Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 8 (1935)

Heft: II

Artikel: Bemerkungen zur Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen

Autor: Stueckelberg, E.C.G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110525

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bemerkung zur Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen

von **E. C. G. Stueckelberg**, Zürich.

(19. XII. 34.)

Zusammenfassung: In der Formel für die Streustrahlung bewegter freier Elektronen treten, bei lorentzinvarianter Schreibweise, die Viererpotentiale der primären und sekundären Lichtwellen als Feldgrössen auf. Die Potentiale sind aber nur bis auf eine Eichtransformation bestimmt. Da die Streuintensität eine eichinvariante Grösse ist, so muss sich das Resultat unter Verwendung von eichinvarianten Feldgrössen schreiben lassen. Die folgenden Überlegungen zeigen, dass die vierdimensionalen Lorentzkräfte, mit welchen die ursprüngliche und die gestreute Lichtwelle am bewegten Elektron angreifen, als Feldgrössen in die Streuformel eingehen.

1. Einleitung.

Die durch ein Störungsverfahren aus der DIRAC'schen Wellengleichung erhaltene Streuformel gibt uns den Energiestrom $J^m(\vec{\sigma}^m)\, d\,\omega_m$ von Licht der Frequenz ν_m und einer *bestimmten Polarisation* $\vec{\sigma}^m$, welcher durch ein Elektron aus dem primären Energiestrom der Dichte $S^k\,(\vec{\sigma}^k)$, der Frequenz ν_k und einer ebenfalls *bestimmten Polarisation* $\vec{\sigma}^k$ in den Raumwinkel $d\,\omega_m$ gestreut wird.

Bei der üblichen Herleitung dieser Formel (Klein-Nishina-Formel [K-N-F.] für polarisiertes Licht) aus der Wellengleichung, erscheinen die Polarisationsrichtungen als Einheitsvektoren des *Vektorpotentials* $\vec{\sigma}^k$ und $\vec{\sigma}^m$ von Primär- und Sekundärwellen, wenn beide Lichtwellen durch ein reines Vektorpotential beschrieben werden. Für ruhende Elektronen wurde diese Formel z. B. von WALLER[1]) abgeleitet.

Will man den *über alle Polarisationsrichtungen summierten Energiestrom* $J^m\, d\,\omega_m$ berechnen, welcher durch einen *unpolarisierten Primärstrom* S^k erzeugt wird, so muss man die oben diskutierte K-N-F. für polarisiertes Licht über zwei zueinander und zur Richtung des Primärstrahles $\vec{n}^k$ senkrechte Vektoren $\vec{\sigma}^k$ mitteln, und über zwei zueinander und zur Richtung der Sekundärwelle $\vec{n}^m$ senkrechte Vektoren $\vec{\sigma}^m$ addieren.

---

[1]) I. WALLER, Ztschr. f. Phys. **61**, 837, 1930.

*

Aus der K-N-F. für unpolarisiertes Licht und für ein ruhendes Elektron hat PAULI[1]) die entsprechende Formel für ein bewegtes Elektron durch eine Lorentztransformation abgeleitet.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2]) habe ich dann die K-N-F. für polarisiertes Licht und für bewegte Elektronen direkt aus der DIRAC'schen Gleichung erhalten. Die Mittelung über die Polarisation führt dann auf die PAULI'sche Formel. Herr PAULI machte mich darauf aufmerksam, dass ich in meiner Rechnung die Mittelung eigentlich im Ruhsystem durchführe und erst dann die gemittelten Glieder lorentztransformiere. Dass diese Mittelung eine lorentzinvariante Operation ist, und daher vor der Lorentztransformation vorgenommen werden darf, rührt von der Tatsache her, dass unpolarisiertes Licht ein lorentzinvarianter Begriff ist.

Im folgenden soll diskutiert werden, wie diese Mittelung in lorentzinvarianter Weise möglich ist. Eine invariante Form der K-N-F. kann beim Problem der Lichtstreuung am gebundenen Elektron von Wichtigkeit sein[3]). Dazu wird es nötig sein, an Stelle der Potentiale die Feldstärkentensoren einzuführen. Wegen der Eichinvarianz der Potentiale kann nämlich zu einer bestimmten ersten (jetzt vierdimensionalen) Polarisation des Potentials eine zweite dazu *konjugierte Polarisation* nicht in relativistisch invarianter Weise definiert werden, welche die Eigenschaft hat, dass sie in jedem Lorentzsystem (bei einer Eichung als ein reines Vektorpotential) auf $\vec{n}^k$ und der (ebenfalls so geeichten) ersten Polarisation senkrecht steht.

