Eine vereinfachte Ableitung der Klein-Nishina-Formel

Autor(en): **Wannier, Gregor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **8 (1935)**

Heft VIII

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110548

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine vereinfachte Ableitung der Klein-Nishina-Formel

von **Gregor Wannier.**

(25. XI. 35.)

Seit der Ableitung der Streuformel von KLEIN und NISHINA aus der DIRACschen Strahlungstheorie durch WALLER[1]) sind die Methoden auf diesem Gebiete erheblich vereinfacht worden. Trotzdem ist in der Literatur noch keine durchsichtigere Ableitung zu finden; diese Lücke soll die vorliegende Arbeit ausfüllen.

I.

Die Streuung von Licht am freien Elektron ist ein Doppelprozess, bei dem ein Lichtquant der Frequenz ω_s, der Fortpflanzungsrichtung $\vec{n}_s$ und der Polarisationsrichtung $\vec{A}_s$ übergeht in ein solches der Frequenz $\omega_{s'}$, der Fortpflanzungsrichtung $\vec{n}_{s'}$ und der Polarisationsrichtung $\vec{A}_{s'}$; zugleich geht ein Elektron aus seinem Ruhezustand $E_n = m\,c^2$ mit Spin $\sigma_{n'}$ in einen Zustand E_m mit Spin $\sigma_{m'}$ über. Der Prozess gehorcht bekanntlich dem Energie- und Impulssatz, d. h.

$$\begin{aligned} m\,c^2 + \hbar\,\omega_s - E_m - \hbar\,\omega_{s'} &= 0 \\ \hbar\,\omega_s\,\vec{n}_s - c\,\vec{p}_{\,m} - \hbar\,\omega_{s'}\,\vec{n}_{s'} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Dies ergibt für die ausgestrahlte Frequenz

$$\frac{1}{\hbar\,\omega_{s'}} - \frac{1}{\hbar\,\omega_s} = \frac{1}{m\,c^2}\,(1 - \vec{n}_s\,\vec{n}_{s'})\,. \tag{2}$$

Nehmen wir gleich an, der Anfangsspin $\sigma_{n'}$ sei nicht bekannt und der Endspin $\sigma_{m'}$ werde nicht beobachtet, so erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit $W\,(m, s')$ den Ausdruck[2])

$$W\,(m, s') = \frac{2\,\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n'\,m'=1}^{2} \left| V^{s\,s'}_{\substack{n'\,m' \\ n\,m}} \right|^2 \cdot \varrho\,(m, s') \cdot t. \tag{3}$$

$V^{s\,s'}_{\substack{n'\,m' \\ n\,m}}$ ist das Übergangsmatrixelement des Prozesses und $\varrho\,(m, s')$

[1]) I. WALLER, Zs. f. Phys. **61**, 1930, 837.

[2]) Für eine ausführlichere Darstellung dieser Ableitung siehe irgend eine Darstellung der Quantenelektrodynamik, z. B. FERMI, Rev. of mod. Phys. **4**, 1932, 87 oder WENZEL, Handb. d. Phys. Bd. XXIV, 1.

die Dichte der Endzustände bezogen auf ihre Energie $\hbar\,\omega_{s'} + E_m$. Dies ergibt bekanntlich

$$\varrho\,(m, s') = \frac{\Omega\,\omega_{s'}^2}{4\,\pi^3\,c^3}\,\frac{d\,\omega_{s'}}{d\,(\hbar\,\omega_{s'} + E_m)}\,d\,\omega = \frac{\Omega\,\omega_{s'}^3}{4\,\pi^3\,c^3\,\hbar\,\omega_s}\cdot\frac{E_m}{m\,c^2}\cdot d\,\omega \tag{4}$$

wo Ω = Volumen des Raumes, in dem der Prozess sich abspielt, m = Masse des Elektrons, c = Lichtgeschwindigkeit, $d\,\omega$ = Element der Einheitskugel für die gestreute Strahlung s'. Bei festgehaltener Polarisation $A_{s'}$ steht hier noch ein Faktor $\frac{1}{2}$.

