der Grundperiode, die m sind ganze Zahlen, B_0, A_m, B_m, und b_0, a_m, b_m die konstanten Fourierkoeffizienten von W_0, bezw. ϑ_0. Die Energie wird im allgemeinen gegen die Temperatur gewisse Phasenverschiebungen a_m aufweisen, welche man sowohl bei der Energie, als auch bei der Temperatur einführen könnte. Ersteres erweist sich für die Rechnung als einfacher.

Die *Elektrode* sei homogen, zylindrisch und trage am Ende einen beliebig geformten Ansatz (s. Fig. 1), dessen Oberfläche O in der Sekunde die Energie W_4 abstrahlen möge.

Der Ansatz bildet ein Wärmereservoir, das pro Sekunde eine Wärmevermehrung W_5 aufweise, der Stiel führe pro Sekunde die Energie W_6 ab. Der *Erhaltungssatz der Energie* liefert die Momentangleichung:

$$W_0 = W_4 + W_5 + W_6 \tag{3}$$

Es möge hier ausdrücklich betont werden, dass W_0 nur den in Wärme umgewandelten Teil der auf die Elektrode auftreffenden Energie darstellt. Hat man die Grössen W_4, W_5 und W_6 als Funktion der Temperatur ϑ_0, so erhält man aus Gleichung (3)

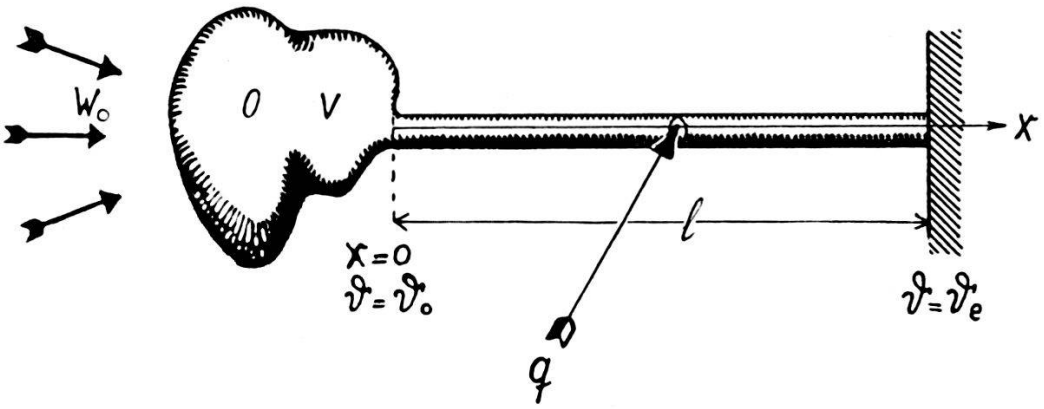


Fig. 1.

den gesuchten Temperaturverlauf. Vorläufig sollen nur solche Entladungen betrachtet werden, wie sie von DE GROOT[1]) zuerst studiert worden sind. Dabei ist der Kathodenfleck identisch mit der Oberfläche O des Elektrodenansatzes, und die Temperatur dieser Oberfläche nach E. STÜCKELBERG[2]) konstant. Für die abgestrahlte Energie W_4 ergibt sich in erster Näherung[3]) die Beziehung:

$$W_4 = h_1 \cdot O \cdot \vartheta_0 \tag{4}$$

wenn h_1 die NEWTON'sche Abstrahlungskonstante bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass im Innern des Elektrodenansatzes überall die Temperatur ϑ_0 herrsche[4]), wird die Energiezunahme:

$$W_5 = V \cdot \varrho \cdot c \cdot \frac{d\,\vartheta_0}{d\,t}\,. \tag{5}$$

V bedeutet dabei das Volumen des Elektrodenansatzes, ϱ seine

[1]) W. DE GROOT, Physica **5**, 121, 234, 1925.

[2]) E. STÜCKELBERG, Helv. Phys. acta **1**, 75, 1928.

[3]) Über die genauere Rechnung bei der schwingenden Entladung, s. § 11.

[4]) Diese Annahme verlangt, dass der Elektrodenansatz klein ist gegen die Länge der eindringenden Temperaturwelle (vergl. § 3).

Dichte und c seine spezifische Wärme. Die Differentiation der Gleichung (2) nach der Zeit ergibt mittels Beziehung (5) für W_5:

$$W_5 = V \cdot \varrho \cdot c \cdot \omega \sum_1^N (a_m \cos m\,\omega\,t - b_m \sin m\,\omega\,t) \cdot m\,. \tag{6}$$

§ 3. Zur *Berechnung der Wärmeabfuhr durch den Stiel* dient als Grundlage die FOURIER'sche Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung[1]):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - h_2 \vartheta, \tag{7}$$

worin:

$$k^2 = \frac{\lambda}{\varrho\, c} \text{ und } h_2 = \frac{h_3 \cdot p}{\varrho \cdot c \cdot q}\,. \tag{8}$$

Es bedeuten dabei: ϑ die Temperatur längs des Stieles, λ der Wärmeleitungskoeffizient, h_3 die Abstrahlungskonstante für eine mittlere Temperatur des Stieles, p sein Umfang und q sein Querschnitt. Die x-Achse liege in der Stielachse, so dass für $x = O$, $\vartheta = \vartheta_0$ wird (s. Fig. 1). Der Stiel sei sehr lang, d. h. es gelte für

$$x = \infty,\ \vartheta = 0\,. \tag{9}$$

In den praktischen Fällen nimmt die Temperatur wegen der starken seitlichen Abstrahlung sehr rasch ab und erreicht nach wenigen cm nur noch einige Promille des Wertes ϑ_0. Die durch den Stiel abgeführte Wärme wird:

$$W_6 = -\lambda\, q \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right\}_{x=0}. \tag{10}$$

Mittels Gleichung (2) als Randbedingung liefert die Differentialgleichung (7) die Temperaturabnahme längs des Stieles zu:

$$\vartheta = \frac{b_0}{2}\, e^{-\frac{\sqrt{h_2}}{k} \cdot x} + \sum_1^N e^{-\frac{\gamma_m}{k} \cdot x} \left\{ a_m \sin\left(m\,\omega\,t - \frac{\delta_m}{k} \cdot x\right) + b_m \cos\left(m\,\omega\,t - \frac{\delta_m}{k} \cdot x\right)\right\}. \tag{11}$$

Die Grössen γ_m und δ_m sind dabei:

$$\gamma_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{h_2 + \sqrt{h_2^2 + (m\,\omega)^2}} \text{ und } \delta_m = \frac{m\,\omega}{2} \frac{1}{\gamma_m}\,. \tag{12}$$

[1]) Encyklopädie der math. Wissenschaften V, 4: E. W. HOBSON und H. DIESSELHORST, Wärmeleitung.

Die Summe in der Gleichung (11) stellt die gedämpfte Temperaturwelle dar, welche sich im Stiele fortpflanzt.

Differentiert man die Beziehung (11) nach x und setzt den Wert in Gleichung (10) ein, so erhält man die Wärmeabfuhr des Stieles zu:

$$W_6 = C_1 \cdot \lambda q \frac{b_0}{2} + q \sqrt{\lambda \cdot \varrho c} \sum_1^N \sqrt{\gamma_m^2 + \delta_m^2} \left\{ a_m \sin (m \omega t + \varphi_m) + b_m \cos (m \omega t + \varphi_m) \right\} . \tag{13}$$

Für C_1 gilt dabei:[1])

$$C_1 = \frac{\sqrt{h_2}}{k} = \sqrt{\frac{h_2 \varrho c}{\lambda}} . \tag{14}$$

Die φ_m sind Phasenwinkel zwischen der Temperatur ϑ_0 und der durch den Stiel abströmenden Energiewelle.

