Messgenauigkeit einer Nullmethode zur Radiumdosierung

Autor(en): **Kipfer, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **8 (1935)**

Heft III

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110531

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Messgenauigkeit einer Nullmethode zur Radiumdosierung

von **P. Kipfer.**[1])

(1. III. 35.)

Zusammenfassung. Es wird die in einer gewissen Beobachtungszeit τ erreichbare Messgenauigkeit einer Nullmethode zur Messung radioaktiver Präparate auf Grund ihrer γ-Strahlung wahrscheinlichkeitstheoretisch untersucht.

1. Von Piccard und Meylan[2]) ist eine Kompensationsanordnung zur Messung radioaktiver Substanzen entwickelt worden, die den Vorteil hat, in kurzer Zeit eine genaue Messung zu erlauben. Das Prinzip ist das folgende: Ein Elektrometer ist mit zwei elektrisch gegeneinander geschalteten, sonst aber einander gleichen Druckionisationskammern verbunden. Eine der Kammern wird durch ein sich in fester Distanz von der Kammer befindliches Präparat a, die andere durch das zu messende Präparat b bestrahlt. Die Distanz dieses zweiten Präparates von der zugehörigen Kammer wird so lange verändert, bis sich die beiden Präparate gerade kompensieren. Die Anordnung kann dadurch geeicht werden, dass man mit bekannten Präparaten die zur Kompensation einzustellende Distanz in Funktion der Radiummenge bestimmt. Dann genügt eine Distanzbestimmung zur Messung einer unbekannten Radiummenge.

Tatsächlich ist aber die Messung nicht so einfach. Denn selbst bei vollständiger Kompensation wird wegen der Zufallsnatur des radioaktiven Zerfalls der Elektrometerfaden nie in Ruhe bleiben. Seine Geschwindigkeit wird sich dauernd verändern. Ich nehme im folgenden an, es handle sich um zwei annähernd gleiche Radiummengen, die sich in der gleichen Distanz von der zugehörigen Ionisationskammer befinden. Dann stellt sich folgendes Problem: Wenn mir eine gewisse Zeit τ, z. B. eine Minute, zur Verfügung steht, wie verwende ich diese Minute am günstigsten, um aus den gemachten Ablesungen die Differenz der beiden zu messenden Präparate mit möglichst grosser Genauigkeit zu bestimmen? Genügt es zum Beispiel Anfang- und Endstellung des Elektrometerfadens abzulesen, oder ist es von Vorteil, seine Stellungen während dieser Minute dauernd zu bestimmen?

---

[1]) Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique.

[2]) Piccard, A., Meylan, L. Une méthode de zéro pour le dosage du radium par le rayonnement gamma. Journ. de Phys. **4**, 715, 1933.

Die Anschauung sagt einem sofort, dass die erste Methode schon die grösste erreichbare Genauigkeit liefert. Trotz der Evidenz dieses Resultates soll es im folgenden streng bewiesen werden. Um es wahrscheinlichkeitstheoretisch untersuchen zu können ist nur ein Weg offen: Der physikalische Vorgang muss auf ein Urnenschema zurückgeführt werden.

2. Das dem physikalischen Vorgang entsprechende Urnenschema sei folgendermassen beschaffen[1]): Eine Urne enthalte eine grosse Anzahl roter und schwarzer Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote zu ziehen sei p, die, eine schwarze zu ziehen sei q. Man ziehe N mal und lege die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder zurück. Wir fragen nach dem Mittelwert $[g]$ und dem Schwankungsmass $\sigma(g)$ eines „Gewinnes" $g = R - S$, wenn R die Zahl der gezogenen roten und S die Zahl der gezogenen schwarzen Kugeln bedeutet und $R + S = N$ ist.

Durch Anwendung bekannter Formeln und Rechenregeln[2]) findet man:

$$[g] = (p - q)\,N \qquad \sigma^2(g) = 4\,p\,q\,N$$

Ich spezialisiere diese Formeln sofort für den Fall, dass p fast gleich q ist und setze

$$p = \tfrac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \qquad q = \tfrac{1}{2} - \frac{\delta}{2}$$

und finde

$$[g] = \delta \cdot N \qquad \sigma^2(g) = N$$

wenn ich δ^2 gegen eins vernachlässige.