Zu dem Feldstärkentensor (Sechservektor) lässt sich stets der mit i multiplizierte duale Tensor als *konjugierter Feldstärkentensor* zuordnen. Dieser hat für Licht die Eigenschaft, dass in jedem Lorentzsystem seine magnetische Feldstärke gleich der elektrischen Feldstärke des ursprünglichen Feldtensors und seine elektrische Feldstärke gleich der magnetischen Feldstärke des ursprünglichen Tensors mit umgekehrten Vorzeichen ist. Die Zuordnung der konjugierten Feldstärke ist also (im Gegensatz zur Zuordnung der konjugierten Polarisation des Potentials) invariant.

In die K-N-F. gehen dann als Polarisationsrichtungen nicht die Feldstärkentensoren selbst, sondern die aus ihnen und aus der Elektronengeschwindigkeit abgeleiteten Einheits-(vierer)-Vektoren der, von den (primären und sekundären) Wellen auf das

---

[1]) W. PAULI, Helv. Phys. Acta **6**, 279, 1933.

[2]) E. C. G. STUECKELBERG, Ann. d. Phys. [5] **21**, 367, 1934.

[3]) I. WALLER, Zeitschr. f. Phys. loc. cit.

Elektron vor der Streuung ausgeübten, Lorentzkräfte. Sie haben die Eigenschaft, auf der Vierergeschwindigkeit des Elektrons vor der Streuung und auf dem Vierervektor ihrer Wellennormalen im pseudoeuklidischen Sinne senkrecht zu stehen. Ferner stehen auch die zu zwei konjugierten Polarisationen gehörenden Lorentzkräfte in diesem Sinne senkrecht aufeinander. Wählt man also eine bestimmte erste vierdimensionale, auf dem Wellenvektor und der Elektronengeschwindigkeit senkrechte, Richtung der Lorentzkraft, so ist die zu ihr konjugierte Richtung bis auf das Vorzeichen durch die Forderung, auf den drei anderen Richtungen senkrecht zu stehen, eindeutig und invariant bestimmt. Daher ist auch eine invariante Mittelung möglich.

§ 2. Die Beschreibung der Polarisation in der K-N-F. durch das Potential.

Die K-N-F. für polarisiertes Licht und bewegte Elektronen[1]) enthält einen relativistisch invarianten Faktor. Da dieser invariante Faktor nur skalare Produkte von Vierervektoren enthalten darf, so muss er auch in bezug auf das Viererpotential eichinvariant sein. Bilden wir aus $\vec{n}^k$ und ν_k den Vierervektor (mit imaginärem Zeitanteil) der Wellennormalen der Primärwelle

$$k = \left(\vec{n}^k \frac{k}{c}\,; \quad i\,\frac{\nu_k}{c}\right) \tag{1}$$

und aus $\vec{\sigma}^k$ den Vierervektor der Polarisation

$$\sigma^k = (\vec{\sigma}^k;\ 0)\ , \tag{2}$$

so stehen Wellenvektor und Polarisationsvektor auch im vierdimensionalen Sinne senkrecht aufeinander:

$$(\sigma^k, k) = 0\ , \tag{3}$$

(a, b) bedeutet das skalare Produkt zweier Vierervektoren.

Aus der Wellengleichung für Licht folgt:

$$(k, k) = 0\ . \tag{4}$$

Eine Eichtransformation des Potentials

$$\sigma^k = \sigma^{k0} + \text{const} \times k \tag{5}$$

lässt wegen (4) die Bedingung (3) unverändert, so dass wir von

[1]) E. C. G. Stueckelberg, loc. cit.

der speziellen Definition (2) absehen können. Wir können aber σ^k invariant normieren, so dass

$$(\sigma^k, \sigma^k) = 1 \tag{6}$$

ist. (6) ist wegen (3) und (4) gegenüber der Transformation (5) invariant.

Genau die gleichen Beziehungen gelten für die Sekundärwelle, deren Vierervektor mit m bezeichnet werde.