Ihre Grösse errechnet sich nach:

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{\delta_m}{\gamma_m} . \tag{15}$$

§ 4. Aus der *Energiebilanz* (3) erhält man für die auffallende Energie W_0, indem man darin die Werte der Gleichungen (1), (2), (4), (6) und (13) einsetzt:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{B_0}{2} + \sum_1^N A_m \sin (m \omega t + a_m) + B_m \cos (m \omega t + a_m) \\ &= (h_1 O + C_1 \cdot \lambda \cdot q) \frac{b_0}{2} + \\ &+ \sum_1^N \Big\{ a_m \Big[h_1 \cdot O \sin m \omega t + V \varrho c m \omega \cos m \omega t \\ &\quad + q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \cdot \sin (m \omega t + \varphi_m) \Big] \\ &\quad + b_m \Big[h_1 O \cdot \cos m \omega t - V \varrho c m \omega \sin m \omega t \\ &\quad + q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \cos (m \omega t + \varphi_m) \Big] \Big\} . \end{aligned} \tag{16}$$

---

[1]) Im stationären und quasistationären Falle (vergl. § 5) kann statt der Grenzbedingung (9) auch die genauere Bedingung, für $x = l$, $\vartheta = 0$ verwendet werden. Man hat dann für C_1 den Wert

$$C_1 = \frac{\sqrt{h_2}}{k} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\left(\frac{\sqrt{h_2}}{k} \cdot l\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\sqrt{h_2}}{k} \cdot l\right)}$$

zu setzen.

Die mathematische Aufgabe besteht darin, die letzte Summe in eine Fourierreihe zusammenzuziehen und durch Koeffizientenvergleich die Beziehungen zwischen den A_m, B_m, α_m, und den a_m und b_m auszuwerten. Das Resultat dieser Rechnung ergibt aus den stationären Gliedern:

$$\frac{B_0}{b_0} = h_1 O + C_1 \lambda \cdot q \,. \tag{17}$$

und für die übrigen Glieder:

$$\left(\frac{A_m}{a_m}\right)^2 = \left(\frac{B_m}{b_m}\right)^2 = [V \varrho c m \omega + q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \sin \varphi_m]^2$$
$$+ [h_1 O + q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \cos \varphi_m]^2 \,. \tag{18}$$

Die Phasenwinkel α_m berechnen sich zu:

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{V \varrho c m \omega + q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \sin \varphi_m}{h_1 O \quad + q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \cos \varphi_m} \tag{19}$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (17), (18) und (19), die als *thermische Beziehungen* bezeichnet werden mögen, kann aus der gegebenen, auf die Elektrode auffallenden Energie W_0 die Temperatur ϑ_0 als Funktion der Zeit errechnet werden und umgekehrt. Diese Rechnung hängt nur ab von der Form der Elektrode und ihren thermischen Konstanten. Ob es sich dabei um eine Anode oder um eine Kathode handelt, ist gleichgültig.

§ 5. *Anwendungen.* I. Der stationäre Fall. Dabei verschwinden die Koeffizienten A_m, B_m, a_m, b_m in den Summenausdrücken der Gleichungen (1), (2), (16), und es wird

$$\vartheta_0 = \frac{W_0}{h_1 O + C_1 \lambda q} \tag{20}$$

d. h. die Temperatur ϑ_0 ist um so kleiner, je grösser die Abstrahlung und die Wärmeableitung sind.

II. Der quasistationäre Fall.

$$\lim \omega = 0 \,. \tag{21}$$

Die Gleichung (12) ergibt:

$$\gamma_m = \sqrt{h_2} \qquad \delta_m = 0 \,.$$

Nach Beziehung (15) und (19) werden die Pha enwinkel

$$\varphi_m = \alpha_m = 0 \,.$$

Die Gleichung (18) lautet mittels Gleichung (14)

$$\frac{A_m}{a_m} = \frac{B_m}{b_m} = h_1 O + C_1 \lambda q . \tag{22}$$

Die Temperatur ϑ_0 wird nach Gleichung (1), (2), (17) und (22)

$$\vartheta_0 = \frac{B_0}{2\,(h_1 O + C_1 \lambda q)} + \sum_1^N \frac{A_m \sin m\,\omega\,t + B_m \cos m\,\omega\,t}{h_1 O + C_1 \lambda q} = \frac{W_0}{h_1 O + C_1 \lambda q} \tag{23}$$

d. h. es reihen sich einfach stationäre Zustände aneinander.

III. Der allgemeine, periodische Fall. Damit die Hysterese eintritt, oder damit eine Abweichung vom quasistationären Falle merkbar wird, ist notwendig, dass mindestens eine von zwei Bedingungen erfüllt ist. Die erste Bedingung bezieht sich auf den Stiel der Elektrode und ergibt sich aus den Gleichungen (8), (12) und (15). Sie verlangt, dass $m\,\omega$ in die Grössenordnung von h_2 fällt. Je grösser also die Abstrahlkonstante h_3, der Stielumfang p, und je kleiner die Dichte ϱ, die Wärmekapazität c und der Stielquerschnitt q ist, bei um so höhern Frequenzen macht sich die Hysterese bemerkbar.

Die zweite Bedingung bezieht sich auf den Elektrodenansatz und fordert nach Gleichung (18) und (19), dass der Wert von $V\,\varrho\,c\,m\,\omega$ neben $(h_1 O + C_1 \lambda q)$ merklich werden muss. Je kleiner der Elektrodenansatz V und je grösser die Abstrahlung $h_1 O$ ist, desto höhere Frequenzen sind nötig, damit die Hysterese eintritt.

Hat man bestimmte Elektroden, so gibt es stets ein ω, bei dem die Hysterese eintritt; man muss das ω nur gross genug machen.

Für den Einfluss der Frequenz ω ergeben sich aus den Gleichungen (15), (18) und (19) drei Gesetze:

a) Die Amplituden a_m und b_m der Temperaturschwankungen nehmen bei endlicher auffallender Energie W_0 mit steigendem ω ab und erreichen für $\lim \omega = \infty$ den Wert Null, d. h. die Elektrodentemperatur ϑ_0 wird für hohe Frequenzen konstant.

b) Die Temperaturschwankungen zeigen gegenüber der auffallenden Energie Phasennacheilungen α_m, welche bei den höhern Harmonischen grösser werden und im Grenzfalle $\omega = \infty$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreichen.

c) Analoge Phasenverschiebungen φ_m weist die Temperatur ϑ_0 gegen die durch den Stiel abströmende Energiewelle W_6 auf, welche bei $\lim \omega = \infty$ den Wert $\frac{\pi}{4}$ erreichen.

Diese Gesetze bilden die Grundlage der Hysterese von Entladungen, sie gelten an der Kathode und der Anode.