3. Der Zusammenhang mit der Kompensationsanordnung ist der folgende: Jedem Zug rot entspricht ein vom Präparat a ausgesandter, in der zugehörigen Ionisationskammer wirksamer γ-Strahl, jedem Zug schwarz ein entsprechender Strahl bezüglich des Präparates b und der zugehörigen Ionisationskammer. $[R]$ ist der Radiummenge $m + \mu$ des Präparates a und $[S]$ der Radiummenge $m - \mu$ des Präparates b proportional. N ist gleich dem Mittelwert der Gesamtzahl der wirksamen γ-Strahlen. Bedeutet Z die Zahl der pro Sekunde und Gramm Radium in der einen Ionisationskammer wirksamen γ-Strahlen, so gilt:

$$[R] = Z \cdot t \cdot (m + \mu) \quad [S] = Z \cdot t \cdot (m - \mu)$$
$$N = 2 \cdot Z \cdot t \cdot m\,.$$

---

[1]) Kohlrausch, K. W. F. Der experimentelle Beweis für den statistischen Charakter des radioaktiven Zerfallsgesetzes. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften 1926.

[2]) Für die Bezeichnungen und die Formeln siehe Pólya, G. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Abderhalden, Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden. Abt. V, Teil 2, Seite 669.

t ist die Beobachtungszeit. Z ist der Zahl der pro Sekunde und pro Gramm Radium zerfallenden Radiumatome proportional (Raumwinkel, Absorption). Es sei vorausgesetzt, dass jeder wirksame γ-Strahl die gleiche Anzahl von Ionen erzeuge. Es herrsche vollkommene Sättigung und der Elektrometerfaden sei trägheitslos.[1])

Man findet

$$[g] = 2 \cdot Z \cdot t \cdot \mu$$

und daraus

$$\mu = \delta \cdot m .$$

Der Elektrometerausschlag Δx ist der Differenz der in den beiden Kammern erzeugten Ionen proportional. Führe ich eine geeignete Proportionalitätskonstante k ein, so erhalte ich:

$$[\Delta x] = k \cdot Z \cdot t \cdot \Delta m \quad \Delta m = 2\mu = 2\delta \cdot m .$$

Damit ist der Zusammenhang des Urnenschemas mit der Beobachtung am Elektrometer hergestellt.

4. Das wahrscheinlichkeitstheoretische Problem besteht nun darin, für ein gegebenes N aus den gemachten Ziehungen δ aus dem Zusammenhang von δ und $[g]$ so genau wie möglich zu bestimmen. Zur Bestimmung von $[g]$ bieten sich folgende Methoden dar:

A) Man berücksichtigt nur den Schlussgewinn g_N und kümmert sich nicht darum, was dazwischen geschehen ist. Auf das Elektrometer übertragen will das heissen, dass man nur am Anfang und am Ende der Zeit τ eine Ablesung macht.

Man findet sofort

$$[g]_A = g_N \qquad \sigma^2 (g)_A = N.$$

B) Man teilt die Gesamtserie N in n unabhängige Unterserien von je s Zügen und berücksichtigt die Schlussdifferenz g_i einer jeden Unterserie. Auf das Elektrometer übertragen will das heissen, dass man je nach der Zeit $\frac{\tau}{n}$ eine Ablesung macht und die in diesen Zeiten vom Elektrometerfaden zurückgelegten Wege bestimmt.

Berücksichtigt man

$$n \cdot s = N \sum_{i=1}^{n} g_i = g_N \quad \text{und} \quad [g]_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i}{n}$$

so erhält man:

$$n [g]_B = g_N = [g]_A \quad n^2 \sigma^2 (g)_B = N = \sigma^2 (g)_A .$$

[1]) Kohlrausch, loc. cit.

Man findet also, wie zu erwarten war, dass die Fälle A und B vollkommen gleichwertig sind. B liefert auf eine wesentlich kompliziertere Art dasselbe Resultat wie A, ist also auszuschliessen.