Die mit $2\pi\,\mu/h$ multiplizierte Vierergeschwindigkeit des Elektrons werde vor der Streuung durch l^0 und nach dem Streuvorgang durch l bezeichnet (μ = Elektronenmasse, h = PLANCK'sche Konstante). Dann gilt

$$l = l^0 + k - m \tag{7}$$

und

$$(l, l) = (l^0, l^0) = (2\pi\,\mu\,c/h)^2. \tag{8}$$

Bedeutet e noch die Elektronenladung, so lautet die K-N-F. für polarisiertes Licht:

$$J^m\,d\,\omega_m = S^k\,d\,\omega_m \frac{e^4}{2\,\mu^2 c^4}\left(\frac{m\,c^2}{E^0}\right)^2 \frac{1}{D_k}\,\frac{\nu_m^3}{\nu_k^3}\,W\,(\sigma^k;\ \sigma^m). \tag{9}$$

Hier ist E^0 die Energie des Elektrons vor der Streuung (in erg). Ist $\vec{v}$ sein dreidimensionaler Geschwindigkeitsvektor, so bedeutet

$$D_k = \frac{(k, l^0)}{k_4\,l_4^0} = 1 - \left(\vec{n}_k, \frac{\vec{v}}{c}\right) \tag{10}$$

$(\vec{a}, \vec{b})$ ist das skalare Produkt zweier Vektoren im gewöhnlichen Raum. a_4 ist die imaginäre vierte Komponente des Vierervektors a. W ist der relativistisch invariante Faktor:

$$W\,(\sigma^k;\sigma^m) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(m, l^0)}{(k, l^0)} + \frac{(k, l^0)}{(m, l^0)} - 2\right\}$$
$$+2\left\{\frac{(\sigma^k, \sigma^m)(k, l^0)(m, l^0) - (\sigma^k, l^0)(\sigma^m, k)(m, l^0) - (\sigma^k, m)(\sigma^m, l^0)(k, l^0) + (\sigma^m, l^0)(\sigma^k, l^0)(m, k)}{(k, l^0)(m, l^0)}\right\}^2 \tag{11}$$

Die Formeln (9) und (11) folgen aus den Formeln (3, 4) und (4, 6) meiner relativistisch invarianten Ableitung[1]), wenn unsere Beziehungen (3) und (4), für σ^k und k, und für σ^m und m gelten und l durch unsere Gleichung (7) eliminiert wird. Der zweite Term ist natürlich eichinvariant. Für ruhende Elektronen (l^0=rein zeitlich) und reine Vektorpotentiale (σ^k und σ^m = räumliche Einheitsvektoren) wird er

$$2\,(\sigma^m, \sigma^k)^2 = 2\,(\vec{\sigma}^m, \vec{\sigma}^k)^2. \tag{12}$$

---

[1]) E. C. G. STUECKELBERG, loc. cit. In Formel (5, 1) dieser Arbeit steht ein Druckfehler. Das Vorzeichen des dritten Termes muss heissen — (statt +).

Der gemittelte Ausdruck für W wird dann

$$W = \frac{\nu_m}{\nu_k} + \frac{\nu_k}{\nu_m} - \sin^2 \vartheta , \tag{13}$$

wenn ϑ den Winkel zwischen $\vec{n}_k$ und $\vec{n}_m$ bedeutet.

§ 3. Die Beschreibung der Polarisation in der K-N-F. durch die Lorentzkräfte.

Führt man die zum Viererpotential

$$\varphi^k = \sigma^k e^{i(k, x)} \tag{14}$$

gehörenden, durch i dividierten, Feldstärkenamplituden der Primärwelle

$$K^k_{\mu\nu} = k_\mu \sigma^k_\nu - \sigma^k_\mu k_\nu \tag{15}$$

ein (und entsprechend K^m für die Sekundärwelle), so muss sich der eichinvariante zweite Teil von w (11) durch K^k und K^m ausdrücken lassen.

Definieren wir die Amplitude der auf das Elektron ausgeübten Lorentzkraft durch

$$p^k_\mu = \sum_\nu K^k_{\mu\nu} l^0_\nu , \tag{16}$$

so ist

$$p^k = k\,(\sigma^k, l^0) - \sigma^k\,(k, l^0) . \tag{17}$$

Das Quadrat des Betrages der Lorentzkraft[1]) ist, wegen (3), (4) und (6)

$$|\,p^k\,|^2 = |\,(p^k, p^k)\,| = (k, l^0)^2 \tag{18}$$

(und analog für p^m). Bilden wir jetzt noch den Einheitsvektor der Lorentzkraft p^k durch

$$\pi^k = \frac{p^k}{(k, l^0)} ; \quad (\pi^k, \pi^k) = 1 , \tag{19}$$

so wird der 2te Teil von W anstatt (12)

$$2\,(\pi^k, \pi^m)^2 . \tag{20}$$

Der relativistisch invariante Ausdruck für W heisst jetzt

$$W = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{|\,p^m\,|}{|\,p^k\,|} + \frac{|\,p^k\,|}{|\,p^m\,|}\right\} - 1 + 2\,(\pi^k, \pi^m)^2 . \tag{21}$$

---

[1]) p^k ist eigentlich nicht „eine Kraft" im gewöhnlichen Sinne, sondern, als Vierervektor, eine „Kraftdichte".