§ 6. *Die Stabelektrode* ergibt sich als Spezialfall der obigen Beziehungen, wenn man das Volumen V des Ansatzes Null setzt, und statt der Oberfläche O den Querschnitt q einführt. Dabei ist für ϑ_0 eine mittlere Grösse zu nehmen, bezogen auf den ganzen Stabquerschnitt. Gleichung (18) lautet dann:

$$\frac{A_m}{a_m} = \frac{B_m}{b_m}$$

$$= q \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2) \sin^2 \varphi_m + (h_1 + \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \cos \varphi_m)^2} \quad (24)$$

und aus Gleichung (19) wird

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \sin \varphi_m}{h_1 + \sqrt{\lambda \varrho c (\gamma_m^2 + \delta_m^2)} \cos \varphi_m} . \quad (25)$$

Da nach den Gleichungen (12) die γ_m und δ_m mit ω über alle Massen wachsen, wird gemäss Beziehung (24) auch beim Stabe für grosse Frequenzen die Temperatur konstant, unabhängig von der Zeit.

Neu ist, dass für $\lim \omega = \infty$ nach der Gleichung (25) die Phasennacheilungen $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$ werden.

§ 7. *Der Abschaltvorgang* soll für den speziellen Fall eines beträchtlichen Elektrodenansatzes V behandelt werden, wobei aus dem stationären Zustande zur Zeit $t = o$ abgeschaltet werde. Die Energie W_0 wird von da an gleich Null. Der Wärmeabfluss durch den Stiel sei quasistationär nach der Gleichung:

$$W_6 = C_1 \lambda q \vartheta_0 \quad (26)$$

Mit dem Ansatze $\vartheta_0 = C_2 e^{-C_3 t}$ erhält man aus den Beziehungen (4), (5) und (26) durch Einsetzen in die Energiebilanz (2):

$$0 = h_1 O - V \varrho c C_3 + C_1 \lambda q \quad (27)$$

woraus sich das C_3 berechnen lässt. Die Anfangsbedingung (20) führt zum Temperaturverlauf:

$$\vartheta_0 = \frac{W_0}{h_1 O + C_1 \lambda q} \cdot e^{-\frac{h_1 O + C_1 \lambda q}{V \varrho c} \cdot t} . \quad (28)$$

Bestimmt man experimentell den Temperaturabfall des Elektrodenfleckes nach dem Abschalten einer Gleichstromentladung, so muss sich eine Exponentialfunktion[1]) ergeben. Gleichung (28) liefert so eine direkte Methode zur Bestimmung der eine Elektrode kennzeichnenden Grösse $\frac{h_1 O + C_1 \lambda q}{V \varrho c}$.

Kapitel II.

§ 8. *Das elektrische Problem.* Neben die thermischen Beziehungen (1), (2), (17), (18), (19) treten zwei elektrische Gesetze.

Das erste gibt den Zusammenhang zwischen der auf die Elektroden auffallenden Energie W_0, der Stromstärke I und der Entladungsspannung U. Das zweite setzt die Elektrodentemperaturen in Beziehung mit der Spannung und der Stromstärke. Zur Aufstellung des ersten Gesetzes sollen die von M. Wehrli[2]) aufgestellten Gleichungen verwendet werden, und zwar in ihrer einfachsten Form, d. h. unter Vernachlässigung von chemischen Umsetzungen, Abschmelzen, Verdampfen oder Kondensieren an den Elektroden[3]). Nach der Gleichung (23) der Arbeit 1 ergibt sich für die gesamte an der *Kathode* für Wärmeumsetzung zur Verfügung stehenden Energie $W_2 + W_3$ die Gleichung:

$$W_2 + W_3 = I\,(U_K - \varphi^-) \gtreqless W_0 \tag{29}$$

W_2 bedeutet dabei die durch die Elektrode abgeführte Wärme, während die Energie W_3 durch das Gas abgeleitet wird.

In wiefern das W_3 bei der Hysterese eine Rolle spielt, muss das Experiment zeigen. U_K ist der Kathodenfall und φ^- die Austrittsspannung der Elektronen aus dem Kathodenmaterial.

An der *Anode* erhält man aus Gleichung (3) der Arbeit 2 entsprechend

$$W_2 + W_3 = I\,(U_A + \varphi^-) \gtreqless W_0 \tag{30}$$

U_A bezeichnet dabei den Anodenfall.

Zur Einführung der gesamten Entladungsspannung U bedient man sich der Gleichung:

$$U = U_K + U_G + U_A \tag{31}$$

U_G ist der Spannungsabfall in der Entladungssäule.

---

[1]) Wegen der Newton'schen Abstrahlung darf diese Beziehung nicht für zu grosse Temperaturintervalle benützt werden.

[2]) M. Wehrli, Helv. phys. acta I, 247 (Arbeit 1), 449 (Arbeit 2), 1928.

[3]) Diese Vorgänge können leicht berücksichtigt werden mittels der Gleichungen (21) und (22) der Arbeit 1. Auch die Glieder $I_d^+ V_J$, $I_d^- U_d^-$, $I_d^+ U_d^+$ werden wegen ihrer Kleinheit hier weggelassen.

Gleichung (29) wird dann:

$$W_2 + W_3 = I[U - (U_A + U_G + \varphi)] \geqq W_0 \qquad (32)$$

was für die Kathode die gesuchte Beziehung zwischen der auffallenden Energie und den Grössen I und U darstellt.

§ 9. *Die charakteristischen Flächen.* Die Beziehungen zwischen den Elektrodentemperaturen an der Kathode, bezw. an der Anode, der Stromstärke I und der Spannung U können theoretisch noch nicht festgelegt werden. Dagegen gelingt es experimentell mittels statischer Messungen, diese Funktionen, die charakteristische Flächen genannt werden mögen, zu ermitteln. Massgebend für die Entladung ist die Kathodentemperatur ϑ_0, d. h. die charakteristische Fläche der Kathode. Indem man die Anode sehr gross wählt, künstlich abkühlt, z. B. mit Wasserkühlung, und nicht zu grosse Stromstärken nimmt, kann man dieselbe so kühl halten, dass ihre Temperaturänderung den Anodenfall nicht verändert[1]). Es soll deshalb im weitern nur die charakteristische Fläche der *Kathode* berücksichtigt werden. Um diese zu ermitteln, verfährt man wie folgt: Man misst für eine bestimmte Kathode die normalen Charakteristiken und die Kathodentemperatur als Funktion der Stromstärke I. Dann ändert man an der Elektrode einen Parameter p, der die Elektrodentemperatur ϑ_0 direkt beeinflusst (z. B. die Elektrodenform), und misst von neuem. Man erhält so durch Variieren von p die zwei Kurvenscharen:

$$\begin{aligned} f_1(U, I, p) &= 0 \\ f_2(\vartheta_0, I, p) &= 0 \end{aligned} \qquad (33)$$

Die Elimination von p ergibt die gesuchte charakteristische Fläche in der Form:

$$\psi(U, I, \vartheta_0) = 0 \text{ (charakteristische Fläche).} \qquad (34)$$

Als solcher Parameter eignet sich z. B. der Stiel-Durchmesser einer Elektrode, die am Ende eine Kugel trägt. Der Kathodenfleck bleibt dabei gleich der Kugeloberfläche. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Anwendung einer Hilfsheizung, wobei als Parameter p die Heizstromstärke dienen kann.