Weiter gilt bekanntlich in zweiter Näherung

$$\sum_{n'\,m'=1}^{2}\left|V_{\substack{n'\,m'\\ n\,m}}^{s\,s'}\right|^2 = \left(\frac{4\,\pi\,e^2\,c^2}{\Omega}\right)^2\left(\frac{\hbar}{2\,\omega_s}\right)\left(\frac{\hbar}{2\,\omega_{s'}}\right)\sum_{n'\,m'=1}^{2}\left|K_{n\,m}^{n'\,m'}(s, s')\right|^2 \tag{5}$$

wo e das elektrische Elementarquantum und

$$K_{n\,m}^{n'\,m'}(s, s') = \sum_{l\,l'}\left(\frac{j_{n\,l}^{n'\,l'}(s)\,k_{l\,m}^{l'\,m'}(s')}{E_m - E_l^{l'} + \hbar\,\omega_s} + \frac{k_{n\,l}^{n'\,l'}(s')\,j_{l\,m}^{l'\,m'}(s)}{E_m - E_l^{l'} - \hbar\,\omega_{s'}}\right) \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} j\,(s) &= \vec{A}_s\,\vec{\alpha}\cdot e^{\frac{i\,\omega_s\,\vec{n}_s\,\vec{x}}{c}} \\ k\,(s') &= \vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha}\cdot e^{-\frac{i\,\omega_{s'}\,\vec{n}_{s'}\,\vec{x}}{c}}\,. \end{aligned} \tag{6 a}$$

Gleichung (6) enthält die davon abgeleiteten Matrixelemente; mit $\vec{\alpha}$ und β bezeichnen wir die bekannten Operatoren der Dirac-gleichung.

Aus der Übergangswahrscheinlichkeit erhalten wir den Wirkungsquerschnitt σ des Elektrons durch die Beziehung

$$\sigma = \int_{\omega}\frac{\Omega}{c\,t}\,W\,(m, s') = 2\,\pi\int_0^{\pi} s\,(\vartheta)\,d\,\vartheta\,. \tag{7}$$

Dann ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $s\,(\vartheta)$ auf Grund von (3), (4), (5):

$$s\,(\vartheta) = e^4\,\frac{E_m}{m\,c^2}\,\frac{\omega_{s'}^2}{\omega_s^2}\sum_{n'\,m'=1}^{2}\left|K_{n\,m}^{n'\,m'}(s, s')\right|^2\,. \tag{8}$$

Den Summenausdruck muss man sich über alle Polarisationen gemittelt denken. Seine Berechnung bildet nun die Aufgabe der folgenden Seiten.

II.

Die ungestörten Eigenfunktionen des Elektrons sind Spinoren mit vier Komponenten und genügen der Gleichung

$$(E + c\,\vec{\alpha}\,\vec{p} + \beta\, m\, c^2)\,\psi = 0. \tag{9}$$

Sie sind von der Form

$$\psi^{n'}(\vec{r}, \vec{p}_n) = u^{n'}(p_n) \cdot \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_n \vec{r}}}{\sqrt{\Omega}} \tag{10}$$

wie in Fermi, Seite 116, genauer ausgeführt wird. Dabei kann einerseits n' 4 Werte annehmen, andererseits besitzen die Spinoren $u^{n'}$ 4 Komponenten, sodass eine Matrix $u^{n'}_{\mu}$ entsteht. Sie ist unitär, einerseits wegen der Orthogonalität und Normalisierung der $\psi^{n'}_n$, andererseits wegen ihrer Vollständigkeitsrelation.