In ihm erscheinen nur die Verhältnisse der Beträge der relativistisch invarianten vierdimensionalen Lorentzkräfte der primären und sekundären Wellen auf das Elektron (vor dem Streuvorgang) und das vierdimensionale skalare Produkt ihrer Richtungen.

§ 4. Die invariante Mittelung über die Polarisationsrichtungen.

Zu einer gewählten, durch den Feldtensor K^k festgelegten Polarisation ist nach dem in der Einleitung gesagten[1]) der Tensor

$$K^{k'} = i\, K^{k*} \tag{22}$$

die konjugierte Polarisation. K^* bedeutet den zu K dualen Tensor. Es gilt allgemein für schiefsymmetrische Tensoren

$$(K, K^*) = \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu} K^*_{\mu\nu} = 3 \sum_{\nu} K_{\mu\nu} K^*_{\mu\nu}\,. \tag{23}$$

Da im Lichtfeld der elektrische und magnetische Vektor in jedem Lorentzsystem aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$(K^k, K^{k*}) = 0\,. \tag{24}$$

Aus demselben Grunde ist

$$\sum_{\nu} K^k_{\mu\nu} K^{k*}_{\lambda\nu} = -\sum_{\nu} K^k_{\lambda\nu} K^{k*}_{\mu\nu}\,. \tag{25}$$

Aus (22) bis (24) folgt, dass

$$(p^k, p^{k'}) = \sum_{\mu\nu\lambda} K^k_{\mu\nu}\, l^0_\nu\, K^{k'}_{\mu\lambda}\, l^0_\lambda = 0\,. \tag{26}$$

Ferner folgt aus (3) und (4) und (17), dass

$$(p^k, k) = 0\,. \tag{27}$$

was selbstverständlich auch für $p^{k'}$ erfüllt ist. (27) folgt auch direkt aus den MAXWELL'schen Gleichungen. Aus (17) folgt auch noch, dass

$$(p^k, l^0) = 0\,. \tag{28}$$

Damit ist die in der Einleitung angeführte Behauptung, dass konjugierte Richtungen der Lorentzkraft aufeinander und auf k und l^0 senkrecht stehen, bewiesen.

---

[1]) Zur Definition der dualen Feldtensoren und für das folgende vgl. z. B. M. v. LAUE, Relativitätstheorie I, 4. Auflage, Vieweg 1921, **5**, 107ff. Es ist $K^*_{\mu\nu} = K_{\alpha\beta}$, wo die Indizes $\mu\,\nu\,\alpha\,\beta$ alle voneinander verschieden sind und durch eine gerade Zahl von Vertauschungen aus der Reihenfolge 1 2 3 4 hervorgehen. Ist E_1, E_2, E_3 das elektrische und H_1, H_2, H_3 das magnetische Feld in einem bestimmten Lorentzsystem, z. B. ist $K_{12} = H_3$ und $K'_{12} = i\; K^*_{12} = i\, K_{34} = E_3$. D. h. $H_3' = E_3$.

Ist π^k gewählt, so lassen sich aus den drei linearen Gleichungen

$$(\pi^{k'}, \pi^k) = (\pi^{k'}, k) = (\pi^{k'}, l^0) = 0 \tag{29}$$

die drei Unbekannten $(\mu = 1,2,3)$ $\pi_\mu^{k'}$ durch $\pi_4^{k'}$ ausdrücken. Aus der Gleichung

$$(\pi^{k'}, \pi^{k'}) = 1 \tag{30}$$

folgt $\pi_4^{k'}$ und damit $\pi^{k'}$ bis auf das Vorzeichen. Somit ist die konjugierte Polarisation festgelegt, da sie in (21) vorzeichenunabhängig auftritt.