---

[1]) Beim schwingenden Bogen bleibt deshalb das $(U_A + U_G)$ besonders bei kurzer Bogenlänge in erster Näherung konstant. Ganz anders dagegen bei Wechselstromentladungen, dabei wird die Anode zur Kathode, und es kommt bei der Wiederzündung als Kathode sehr darauf an, wie heiss die Elektrode als Anode gewesen ist. Man muss dann sowohl die thermischen Beziehungen an der Anode als auch ihre charakteristische Fläche berücksichtigen.

H. Simon (l. c.) bestimmt die charakteristische Fläche wie folgt: Für eine bestimmte Elektrode, d. h. auf der normalen Charakteristik, soll gelten:

$$U\,I = C_4\,O \cdot \vartheta_0 \tag{35}$$

wobei C_4 eine Konstante und O die Grösse des Kathodenfleckes bedeutet. H. Simon misst dabei für eine Stromstärke die Grössen O und ϑ_0, und erhält aus Gleichung (35) das $O \cdot \vartheta_0$ der ganzen

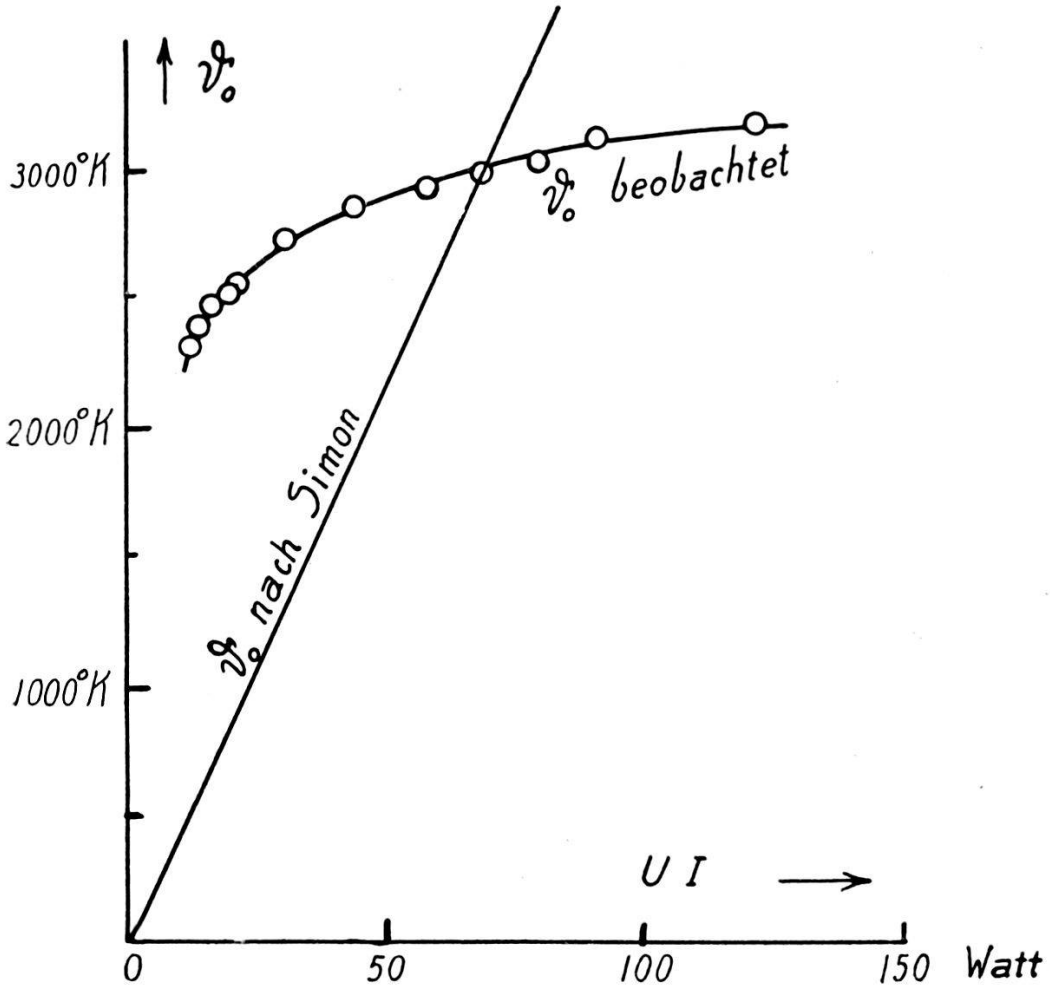


Fig. 2.

Charakteristik. Gleichung (35) kann mit den Messungen von M. Wehrli[1]) für die Bogenentladung an Wolfram in Stickstoff geprüft werden.

In Fig. 2 sind die beobachteten ϑ_0-Werte (Kreise) als Funktion der gemessenen Energien $U\,I$ aufgetragen. Die Bogenlänge war dabei 2 mm, der Druck 172 mm und die Kathode bestand aus einer Kugel von 1,81 mm Durchmesser an einem 0,34 mm dicken Stiele. Da der Kathodenfleck O bei diesen Messungen

[1]) M. Wehrli, Helv. phys. acta **1**, 323, 1928.

konstant bleibt (gleich der Kugeloberfläche), müsste nach der SIMON'schen Gleichung (35) das ϑ_0 eine lineare Beziehung von $U\,I$ sein, welche durch den Nullpunkt geht. Wie man aus Fig. 2 sieht, ist das durchaus nicht der Fall, sondern die Temperatur steigt, wie man das aus dem Bogenmechanismus erwartet, bei kleinen Energien viel rascher als bei grossen. Die Annahme von H. SIMON ist zu einfach[1]), und man wird deshalb die Gleichung (35) durch die experimentellen Messungen von ϑ_0 gemäss (33) zu ersetzen haben.

Die zweite Annahme, welche H. SIMON macht, besteht darin, dass die Kurven mit konstantem Produkt $O\,\vartheta_0$ Gerade durch den Nullpunkt sein sollen (TF-Strahlen), d. h. es gelte

$$U = C_5\,I \qquad O \cdot \vartheta_0 = \text{const} \tag{36}$$

Kennt man das $O \cdot \vartheta_0$ auf einer Charakteristik, so ist mittels Gleichung (36) die charakteristische Fläche, d. h. die Beziehung zwischen U, I und $O \cdot \vartheta_0$ festgelegt. Wesentlich für die Theorie sind die Kurven konstanter Temperatur, die bei unveränderlichem Kathodenfleck O mit den SIMON'schen Geraden zusammenfallen. Sie sollen *Isothermen* genannt werden. Einen zwingenden Grund, dass diese Isothermen Gerade sein müssen, die durch den Nullpunkt gehen, gibt es kaum. Nimmt man im Gegenteil an, dass an der Bogenkathode ähnliche Verhältnisse herrschen wie an einer fremd geheizten Glühkathode in dichten Gasen, so erwartet man eher gekrümmte Kurven, wie sie z. B. von H. KÖNIG[2]) gemessen worden sind. Diese haben eine schwache S-Form, herrührend von der Überlagerung der Thermionisation der Kathode und der Ionisation im Gase, und tangieren die U-Achse. In erster Näherung kann die SIMON'sche Annahme, besonders bei hohen Stromstärken, zutreffen. Man wird aber besser die oben angegebene experimentelle Bestimmungsart der charakteristischen Fläche verwenden.