Wir haben nun die Matrixelemente der Ausdrücke (6a) zu untersuchen; sie lauten

$$\mathfrak{j}^{n'l'}_{nl}(s) = \int \{\overline{\psi}^{l'}(p_l),\ (\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,\psi^{n'}(p_n)\}\, e^{i\frac{\omega_s \vec{n}_s \vec{x}}{c}}\, d\tau. \tag{11}$$

Die geschweifte Klammer steht hier wie im folgenden für das skalare Produkt zweier Spinoren. Ausgeschrieben bedeutet es also

$$\mathfrak{j}^{n'l'}_{nl}(s) = \int \sum_{\nu,\,\mu=1}^{4} \overline{\psi}^{l'}_{\nu}(p_l)\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha}^{\mu}_{\nu})\,\psi^{n'}_{\mu}(p_n)\, e^{i\frac{\omega_s \vec{n}_s \vec{x}}{c}}\, d\tau. \tag{11a}$$

Das Einsetzen von (10) in (11) zeigt, dass die eigentlichen Integrale einen Impulssatz zur Folge haben und sich dann auf 1 reduzieren, sodass nur die Spinorprodukte übrig bleiben. Setzen wir, diese in (6) ein, so wird

$$K^{n'm'}_{nm} = \sum_{l'=1}^{4} \frac{\{\bar{u}^{m'}(p_m),\ (\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,u^{l'}(p_{l_1})\}\,\{\bar{u}^{l'}(p_{l_1}),\ (\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,u^{n'}(p_n)\}}{E_n + \hbar\,\omega_s - E^{l'}(p_{l_1})}$$
$$+ \sum \frac{\{\bar{u}^{m'}(p_m),\ (\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,u^{l'}(p_{l_2})\}\,\{\bar{u}^{l'}(p_{l_2}),\ (\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,u^{n'}(p_n)\}}{E_n - \hbar\,\omega_{s'} - E^{l'}(p_{l_2})}. \tag{12}$$

Die Impulssätze haben die Form

$$\vec{p}_n + \frac{\hbar\,\omega_s}{c}\,\vec{n}_s = \vec{p}_{l_1} = \vec{p}_m + \frac{\hbar\,\omega_{s'}}{c}\,\vec{n}_{s'}$$
$$\vec{p}_n - \frac{\hbar\,\omega_{s'}}{c}\,\vec{n}_{s'} = \vec{p}_{l_2} = \vec{p}_m - \frac{\hbar\,\omega_s}{c}\,\vec{n}_s \tag{13}$$

d. h. sie weichen nur für den Zwischenzustand voneinander ab und bestätigen Gleichung (1). Nun formen wir (12) um:

$$K_{n\,m}^{n'\,m'} = \frac{\sum_{l'=1}^{4} \{\bar{u}^{m'}(p_m), (\vec{A}_{s'}\vec{\alpha})(E_n + \hbar\,\omega_s + H(p_{l_1}))\,u^{l'}(p_{l_1})\}\{\ *\ \}}{(E_n + \hbar\,\omega_s)^2 - (E(p_{l_1}))^2} + \cdots$$

$$\{\ *\quad \bar{u}^{l'}(p_{l_1}), (\vec{A}_s\vec{\alpha})\,u^{n'}(p_n)\}$$

wo

$$H(p) = -c\,\vec{p}\,\vec{\alpha} - \beta\,m\,c^2.$$

Auf Grund der Energie- und Impulssätze und der allgemeinen Beziehung

$$\sum_{h_2=1}^{4} \{\bar{u}^{h_1}(p_1), O \cdot u^{h_2}(p_2)\}\{\bar{u}^{h_2}(p_2), P \cdot u^{h_3}(p_3)\} = \{\bar{u}^{h_1}(p_1), O \cdot P\,u^{h_3}(p_3)\}$$

schreiben wir dafür:

$$K_{n\,m}^{n'\,m'} = \{\bar{u}^{m'}(p_m), (P + Q)\,u^{n'}(p_n)\} \tag{14}$$

wobei

$$P = \frac{1}{2\,m\,c^2\,\hbar\,\omega_s}[(\vec{A}_{s'}\vec{\alpha})\,(m\,c^2\,(1-\beta) + \hbar\,\omega_s\,(1 - \vec{n}_s\,\vec{\alpha}))\,(\vec{A}_s\vec{\alpha})]$$