Die Mittelung vollziehen wir am einfachsten auf folgende Weise: Wir schreiben einen Vierervektor a in einem bestimmten Lorentzsystem als (a_1, a_2, a_3, a_4). Dann wählen wir ein solches Axensystem, dass l^0 rein zeitlich erscheint, dass die 1-Axe in der Raumrichtung der Primärwelle zeigt und dass die Raumrichtung der Sekundärwelle in der 1,2-Ebene liegt.[1])

Die Vektoren l^0, k und m schreiben sich dann mit „invarianten Komponenten" :

$$l^0 = \left(0,\ 0,\ 0,\ i\sqrt{-(l^0, l^0)}\right)$$

$$k = \left(\frac{(k, l^0)}{\sqrt{-(l^0, l^0)}},\ 0,\ 0,\ \frac{i\,(k, l^0)}{\sqrt{-(l^0, l^0)}}\right)$$

$$m = \left(\frac{(m, k)\sqrt{-(l^0, l^0)}}{(k, l^0)} + \frac{(m, l^0)}{\sqrt{-(l^0, l^0)}},\ m_2,\ 0,\ i\,\frac{(m, l^0)}{\sqrt{-(l^0, l^0)}}\right)$$

m_2 ist eine „invariante" Grösse, welche sich bis auf das Vorzeichen aus $(m, m) = 0$ ergibt. Als erste Polarisationen wählen wir z. B.

$$\pi^k = (0,\ 1,\ 0,\ 0)\,,$$
$$\pi^m = (0,\ 0,\ 1,\ 0)\,.$$

Die konjugierten Polarisationen sind dann durch (29) und (30) bestimmt zu

$$\pi^{k'} = (0,\ 0,\ \pm 1,\ 0),$$

$$\pi^{m'} = \left(\mp\frac{m_2\sqrt{-(l^0, l^0)}}{(m, l^0)},\ \pm 1 \mp \frac{(m, k)\,(l^0, l^0)}{(k, l^0)\,(m, l^0)},\ 0,\ 0\right),$$

[1]) Dieses gewählte Raum-Zeitsystem ist natürlich wieder das Ruhsystem des Elektrons. Die Mittelung lässt sich natürlich in jedem andern System auch durchführen. Die beschriebene Mittelung ist aber jetzt invariant, was durch die „invarianten Komponenten" angedeutet ist.

so dass die Mittelung des letzten Gliedes von W in (21) (Summation über alle Kombinationen mal $\frac{1}{2}$) die invariante Grösse

$$\tfrac{1}{2}\sum 2\,(\pi^k, \pi^m)^2 = 1 + \left(1 - \frac{(m, k)\,(l^0, l^0)}{(k, l^0)\,(m, l^0)}\right)^2 \tag{31}$$

ergibt. Das erste und zweite Glied verdoppelt sich durch die Mittelung. Bezeichnet man

$$2 - \tfrac{1}{2}\sum 2\,(\pi^k, \pi^m)^2 = \sin^2\vartheta \tag{32}$$

(wo ϑ dem Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{m}$ im Ruhsystem des Elektrons gleich ist[1])), so wird nach Einführen von D_k und D_m aus Gl. (10)

$$W = \frac{D_m\,\nu_m}{D_k\,\nu_k} + \frac{D_k\,\nu_k}{D_m\,\nu_m} - \sin^2\vartheta \tag{33}$$

mit

$$\sin^2\vartheta = \frac{(\mu c^2)^2}{h\,E^0}\left(\frac{1}{\nu_m D_m} - \frac{1}{\nu_k D_k}\right)\left\{2 - \frac{(\mu c^2)^2}{h\,E^0}\left(\frac{1}{\nu_m D_m} - \frac{1}{\nu_k D_k}\right)\right\}. \tag{34}$$

Die Formeln (9), (33) und (34) stimmen mit den Formeln (10), (19) und (22) von Pauli[2]) (bis auf den durch eine andere Definition der Primärintensität dort auftretenden Faktor D_k im Nenner) und meiner Formel (5, 1) in der erwähnten Arbeit[3]) überein.

Herrn Prof. Pauli und Herrn Dr. Weisskopf möchte ich für die Anregung zu diesen Überlegungen danken.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

---

[1]) (31) wird im Ruhsystem $1 + (\vec{n}^k, \vec{n}^m)^2$ und daher (32) $1 - (\vec{n}^k, \vec{n}^m)^2 = \sin^2\vartheta$.

[2]) W. Pauli, loc. cit.

[3]) E. C. G. Stueckelberg, loc. cit. Der Faktor 2 vor $\sin^2\vartheta$ in (5, 1) ist ein Druckfehler.