Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 6 (1933)
Heft: V

Artikel: Die diatonische Tonleiter als gesetzmässiges Tonspektrum
Autor: Greinacher, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110277

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die diatonische Tonleiter als gesetzmässiges Tonspektrum

von **H. Greinacher.**

(16. VI. 33.)

Zusammenfassung. Die natürliche diatonische Tonleiter lässt sich als gesetzmässiges Tonspektrum darstellen. Aus der Serienformel geht hervor: 1. die besondere Bedeutung des Grundtons und der Quinte, 2. die Zuordnung konjugierter Töne. Diese verlangt, dass die vollständige Tonleiter aus 8 Tönen besteht.

Schon die alten Griechen kannten den Aufbau der diatonischen, d. h. 7-stufigen Tonleiter. Pythagoras zeigte, wie man die Intervallverhältnisse der 7 Töne mathematisch unter einziger Benützung des reinen Oktaven- und Quintenintervalls aufbauen kann. Dieses Pythagoräische System, nach dem die Tonleiter nur aus grossen ganzen Tönen ($^9/_8$) und Pythagoräischen Halbtönen ($^{256}/_{243}$) besteht, ist bis ins 16. Jahrhundert auch das praktisch dominierende gewesen. So bestrickend es durch seinen konsequenten Aufbau und auch durch seine Anlehnung an die Praxis der reinen Quintenstimmung ist, so wenig konnte es den Anforderungen der Modulationsfähigkeit der modernen Musik genügen. Auch der chromatische Ausbau nach demselben Prinzip des Quintenzirkels und unter Benützung der enharmonischen Verwechslung gewisser Töne, d. h. der Zusammenlegung ganz benachbarter Töne, konnte den praktischen Bedürfnissen nicht gerecht werden. Erst die Erfindung der gleichschwebenden Temperatur durch Werckmeister und ihre Einführung durch J. S. Bach schuf das für die moderne Musik geeignete Ausdrucksmittel. Auch die reine oder natürliche Stimmung, die im 16. Jahrhundert durch Zarlino eingeführt wurde, ist schon längst durch die temperierte Stimmung verdrängt. Sie wird aber theoretisch immer von grundlegender Bedeutung bleiben, da sie uns einzig den gesetzmässigen Aufbau der diatonischen Tonleiter und ihr Verhältnis zu der Harmonie und Tonführung in der Musik verstehen lässt.

Die Auswahl der Töne gründet sich hiernach auf die Verwandtschaft derselben mit dem gewählten Grundton, wobei unter dem Grade der Verwandtschaft zweier Töne das Vorhandensein mehr oder weniger zahlreicher gemeinsamer harmonischer Obertöne verstanden ist. So sind in der Durtonleiter mit c als Grundton d e g und h einfach Obertöne von c, die durch Division mit 2, 4, 8 in die Oktave cc_1 hinunterversetzt sind. Auch f und a besitzen

mit c gemeinsame Obertöne. Die Zahl der gewählten Töne bestimmt sich darnach, dass die Tonschritte höchstens 1 und mindestens ½ Ton betragen sollen. Aus diesem Aufbau, bei dem übrigens 3 Intervalle, der grosse und kleine Ganzton ($^9/_8$ und $^{10}/_9$), sowie der Halbton ($^{16}/_{15}$) verwendet sind, ist ohne weiteres die Stellung von c als Grundton ersichtlich.

Wie im folgenden gezeigt sei, lässt sich der gesetzmässige Aufbau der diatonischen Tonleiter, die Auswahl der Töne und ihre Beziehung untereinander noch in ganz anderer Weise zum Ausdruck bringen. Es ist nämlich möglich, die einzelnen Töne als Glieder eines gesetzmässigen Tonspektrums darzustellen, eine Eigenschaft, die rein wieder nur in der natürlichen Stimmung zum Ausdruck kommt und damit neuerdings die ausgezeichnete Stellung dieses Systems hervortreten lässt.

Es lässt sich nämlich für die Dur-Tonleiter eine Serienformel angeben, nach der sich das Intervall I der einzelnen Töne gegenüber dem Grundton c aus einer Laufzahl n berechnen lässt. Und zwar erscheint die Tonleiter aus zwei Tonspektren zusammengesetzt. Die eine Formel gilt für die untere Hälfte $gfedc$ und die andere für die obere $gahc_1$. g ist dabei der Ausgangspunkt für beide. Bezeichnen wir die Intervalle für die untere und obere Gruppe mit I_u bez. I_0, so gilt

$$J_u = \frac{n+2}{n+1} \quad \text{und} \quad J_0 = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Die Töne mit ihren entsprechenden Laufzahlen sind