$$Q = -\frac{1}{2\,m\,c^2\,\hbar\,\omega_{s'}}[(\vec{A}_s\vec{\alpha})\,(m\,c^2(1-\beta) - \hbar\,\omega_{s'}\,(1 - \vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha}))\,(\vec{A}_{s'}\vec{\alpha})]. \tag{15}$$

Wir ersehen aus Gleichung (8), dass wir von (14) das Modulquadrat bilden müssen, dass aber die Summe über n' und m' nur die Zustände positiver Energie umfasst. Wollen wir doch über alle $16\,K$ summieren, so benötigen wir die „Vernichtungsoperatoren"

$$V(p_n) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{H(p_n)}{E^+(p_n)}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \beta)$$

$$V(p_m) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{H(p_m)}{E^+(p_m)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\,E_m}[m\,c^2\,(1-\beta) + \hbar\,\omega_s\,(1 - \vec{n}_s\vec{\alpha}) - \hbar\,\omega_{s'}\,(1 - \vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha})]. \tag{16}$$

Sie haben, ihrem Namen entsprechend, für Zustände positiver Energie den Eigenwert 1, für solche negativer Energie den Wert 0.

Da die $u_\mu^{n'}$ unitär sind, fallen sie dann aus der Rechnung und es verbleibt:

$$\sum_{n',\,m'=1}^{2} |K_{n\,m}^{n'\,m'}|^2 = \textbf{Spur}\,[(P + Q)\,V(p_n)\,(\tilde{P} + \tilde{Q})\,V(p_m)]. \tag{17}$$

Dabei bedeutet $\tilde{P}$ die transponierte Matrix von P, d. h. $\tilde{P}_n^m = \overline{P}_m^n$. Wenn sich aber die Matrix, wie in unserem Falle, als Produkt HERMITE'scher Elementarfaktoren schreiben lässt, so ist die transponierte einfach gleich der Ausgangsmatrix mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren.

Die Berechnung des Ausdruckes (17) ist äusserst einfach, wenn man sich nur eine Anzahl Rechenregeln für die α und β vergegenwärtigt. Wir wollen hier zusammenstellen, was wir brauchen:

a) Aus

$$\alpha_i \alpha_h + \alpha_h \alpha_i = 2\,\delta_{ih}$$

folgt

$$(\vec{A}\,\vec{\alpha})\,(\vec{B}\,\vec{\alpha}) + (\vec{B}\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}\,\vec{\alpha}) = 2\,\vec{A}\,\vec{B}$$

wobei hier wie im folgenden die Vektoren mit grossen lateinischen Buchstaben sowohl unter sich, als mit den α und β kommutieren sollen.

b) Aus a) folgt insbesondere

$$(\vec{A}\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}\,\vec{\alpha}) = \vec{A}^2$$

und wenn $\vec{A}$ Einheitsvektor ist

c) $$(1 - \vec{A}\,\vec{\alpha})^2 = 2\,(1 - \vec{A}\,\vec{\alpha}).$$

d) Wir können a) auch in der Form schreiben

$$(1 + \vec{A}\,\vec{\alpha})\,(\vec{B}\,\vec{\alpha}) - (\vec{B}\,\vec{\alpha})\,(1 - \vec{A}\,\vec{\alpha}) = 2\,\vec{A}\,\vec{B}.$$

e) Dann folgt daraus, wenn $\vec{A}$ Einheitsvektor ist

$$(1 - \vec{A}\,\vec{\alpha})\,(\vec{B}\,\vec{\alpha})\,(1 - \vec{A}\,\vec{\alpha}) = -2\,(\vec{A}\,\vec{B})\,(1 - \vec{A}\,\vec{\alpha}).$$