§ 10. *Die dynamischen Charakteristiken.* Neben den fünf thermischen [(1), (2), (17), (18) und (19)] und den zwei elektrischen Gleichungen (32) und (34) ist noch das KIRCHHOFF'sche Gesetz zu berücksichtigen in der Form

$$E = I \cdot R + U\,, \tag{37}$$

wenn E die EMK und R den Widerstand des Stromkreises bedeutet. Die dynamischen Charakteristiken sind solche Beziehungen von I und U, welche alle acht Gleichungen erfüllen. Praktisch

[1]) H. SIMON sagt das schon selbst und verweist auf das Experiment.

[2]) H. KÖNIG, Helv. phys. acta **1**, 277, 1928.

ist gewöhnlich die EMK als Funktion der Zeit vorgegeben, und es werden dazu passende U und I gesucht. Gibt man aber z. B. das I vor, so sagt Gleichung (37) nichts anderes, als dass es bei einem passend gewählten R stets ein zugehöriges E gibt. Für den inneren Bogenmechanismus ist Gleichung (37) ohne Bedeutung und kann weggelassen werden.

Die speziellen Voraussetzungen an der Anode und der Gassäule nach § 9 fallen dahin, wenn man statt der Gesamtspannung U den Kathodenfall U_K einführt, d. h. die *dynamischen Kathodenfälle* untersucht. Der Kathodenfall ist nämlich bei konstantem I unabhängig von der Bogenlänge und den Vorgängen an der Anode, wie M. Wehrli (l. c.) gezeigt hat. Die dynamischen Kathodenfälle bestimmen sich als Funktion der Stromstärke I mit den oben verwendeten fünf thermischen Beziehungen an der Kathode. An Stelle der zwei elektrischen Gleichungen tritt die Relation (29) und die Fläche:

$$\psi_1 (U_K, I, \vartheta_0) = 0 , \tag{38}$$

wobei ψ_1 nach dem oben angegebenen Verfahren experimentell ermittelt werden kann. Ein ganz analoges Gleichungssystem von sieben Gleichungen gilt an der Anode.

§ 11. *Die schwingende Entladung.* Bei dieser Entladung geht der Strom I nie durch den Wert Null, d. h. die eine Elektrode bleibt stets Kathode. Ob die Entladung von selbst schwingt, oder ob sie durch eine äussere EMK zum Schwingen gezwungen wird, ist für das folgende unwesentlich. Ferner ist W_0, I, U und ϑ_0 periodisch, so dass die Voraussetzungen der Theorie zutreffen.

Für den quasistationären Fall (§ 5 II) bewegt sich die dynamische Charakteristik auf der statischen.

Für den allgemeinen, periodischen Fall gelten die Gesetze a), b) und c) des § 5. Aus a) und der charakteristischen Fläche (31) folgt der allgemeine *Satz*:

Bei grosser Grundfrequenz ω bleibt die Temperatur der Kathode konstant, d. h. die dynamische Charakteristik bewegt sich auf einer Isothermen. Sie ist deshalb eine Kurve, welche keine Fläche umschreibt.

Es ergibt sich aus obigem Satze eine Methode[1]) zur Bestimmung der Isothermen mittels Hochfrequenzmessungen, und zwar

[1]) Diese Isothermenmessung führt zu einer recht vorteilhaften Bestimmung der charakteristischen Flächen, die auch in Strombereichen geht, wo die statische Entladung und damit die Methode des § 9 unmöglich wird. Ermittelt man nämlich zu den Hochfrequenzcharakteristiken noch die zugehörigen Temperaturen ϑ_0, so ist die charakteristische Fläche gegeben.

ganz unabhängig von der Kurvenform des Wechselstromes, wenn nur die Grundfrequenz ω gross genug ist.

Für die weitere Rechnung soll der Wechselstromanteil I_2 klein sein gegen die Gleichstromstärke I_1, d. h. es gelte

$$I = I_1 + I_2 \,, \text{ wo } I_2 \ll I_1 \,. \tag{39}$$

In diesem speziellen Falle bestreichen die dynamischen Charakteristiken nur kleine Flächenstücke der charakteristischen Fläche ψ, die mit genügender Näherung als eben angesehen werden dürfen, d. h. man kann statt der charakteristischen Fläche die Tangentialebene im Punkte $I = I_1$ nehmen. Die Gleichung dieser Ebene sei:

$$U + a_1 I + a_2 \vartheta_0 + a_3 = 0 \tag{40}$$

Die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 können leicht experimentell bestimmt werden. Sie ändern mit der Gleichstromkomponente I_1. Das bei hohen Frequenzen bestrichene Isothermenstück ist gerade und ergibt sich aus Gleichung (40) durch Konstantlassen von ϑ_0.

Für hohe Frequenzen verhält sich damit die Entladung in bezug auf den Wechselstrom wie ein Ohmscher Widerstand und der Leistungsfaktor f wird gleich 1, ganz unabhängig von der Kurvenform der Wechselstromkomponente.

W. Dudell[1]) hat gemäss Bedingung (39) den Leistungsfaktor des Kohlebogens mit der 3-Voltmetermethode, welche bekanntlich von der Kurvenform des Wechselstroms nicht abhängt, gemessen. Er findet obige Forderung erfüllt, d. h. der Leistungsfaktor steigt mit wachsender Frequenz an und erreicht bei grossem ω den Wert 1.

Ein weiterer Vorteil der Bedingung (39) besteht darin, dass bei der Abstrahlung W_4 des Elektrodenansatzes gemäss Gleichung (4) das wirkliche Strahlungsgesetz benützt werden kann, indem das h_1 als Funktion von ϑ_0 angenommen wird.

Man zerlegt zu diesem Zweck das W_4 in zwei Teile, einen stationären und einen dynamischen. Ist $S\,(\vartheta_0)$ das Strahlungsgesetz, so ergibt sich statt Gleichung (4) mittels einer beim zweiten Gliede abgebrochenen Taylorentwicklung die Gleichung:

$$W_4\left(\frac{b_0}{2} + \Delta\,\vartheta_0\right) = O \cdot S\left(\frac{b_0}{2}\right) + O \cdot S'\left(\frac{b_0}{2}\right) \cdot \Delta\,\vartheta_0 \,. \tag{41}$$

Für eine bestimmte Gleichstromstärke I bleiben die Grössen

[1]) W. Dudell, Phil. Trans. (A), **203**, 305, 1904. — Siehe A. Hagenbach, l. c. IV, 2, S. 105.

$S\left(\frac{b_0}{2}\right)$ und $S'\left(\frac{b_0}{2}\right)$ konstant, d. h. man hat in der Gleichung (16) im stationären Glied für die Konstante h_1 den Wert

$$h_1 = \frac{2}{b_0} \cdot S\left(\frac{b_0}{2}\right) \tag{42}$$

zu setzen und in der Summe für h_1 den Wert

$$h_1' = \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta_0}\right)_{\vartheta_0 = \frac{b_0}{2}} = S'\left(\frac{b_0}{2}\right), \tag{43}$$

welcher als tangentielle Abstrahlungskonstante bezeichnet werden soll.

Ganz analog ist mit der Abstrahlung am Stiele oder Stab zu verfahren, wo in der Summe (Temperaturwelle) wiederum eine mittlere tangentielle Konstante h_3' statt h_3 zu setzen ist (s. Gleichung (8) und § 13).