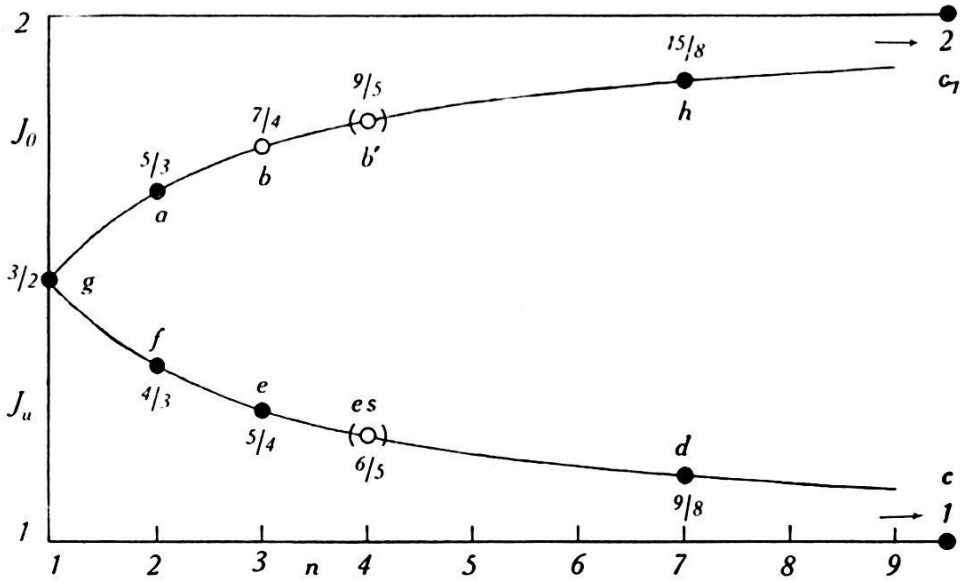
				1	2	7	∞
c	d	e	f	g	a	h	c_1
∞	7	3	2	1			

Frägt man nach der Grösse der Intervalländerung bei verschiedenen Laufzahlen, so findet man, dass sie bei gleichen n in der unteren und oberen Serie zahlenmässig gleich ist, nämlich:

$$-\frac{dJ_u}{dn} = \frac{dJ_0}{dn} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Sie ist am grössten bei der Quinte ($n = 1$) und nimmt asymptotisch nach c und c_1 hin gegen null ab ($n = \infty$). Das Seriengesetz bringt also sehr schön zum Ausdruck: 1. die beherrschende Stellung der Quinte, die man ja in der Harmonielehre die Dominante nennt (Ausgangspunkt beider Serien), 2. die Stellung von c bez. c_1 als Grundton oder Tonica (Seriengrenzen). Da ferner der Intervallgradient in der unteren und oberen Serie gleich ist,

so folgt, dass die beiden Serienkurven symmetrisch auseinanderlaufen müssen. Töne mit gleicher Laufzahl in beiden Reihen müssen daher gleichen algebraischen Intervallabstand von g besitzen. Die meisten Töne der Serienformel sind zwar, um optisch zu reden, verboten. Bemerkenswert ist aber, dass die vorkommenden Laufzahlen in beiden Serien die gleichen sind. Eine Ausnahme scheint nur darin zu bestehen, dass oben die Laufzahl 3 und damit der Ton b mit $I_0 = {}^7/_4$ fehlt. Die Gleichheit des Serienverlaufs in beiden Tonleiterhälften und die strenge Zuordnung der Töne derart, dass immer zwei Töne mit gleichem algebraischen Intervallunterschied gegenüber g vorhanden sind,



lassen es vermuten, dass dieses b eigentlich zur Tonleiter gehören muss, aber aus irgendwelchen Gründen verloren gegangen ist[1]). Wahrscheinlich musste einer der Töne b oder h verschwinden, um die Aufeinanderfolge mehrerer Halbtöne in der Tonleiter zu vermeiden. Und hier behauptete h, trotz seiner geringeren Verwandtschaft mit c, seine Stellung, da das Ohr vor dem Schlusston ein kleines Intervall verlangt. Folgende Tabelle lässt die Verhältnisse auf Grund der Seriendarstellung ohne weiteres überschauen.

$$J_u = \frac{n+2}{n+1} \qquad J_0 = \frac{2n+1}{n+1}$$

$n =$	∞	7	3	2	1	2	3	7	∞
	c	d	e	f	g	a	(b)	h	c_1
$I =$	1	${}^9/_8$	${}^5/_4$	${}^4/_3$	${}^3/_2$	${}^5/_3$	${}^7/_4$	${}^{15}/_8$	2

[1]) Die diatonische Tonleiter der alten Griechen enthielt diesen 8. Ton, ein Umstand, der ziemlich zu diskutieren gab. Siehe etwa ZELLNER, Vorträge über Akustik 1892, Bd. II, S. 160f.

Man verifiziert ohne weiteres für konjugierte Töne:

$$^3/_2 + {}^3/_2 = {}^4/_3 + {}^5/_3 = {}^5/_4 + {}^7/_4 = {}^9/_8 + {}^{15}/_8 = 1 + 2 = 3.$$

Wir erwähnen, dass man auch die Molltonleiter (wenigstens die aufsteigende in der sog. melodischen Form) im gleichen Spektrum erhält, wenn man das Glied $n = 3$ durch das mit $n = 4$ ersetzt. Dies entspricht dann dem *es* mit $I_u = {}^6/_5$ und einem b' mit $I_0 = {}^9/_5$, welch letzteres analog wie das b mit $I_0 = {}^7/_4$ ausgelassen ist. Zum Schluss geben wir die Resultate noch in graphischer Darstellung.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.