f) Aus

$$\vec{\alpha}\,\beta + \beta\,\vec{\alpha} = 0$$

folgt

$$(1 + \beta)\,\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\,(1 - \beta) = 0$$

und weiter

g) $$(1 - \beta)\,\vec{\alpha}\,(1 - \beta) = 0$$

ja überhaupt

$$(1 - \beta)\,(\vec{A}_1\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_2\,\vec{\alpha}) \cdots (\vec{A}_n\,\vec{\alpha})\,(1 - \beta) = 0$$

wenn die Zahl n der α-Faktoren ungerade ist.

Neben diesen Rechenregeln benötigen wir nur noch wenige Spurformeln, nämlich

h) Die Spur eines Produktes ist gegenüber zyklischer Vertauschung der Faktoren invariant.

i) Die Spur der Einheit ist 4.

k) $$\tfrac{1}{4}\,\boldsymbol{S}\,[(\vec{A}\,\vec{\alpha})\,(\vec{B}\,\vec{\alpha})] = \vec{A}\,\vec{B}\,.$$

Die Formel folgt leicht aus a), h) und i).

Endlich gilt die allgemeine Regel:

l) Ein Produkt, das eine ungerade Anzahl von Faktoren $\vec{\alpha}$ oder β enthält, neben Ausdrücken, die von $\vec{\alpha}$, resp. β nicht abhängen, besitzt die Spur 0.

Sie lässt sich so beweisen:

Wir schreiben unseren Ausdruck als Summe von Produkten der α_i und β und bezeichnen eines davon mit Γ. Wenigstens einer der 4 Faktoren tritt eine ungerade Anzahl von Malen auf. Unter den anderen hat es zwei, die entweder beide eine gerade, oder beide eine ungerade Anzahl von Malen auftreten. Der übrigbleibende Faktor sei z. B. α_x. Für ihn gilt dann

$$\alpha_x\,\Gamma + \Gamma\,\alpha_x = 0\,.$$

Wir schliessen daraus

$$\boldsymbol{S}\,[\Gamma] = \boldsymbol{S}\,[\Gamma\cdot\alpha_x\cdot\alpha_x] = -\,\boldsymbol{S}\,[\alpha_x\,\Gamma\,\alpha_x]$$

Dies gibt aber wegen h)

$$= -\,\boldsymbol{S}\,[\Gamma\cdot\alpha_x\,\alpha_x] = -\,\boldsymbol{S}\,[\Gamma] = 0\,.$$

Nun zerlegen wir (17) in seine 4 Teile und berechnen diese einzeln:

$$\boldsymbol{S}\,[P\,V\,(p_n)\,\tilde{P}\,V\,(p_m)] =$$

$$\frac{1}{4\,\hbar^2\,\omega_s^2\,m^2\,c^4\,E_m}\cdot\frac{1}{4}\,\boldsymbol{S}\,\big[(A_{s'}\,\alpha)\,\big(\cancel{m\,c^2\,(1-\beta)} + \hbar\,\omega_s\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\big)$$
$$(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(1-\beta)\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,\big(\cancel{m\,c^2\,(1-\beta)} + \hbar\,\omega_s\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\big)\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})$$
$$\big(m\,c^2\,(1-\beta) + \hbar\,\omega_s\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha}) - \hbar\,\omega_{s'}\,(1-\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha})\big)\big]\,.$$

Die Streichungen in der zweiten und sechsten Klammer erfolgten auf Grund von Regel g), sodass man jetzt mit $\hbar^2\,\omega_s^2$ kürzen kann. Daraufhin zerlegen wie die letzte Klammer in ihre drei Summanden und vereinfachen dann das erste Glied auf Grund der