§ 12. *Die Berechnung der dynamischen Charakteristiken* lässt sich strenge durchführen, wenn man die Temperatur ϑ_0 oder die auffallende Energie W_0 als Funktion der Zeit t vorgibt. Man bestimmt zuerst mit den fünf thermischen Gleichungen aus $\vartheta_0(t)$ das $W_0(t)$ oder umgekehrt. Dann setzt man das $W_0(t)$ in die Gleichung (32) und das $\vartheta_0(t)$ in die Beziehung (34) ein und erhält so zwei Relationen zwischen U, I, und t. Durch Elimination von U oder I ergibt sich die dynamische Charakteristik in der Form:

$$\left.\begin{aligned} I &= I(t) \\ U &= U(t) \end{aligned}\right\} f(U, I) = 0. \tag{44}$$

Diese Rechenvorschrift gilt auch ausserhalb des Bereiches der Bedingung (39), d. h. weder die Charakteristiken noch die Isothermen müssen gradlinig sein. Man wird dabei den letzten Teil der Rechnung mit Vorteil graphisch ausführen.[1])

§ 13. *Die numerische Rechnung* soll an der in § 9 benützten Kugelkathode einer Wolframentladung in N_2 durchgeführt werden. Mangels an genauen experimentellen Isothermen werde Bedingung (39) und die Simon'sche Beziehung (36) verwendet. Die Gleichung der Tangentialebene an die charakteristische Fläche im Punkte $I_1 = 0{,}4$ Ampere ergibt sich nach den Beobachtungen von M. Wehrli (l. c.) zu:

$$U - 275 \cdot I + 0{,}91\, \vartheta_0 - 2605 = 0. \tag{45}$$

[1]) Bei der Berechnung eines experimentell vorliegenden Falles hat man in ϑ_0 soviel Fourierkoeffizienten zu nehmen, dass sich das $I(t)$ genügend genau annähern lässt.

Bei 0,4 Ampere und der Bogenlänge 2 mm ist die Spannung $U_1 = 110$ Volt, die Kathodentemperatur $\vartheta_0 = 2860^0\,K$, und der Kathodenfall $U_K = 54$ Volt. Mittels $\varphi^- = 4{,}5$ Volt erhält man aus Gleichung (31) und (32) die Relation für die Energie W_0[1]:

$$W_0 = I\,(U - 60)\,. \tag{46}$$

Für die Energie im Gleichstrombogen ergibt sich daraus der Wert $W_0 = 20$ Watt. Vorausgesetzt werde nun die gesamte auf die Kathode auftreffende Energie W_0 bei vier verschiedenen Kreisfrequenzen ω, nach den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} W_0 = 20 + 2{,}5 \sin(\omega\, t + a_1) & \omega = \pi \\ W_0 = 20 + 5 \sin(\omega\, t + a_2) & \omega = 10\,\pi \\ W_0 = 20 + 10 \sin(\omega\, t + a_3) & \omega = 100\,\pi \\ W_0 = 20 + 10 \sin(\omega\, t + a_4) & \omega = 1000\,\pi \end{array}\right\} \tag{47}$$

d. h. in Gleichung (1) findet nur *ein* Fourierkoeffizient A Berücksichtigung. Aus den thermischen Beziehungen lässt sich der entsprechende Koeffizient a der Temperatur bezw. die Grössen $\frac{A}{a}$, a, φ berechnen. Das Ergebnis findet sich in Tabelle 1, nebst einigen andern Gliedern der Gleichung (18).

Tabelle 1 (Kugelkathode).

ω	$\sqrt{\varrho c \omega}$	$h_1'\,0$	$q\sqrt{\lambda \varrho c(\gamma^2+\delta^2)} \cdot \sin\varphi$	$q\sqrt{\lambda \varrho c(\gamma^2+\delta^2)} \cdot \cos\varphi$	φ	a	$\frac{A}{a}$
π	0,0271	0,0195	0,0014	0,00366	21°0′	50°53′	0,0368
$10\,\pi$	0,271	,,	0,00683	0,00754	41°50′	84°26′	0,279
$100\,\pi$	2,71	,,	0,0224	0,0226	44°49′	88°54′	2,73
$1000\,\pi$	27,1	,,	0,0713	0,0713	45°	89°48′	27,1

Die verwendeten thermodynamischen Konstanten des Wolframs sind der Arbeit von C. Zwikker[2]) entnommen, wonach:

$$\left.\begin{array}{l} h_1' = 0{,}195 \quad \text{bei } 2860^0\ K \\ h_3' = 0{,}0845 \quad \text{bei } 2000^0\ K \end{array}\right\} \text{Abstrahlkonstanten}$$

$$\lambda = 1{,}43 \quad \text{Wärmeleitfähigkeit}$$

$$c = 0{,}146 \quad \text{Wärmekapazität}$$

$$\varrho = 19{,}1 \quad \text{Dichte.}$$

---

[1]) Es werde der Maximalwert, welcher dem Gleichheitszeichen entspricht, genommen.

[2]) C. Zwikker, Propriétés physiques du Tungstène aux hautes Températures. Dissertation, Amsterdam 1925.

Das h_2' wird 3,54 und das k^2 0,513, wobei stets als Energieeinheit das Watt genommen wird. Man erkennt aus Tabelle 1, dass für das Verhältnis der Amplituden $\left(\frac{A}{a}\right)$ das erste Glied $V \varrho c \omega$ im wesentlichen massgebend ist. Die Wärmeabfuhr durch den Stiel ist nach Kolonne 4 und 5 klein. Die Temperaturschwankungen ergeben sich daraus zu:

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta_0 = 2860 + 68 \sin \omega t & \omega = \pi \\ \vartheta_0 = 2860 + 17{,}9 \sin \omega t & \omega = 10\,\pi \\ \vartheta_0 = 2860 + 3{,}66 \sin \omega t & \omega = 100\,\pi \\ \vartheta_0 = 2860 + 0{,}036 \sin \omega t & \omega = 1000\,\pi \end{array}\right\} \qquad (48)$$