C) Man teilt die Gesamtserie folgendermassen in n nicht unabhängige Unterserien ein:

Serie	1	2	i	n
Gewinne	$h_1 = g_1$	$h_2 = g_1 + g_2$	$h_i = \sum_1^i g_k$	$h_n = \sum_1^n g_k$
Zahl der Züge . .	s	$2\,s$	$i \cdot s$	$n \cdot s$

Die erste Serie besteht also aus den Zügen 1 bis s, die zweite aus den Zügen 1 bis $2s$ und so weiter. Auf das Elektrometer übertragen will das heissen, dass man wieder wie im Fall B nach der Zeit $\frac{\tau}{n}$ eine Ablesung macht, nun aber nicht die je in der Zeit $\frac{\tau}{n}$ zurückgelegten Wege benützt, sondern die in den Zeiten

$$\frac{\tau}{n}, \quad 2\frac{\tau}{n} \ldots i\frac{\tau}{n} \ldots n\frac{\tau}{n}.$$

Diese Methode entspringt der folgenden nur scheinbar richtigen Überlegung: Die letzte Serie der Methode C ist schon so genau wie die einzige der Methode A. Dazu hat man aber noch eine ganze Anzahl von Serien, welche fast so genau sind wie die beste, welche bei der Mittelbildung die Genauigkeit noch erhöhen werden. In Wirklichkeit tun sie das aber nicht, sondern, ganz im Gegenteil, sie verschlechtern sie, was sofort aus folgender Rechnung folgt, wenn man für $[g_C]$ eine einfache lineare Kombination der h_i und für $\sigma^2\,(g)_C$ die angeschriebene Formel benützt.

$$[g]_C = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n i} \qquad \sigma^2\,(g)_C = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n i\right)} \sum_{k,l=1}^n \{[h_k\,h_l] - [h_k]\,[h_l]\}.$$

Führt man die Werte der h_i ein, so erhält man

$$n\,[g]_C = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)\,g_i$$

$$n^2\sigma^2\,(g)_C = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^n i^2}{\left(\sum_{i=1}^n i\right)} \cdot N = N\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{(2\,n+1)}{(n+1)}\right\}.$$

Daraus ergibt sich:

$$n^2 \sigma^2 (g)_C > \sigma^2 (g)_A .$$

Die neue Methode C ist also nicht nur umständlicher, sondern auch schlechter als die vorhergehenden, also auszuschliessen.

D) Man könnte daran denken, in den Fällen B und C die Einteilung in Unterserien unregelmässig vorzunehmen. Man findet durch Ausrechnen, dass man zu noch ungünstigeren Resultaten kommt. Man findet leicht ganz allgemein, dass $\sigma^2 (g)_D$ vom Mittelwert $[g]_D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$, der eine beliebige lineare Kombination der g_i darstellt, mit der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ein Minimum wird für $\alpha_i = \frac{1}{n}$, somit man unter Berücksichtigung von $\sum_{i=1}^{n} g_i = g_N$ den Fall A wiederfindet.

Wir erhalten also das folgende, äusserst einfache Resultat: Die erste Methode, die einfachste, ist auch die beste. Man braucht sich nicht im geringsten um die Zwischengewinne zu bekümmern und hat nur den Endgewinn zu berücksichtigen. Die Mittelbildung wird durch den Ziehvorgang automatisch besorgt.

5. Die Anwendung dieses Resultates auf die Kompensationsanordnung ist sehr einfach: Man macht je eine Elektrometerablesung zur Zeit null und zur Zeit τ und kümmert sich nicht darum, wo sich der Elektrometerfaden in der Zwischenzeit befunden hat. Aus dem in der Zeit τ vom Faden zurückgelegten Weg Δx berechnet sich der Unterschied Δm der beiden Präparate nach der Formel

$$\Delta m = \frac{\Delta x}{K \cdot Z \cdot \tau} .$$

Die auftretenden Konstanten sind leicht experimentell zu bestimmen. Der relative mittlere Fehler σ von Δm ist der Quadratwurzel aus dem Produkt $\tau \cdot m$ umgekehrt proportional und hat den Wert

$$\sqrt{\frac{2}{Z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau \cdot m}} .$$

Es ist nur die Einschränkung zu machen, dass τ nicht zu gross sein darf, weil sonst Isolationsverluste eine Rolle zu spielen beginnen[1]).

Brüssel, Faculté des Sciences appliquées, Université Libre.

[1]) KOHLRAUSCH, loc. cit.