Regeln h) und g); bei den beiden andern ist der Faktor $1-\beta$ wegen l) belanglos, worauf man zuerst b), dann c) anwenden kann:

$$= \frac{1}{4\,m^2\,c^4\,E_m} \cdot \frac{1}{4}\,\boldsymbol{S}\,[m\,c^2\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(1-\beta)\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\beta)$$
$$+\,2\,\hbar\,\omega_s\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})$$
$$-\,2\,\hbar\,\omega_{s'}\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\,(A_{s'}\,\alpha)\,(1-\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha})].$$

Nun benützen wir für das erste Glied f) und entfernen β, für das zweite e), für das dritte d), vereinfacht durch $(\vec{A}_{s'}\,\vec{n}_{s'}) = 0$. Nach einigen Reduktionen auf Grund von b) verbleibt:

$$= \frac{1}{4\,m^2\,c^4\,E_m} \cdot \frac{1}{4}\,\boldsymbol{S}\,[2\,m\,c^2 + 4\,\hbar\,\omega_s\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{n}_s)\,(A_{s'}\,\alpha)\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})$$
$$-\,2\,\hbar\,\omega_{s'}\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\,(1+\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha})].$$

Dann ergibt endlich i), k) und l):

$$\boldsymbol{S}\,[P\,V\,(p_n)\,\tilde{P}\,V\,(p_m)] =$$
$$\frac{1}{2\,m^2\,c^4\,E_m}\,[m\,c^2 + 2\,\hbar\,\omega_s\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{n}_s)^2 - \hbar\,\omega_{s'}\,(1-\vec{n}_s\,\vec{n}_{s'})]. \quad (18a)$$

Man erhält analog

$$\boldsymbol{S}\,[Q\,V\,(p_n)\,\tilde{Q}\,V\,(p_m)] =$$
$$\frac{1}{2\,m^2\,c^4\,E_m}\,[m\,c^2 - 2\,\hbar\,\omega_{s'}\,(\vec{A}_s\,\vec{n}_{s'})^2 + \hbar\,\omega_s\,(1-\vec{n}_s\,\vec{n}_{s'})]. \quad (18b)$$

Weiter wird

$$\boldsymbol{S}\,[P\,V\,(p_n)\,\tilde{Q}\,V\,(p_m)] =$$
$$-\frac{1}{4\,m^2\,c^4\,E_m\,\hbar^2\,\omega_s\,\omega_{s'}} \cdot \frac{1}{4}\,\boldsymbol{S}\,[(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(\cancel{m\,c^2\,(1-\beta)} + \hbar\,\omega_s\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha}))$$
$$(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(1-\beta)\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(\cancel{m\,c^2\,(1-\beta)} - \hbar\,\omega_{s'}\,(1-\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha}))\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})$$
$$(m\,c^2\,(1-\beta) + \hbar\,\omega_s\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha}) - \hbar\,\omega_{s'}\,(1-\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha}))].$$

Wir trennen wieder die letzte Klammer in ihre Glieder, reduzieren dann das erste nach g), die beiden andern nach e):

$$= \frac{1}{4\,m^2\,c^4\,E_m} \cdot \frac{1}{4}\,\boldsymbol{S}\,[m\,c^2\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(1-\beta)\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(1-\beta)$$
$$-\,2\,\hbar\,\omega_s\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{n}_s)\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})$$
$$+\,2\,\hbar\,\omega_{s'}\,(\vec{A}_s\,\vec{n}_{s'})\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\vec{n}_s\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_s\,\vec{\alpha})\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{\alpha})\,(1-\vec{n}_{s'}\,\vec{\alpha})].$$

Nach der Ausreduktion von β erfolgt die weitere Vereinfachung im ersten Glied nach a), in den beiden andern nach d) mit Hilfe der Beziehungen $\vec{A}_s \vec{n}_s = \vec{A}_{s'} \vec{n}_{s'} = 0$; dann wie oben Reduktion wegen b). Für die Spurbildung kommt man dann wiederum mit i), k) und l) aus. Es ergibt sich

$$\boldsymbol{S}[P\,V(p_n)\,\tilde{Q}\,V(p_m)] = \tag{18c}$$

$$\frac{1}{2\,m^2\,c^4\,E_m}[m\,c^2\,(2\,(\vec{A}_s\,\vec{A}_{s'})^2 - 1) - \hbar\,\omega_s\,(\vec{A}_{s'}\,\vec{n}_s)^2 + \hbar\,\omega_{s'}\,(\vec{A}_s\,\vec{n}_{s'})^2].$$