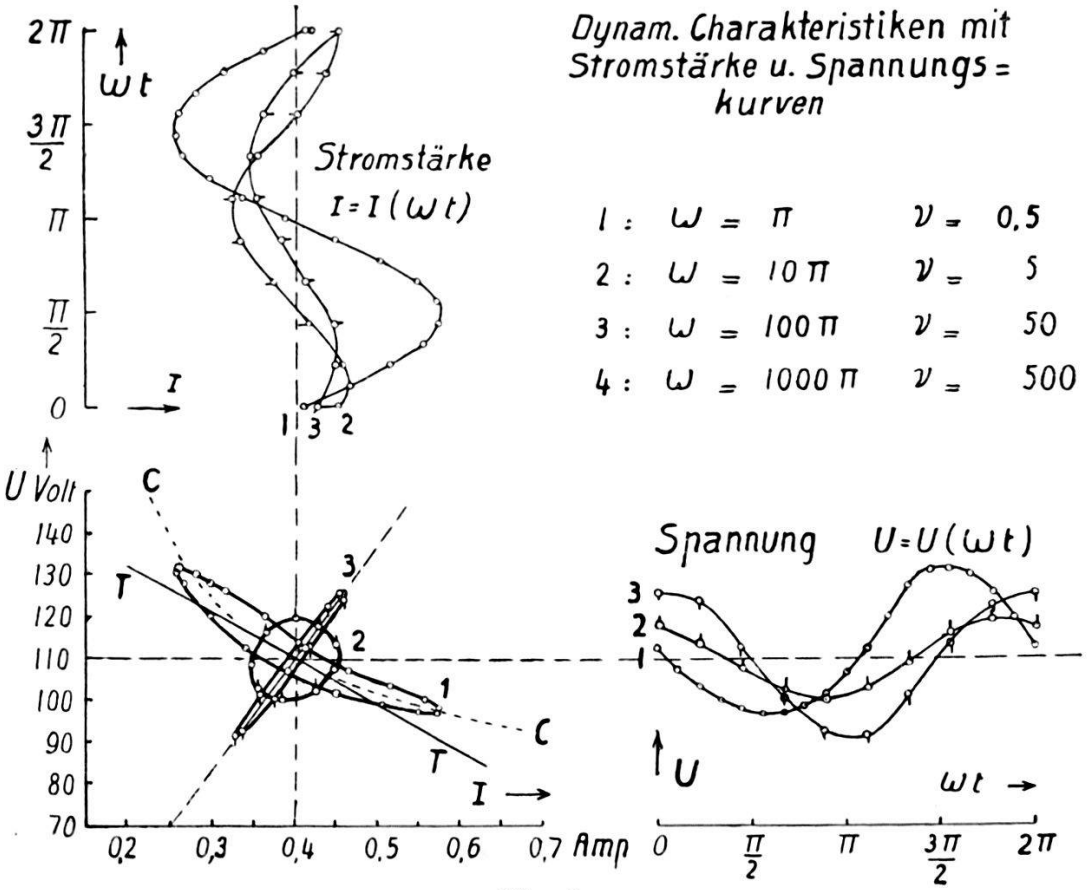


Fig. 3.

Man sieht, dass mit wachsender Frequenz trotz der Zunahme der Energieamplitude, die Temperaturschwankungen stark abnehmen.

Die aus den Gleichungen (45) bis (48) errechneten Stromstärken, Spannungen und dynamischen Charakteristiken sind in Fig. 3 aufgetragen.

(T — T) ist die zu Grunde gelegte statische Charakteristik (Tangentialebene), während (C ... C) die wahre statische Charakteristik darstellt.

Es ergeben sich folgende Resultate:

a) Der Elektrodenansatz (Kugel) bewirkt, dass schon bei der Frequenz $\nu = 50$ die Charakteristik eine schmale steigende Fläche umschreibt, bei $\nu = 500$ läuft sie auf der Isothermen zwischen den Stromstärken 0,329 bis 0,457 Amp. Diese Forderung, dass der ganze Vorgang der Hysterese bei Frequenzen kleiner als 500 vor sich geht, kann experimentell geprüft werden. Sie enthält im Gegensatz zur SIMON'schen Theorie keine willkürlichen Konstanten.

b) Die galvanometrischen Mittelwerte der I- und U-Kurven über die Periode T:

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt \text{ und } \overline{U} = \frac{1}{T}\int_0^T U\,dt\,, \tag{49}$$

weichen vom Berührungspunkt der Tangentialebene ab. Sie wurden mittels eines Planimeters in der Fig. 3 ausgemessen, und finden sich in Tabelle 2 eingetragen:

Tabelle 2.

ν	$\overline{I}$ Amp.	I_1 Amp.	$\overline{U}$ Volt	U_1 Volt
0,5	0,408	0,400	112,2	110
5	0,397		110,5	
50	0,396		109,4	

Man erkennt, dass bei den kleinen Frequenzen der Mittelwert höher, bei grossen Frequenzen tiefer liegt als der Berührungspunkt auf der statischen Charakteristik ($I_1 = 0{,}400$ Amp., $U_1 = 110$ Volt), was davon herrührt, dass im ersten Falle der Bogen Energie an den Wechselstromkreis abgibt, im zweiten Falle dagegen Energie vom Wechselstromkreise aufnimmt.

Es mag noch erwähnt werden, dass wegen des harmonischen Ansatzes der Energie W_0, die U- und I-Kurven nicht harmonisch sind.

§ 14. *Die Beziehungen zur* SIMON'*schen Theorie.* Auf die zu einfache Form der SIMON'schen Gleichungen (35) und (36) ist bereits in § 9 hingewiesen worden. Der grosse Erfolg der SIMON-schen Theorie beruht aber nicht auf diesen zwei Annahmen, sondern auf der SIMON'schen *Differentialgleichung*:

$$U\,I = C_4\,O\,\vartheta_0 + L\,\frac{d\,(O\,\vartheta_0)}{d\,t} \tag{50}$$

wobei:

$$L = C_6\,\frac{\varrho\,c}{\lambda} \tag{51}$$

gesetzt wird. C_6 ist dabei eine willkürliche Konstante, in welcher die Elektrodenform irgendwie enthalten ist.

Man wird fordern, dass sich aus der obigen Theorie unter gewissen Voraussetzungen die SIMON'sche Differentialgleichung ableiten und die Gleichung (51) sich vervollständigen lässt. Das ist auch tatsächlich der Fall.

Dazu sind zwei Annahmen notwendig. Die erste definiert den Zusammenhang zwischen der auffallenden Energie W_0 und der Leistung $U\,I$ und muss lauten:

$$W_0 = C_7 \cdot U\,I\,, \tag{52}$$

wobei C_7 eine Konstante bedeutet.

Die zweite nötige Voraussetzung ist, dass die Wärmeabfuhr W_6 durch den Stiel quasistationär erfolge gemäss Gleichung (26). Man erhält dann durch Einsetzen der Beziehungen (4), (5), (26) und (52) in die Energiebilanz (3) die Differentialgleichung:

$$U\,I = \left(\frac{h_1\,O + C_1\,\lambda\,q}{C_7}\right)\vartheta_0 + \left(\frac{V\,\varrho\,c}{C_7}\right)\frac{d\,\vartheta_0}{d\,t}\,, \tag{53}$$

welche für konstanten Kathodenfleck O der SIMON'schen Differentialgleichung entspricht. An Stelle von Gleichung (51) wird damit die Konstante:

$$L = \frac{V\,\varrho\,c}{C_7 \cdot O}\,, \tag{54}$$

die im Gegensatze zu Beziehung (51) nach H. SIMON die Wärmeleitfähigkeit λ nicht enthält. Diese steht samt der Abstrahlungskonstanten im Ausdrucke für die Konstante

$$C_4 = \frac{h_1\,O + C_1 \cdot \lambda\,q}{C_7\,O}\,. \tag{55}$$

Damit ist die Einordnung der thermischen Eigenschaften der Elektrode in die SIMON'sche Differentialgleichung vollständig durchgeführt. Die für diese Gleichung notwendige Annahme (52), welche aussagt, dass die Energie W_0 bei konstantem Strome I proportional mit der Entladungsspannung U ansteigt, ist nicht vereinbar mit der entsprechenden Gleichung (29) unserer Theorie. Die Gleichung (29) ist aber experimentell und theoretisch begründet. Sie entspricht der Tatsache, dass die Vorgänge an der Kathode in weitgehendem Mass von der Bogenlänge und überhaupt von den Vorgängen in der Gassäule unabhängig sind. Sie enthält nur den Kathodenfall U_K und nicht die Gesamtspannung U.

Während in der obigen Theorie gerade die Gleichung (29) die Brücke zwischen der Theorie der statischen und der dynamischen Entladung bildet, steht die SIMON'sche Differentialgleichung im Widerspruch zu den Vorgängen an der Kathode einer stationären Entladung.

Die zweite Annahme quasistationärer Wärmeableitung durch den Stiel nach Gleichung (26) statt derjenigen nach Gleichung (13) dürfte genügen, solange der Elektrodenansatz V gross und der Stiel dünn ist, d. h. die Energieabfuhr durch den Stiel eine untergeordnete Rolle spielt. Dagegen werden sich Differenzen ergeben, sobald das Wärmereservoir und der Stielquerschnitt beträchtlich sind.

Für das reine Stabproblem, d. h. $V = 0$, lässt sich überhaupt keine Differentialgleichung in der SIMON'schen Form mehr angeben, sondern eine Hysterese ergibt sich nur nach Gleichung (13) bezw. (24) und (25). W. WAGNER[1]) hat die SIMON'sche Differentialgleichung neben die strenge Berechnung der Wärmeleitung im Stabe gestellt, d. h. es soll beides gleichzeitig gelten. Er geriet in Widersprüche mit der Rechnung von H. SIMON und mit dem Experimente, wie nach obigem erwartet werden muss.

§ 15. Zum Schlusse soll dieser Fall der reinen *Stabelektrode* an Hand der Messungen von M. WEHRLI (l. c.), welche an einem Wolframstabe von 1,7 mm in Stickstoff durchgeführt worden sind, numerisch behandelt werden. Die Entladung möge wieder in der Nähe der Stromstärke $I_1 = 0{,}4$ Amp. schwingen. Für die Abstrahlkonstante h_1' wird nach C. ZWIKKER (l. c.) der Wert 0,174 bei 2700° K gesetzt, während die übrigen Konstanten des § 13 beibehalten werden. Der Stabquerschnitt q, welcher gleich der Kathodenfleckgrösse O angenommen wird, ergibt sich zu 0,0227 cm². In Tabelle 3 sind analog wie in Tabelle 1 die Glieder der Gleichung (22) bezw. (24) und (25) eingetragen.

Tabelle 3 (Stabkathode).

ω	$V\varrho c\omega$	$h_1' O = h_1' q$	$q\sqrt{\lambda\varrho c(\gamma^2+\delta^2)} \cdot \sin\varphi$	$q\sqrt{\lambda\varrho c(\gamma^2+\delta^2)} \cdot \cos\varphi$	φ	a	A/a
π	0	0,00395	0,0506	0,0634	38° 40′	37° 0′	0,084
10π			0,175	0,180	44° 15′	43° 35′	0,254
100π			0,565	0,565	45°	44° 50′	0,804
1000π			1,79	1,79	45°	45°	2,52

[1]) W. WAGNER, Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Diss., Göttingen 1910.

Vergleicht man Tabelle 1 mit Tabelle 3, so erkennt man, dass in Tabelle 3 die Glieder der Wärmeableitung (Kolonne 4 und 5) die massgebende Rolle spielen, während die Abstrahlung (Kolonne 3) zurücktritt. Bei quasistationärer Wärmeableitung (SIMON'sche Differentialgleichung) würden erstere nicht von ω abhängen, und deshalb zu keiner Hysterese führen. Nach der obigen Theorie (Tabelle 1 und 3) steigen sie aber mit wachsendem ω an, und führen so zur Hysterese. Bei der Stabkathode sind sie es, welche allein die Hysterese verursachen. Das Fehlen des bei der Kugelkathode dominierenden Gliedes $V \varrho c \omega$ in Tabelle 3 bewirkt, dass die Grösse A/a (letzte Kolonne) viel weniger rasch mit ω ansteigt als in Tabelle 1, wo bei 1000π der Wert 27,1 gegen 2,52 in Tabelle 1 erreicht wird. Die Temperaturamplitude a nimmt deshalb beim Stabe viel weniger rasch ab als bei der Kugel, d. h. die dynamische Charakteristik bleibt bis zu viel höhern Frequenzen eine Fläche, was den Experimenten von H. SIMON und seinen Mitarbeitern entspricht.

Anders verhält sich beim Stabe auch der Phasenwinkel α, der nach Tabelle 3 nur 45^0 erreicht gegen 90^0 in Tabelle 1.

Mit der Berechnung der dynamischen Charakteristiken für die Stabelektrode soll noch gewartet werden, bis die dazu erforderlichen charakteristischen Flächen experimentell ermittelt sind.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Temperaturempfindlichkeit der Molekularpolarisation von Gasen und Dämpfen

von **R. Sänger** und **O. Steiger.**

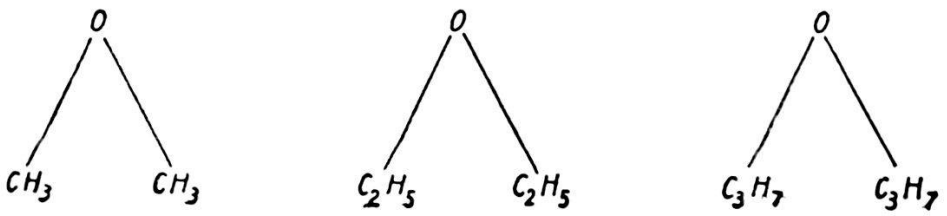
(10. IV. 29.)

I. Methyl-, Aethyl- und Propyl-Aether.

Inhalt: Es sind die elektrischen Momente der Moleküle von Methyl-, Aethyl- und Propyl-Aether bestimmt worden zu: $\mu \cdot 10^{18} = 1{,}32 \pm 0{,}02$, $1{,}10 \pm 0{,}02$, resp. $0{,}85 \pm 0{,}03$. Es lässt sich demnach auf eine dreieckförmige Struktur des Aethers schliessen.

In früheren Arbeiten[1]) haben wir zeigen können, wie die DEBYE'sche Theorie der Molekularpolarisation weitgehende Schlüsse über den Molekülaufbau zulässt. Im besonderen haben wir vor kurzem das elektrische Moment des Wassermoleküls bestimmt zu: $\mu = 1{,}84_7 \pm 0{,}01 \times 10^{-18}$. Damit konnten wir zeigen, dass aus den von den ultraroten Eigenschwingungen sich ergebenden zwei Lösungen für die dreieckförmige Konstitution des Wassermoleküls nur diejenige mit dem Winkel $\delta = 32^0$ möglich ist.

Es wird nun im folgenden besonders interessant sein, das elektrische Moment einiger Äther genau zu bestimmen, weil für diese Moleküle vermutet werden kann, dass sie eine dem Wassermolekül ähnliche Konstitution aufweisen, indem die beiden Kohlenwasserstoffgruppen mit dem zentralen Sauerstoffatom einen Winkel bilden. Wir würden also den einfachsten Normaläthern die folgenden Strukturbilder geben:



Die bisher vorliegenden Messungen deuten bereits schon auf eine solche Anordnung. Die meisten dieser Messungen sind an flüssigem Äthyläther gemacht worden; so z. B. von WILLIAMS und ESTERMANN[2]). Ersterer bestimmte das elektrische Moment aus

[1]) R. SÄNGER, Phys. Zeitschr. **27**, 556, 1926. — R. SÄNGER und O. STEIGER, H. Phys. Acta **1**, 369, 1928.

[2]) J. W. WILLIAMS, Phys. Zeitschr. **29**, 174, 1928. ESTERMANN, Zeitschr. phys. Chem. B 1, 134, 1928.