Genau derselbe Ausdruck ergibt sich auch für

$$\boldsymbol{S}[Q\,V(p_n)\,\tilde{P}\,V(p_m)]. \tag{18d}$$

Vereinigen wir die Formeln (18) zu (17), so folgt

$$\sum_{n'\,m'=1}^{2} |K_{n\,m}^{n'\,m'}(s, s')|^2$$

$$\frac{1}{2\,m^2\,c^4\,E_m}[4\,m\,c^2\,(\vec{A}_s\,\vec{A}_{s'})^2 + (\hbar\,\omega_s - \hbar\,\omega_{s'})\,(1 - \vec{n}_s\,\vec{n}_{s'})]. \tag{19}$$

Nun folgt aus (2)

$$(\hbar\,\omega_s - \hbar\,\omega_{s'})\,(1 - \vec{n}_s\,\vec{n}_{s'}) = m\,c^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_{s'}} + \frac{\omega_{s'}}{\omega_s} - 2\right).$$

Weiter ergibt sich bei der Mittelung über die Polarisation der beiden Lichtstrahlen

$$\overline{(\vec{A}_s\,\vec{A}_{s'})^2} = \tfrac{1}{4}\,(2 - \sin^2\vartheta)$$

wenn

$$\vec{n}_s\,\vec{n}_{s'} = \cos\vartheta.$$

Setzen wir endlich (19) in (8) ein, so erhalten wir die Streuformel von Klein und Nishina:

$$s(\vartheta) = \frac{e^4}{2\,m^2\,c^4}\,\frac{\omega_{s'}^2}{\omega_s^2}\left(\frac{\omega_s}{\omega_{s'}} + \frac{\omega_{s'}}{\omega_s} - \sin^2\vartheta\right). \tag{20}$$

Auch die Formel mit festgehaltener Sekundärpolarisation folgt ohne weiteres aus unseren Gleichungen.

Es möge bei dieser Gelegenheit noch erwähnt werden, dass die Ableitung der K. N. f. auf Grund der relativistisch invarianten

Störungstheorie von E. STÜCKELBERG[1]) ebenfalls zum Ausdruck (17) führt. Man muss dazu nur den „Erwartungswert" von $\gamma_4\, \Omega^+\, \Omega$ (vgl. § 4, loc. cit.) in eine Spur verwandeln mit Hilfe des Vernichtungsoperators $V(p_n)$; es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \frac{1}{i}\int \varphi^+ A\, \varphi\, d\tau = \int \{\overline{\varphi}, \beta\, A\, \varphi\}\, d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{n'=1}^{2} \{\bar{u}^{n'}(p_n),\ \beta \cdot A\, u^{n'}(p_n)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{S}[\beta \cdot A \cdot V(p_n)].\end{aligned}$$

Wegen der Relation

$$V(p_m) \cdot V(p_m) = V(p_m)$$

erhält man daraus

$$\overline{\gamma_4\, \Omega^+\, \Omega} = 2\, E_m^2\, \boldsymbol{S}[(\tilde{P} + \tilde{Q})\, V(p_m)\, (P + Q)\, V(p_n)]$$

wie oben, Gleichung (17).

Die Anregung zu dieser Arbeit, sowie verschiedene praktische Winke verdanke ich Herrn Dr. V. WEISSKOPF, dem ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Physikal. Institut der Universität Genf.

---

[1]) E. C. G. STÜCKELBERG, Ann. d. Phys. **21**, 1934, 367.