Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: III

Artikel: Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié. II

Autor: Weigle, J. / Patry, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110848

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié. II

par **J. Weigle** et **J. Patry.**

(10. II. 38.)

Dans la première partie de ce travail[1]), l'un de nous a montré comment la lumière se propage dans un milieu stratifié lorsque la constante diélectrique de ce milieu est scalaire et périodique. Il était ressorti de cette étude le fait suivant: si la période de la structure du milieu est beaucoup plus petite que la longueur d'onde, le milieu est biréfringent quoique sa constante diélectrique soit scalaire. Cette biréfringence est due à la répartition anisotrope de la matière dans l'espace. En effet la lumière, dont la longueur d'onde englobe un très grand nombre de stratifications, prend alors une moyenne de la constante diélectrique et cette moyenne macroscopique aura des valeurs différentes suivant la direction dans laquelle elle sera prise (dans la direction de la stratification ou dans une direction perpendiculaire à celle-ci par exemple). Pour la lumière, le milieu est donc anisotrope (comme il l'est évidemment pour un champ électrique statique).

Dans les cristaux, dont notre milieu stratifié est un modèle fort simplifié, les atomes et les molécules sont en général eux-mêmes anisotropes. Pour les décrire, dans une forme continue, il est alors nécessaire d'attribuer au milieu une constante diélectrique microscopique tensorielle, périodique avec le réseau ou avec la stratification.

Il est alors intéressant de calculer comment la lumière se propage dans un tel milieu, c'est-à-dire calculer les valeurs moyennes macroscopiques de la constante diélectrique dans les différentes directions. On pourra ainsi connaître quels rôles l'anisotropie des atomes et l'anisotropie de la distributions des atomes dans l'es-

---

[1]) Helv. Phys. Acta, **11**, 159, 1938. La numérotation des formules du présent article fait suite à celle du précédent; nous renverrons aux formules précédentes en citant leur numéro sans indiquer qu'elles se trouvent dans la première partie.

*

pace jouent respectivement dans la biréfringence. Ce sont ces calculs qui forment l'objet du présent travail.

Supposons que le milieu est stratifié selon la direction x avec la période $\Lambda = 1/b$ et que la constante diélectrique microscopique est un tenseur symétrique. Ses axes principaux sont dans les directions x, y, z, que nous désignerons par les indices $1, 2, 3$. Les constantes diélectriques principales seront des fonctions périodiques de x avec la période Λ. On aura donc

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{11}(x) &= \sum \varepsilon_m^{11} e^{2\pi i m b x} & \varepsilon_m^{11} &= \varepsilon_{-m}^{11*} \\ \varepsilon^{22}(x) = \varepsilon^{33}(x) &= \sum \varepsilon_m^{33} e^{2\pi i m b x} & \varepsilon_m^{33} &= \varepsilon_{-m}^{33*} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

et

$$D = (\tilde{\varepsilon} E) .$$

Nous n'indiquerons pas les vecteurs par des flèches, pour ne pas alourdir les notations.

Molière[1]), dans un travail important se rapportant à l'optique cristalline, a discuté d'une façon détaillée les propriétés du tenseur $\tilde{\varepsilon}$ qui, dans un cristal non absorbant, peut être hermitique ou réel et symétrique. Ces considérations sont fondamentales pour ce qui concerne l'activité optique des réseaux. Nous ne tiendrons pas compte de ces propriétés dans ce travail, réservant cette discussion pour une publication ultérieure.

Nous aurons besoin, dans la suite, d'exprimer E en fonction de D

$$E = (\tilde{\psi} D) .$$

Pour calculer le tenseur $\tilde{\psi}$ en fonction de $\tilde{\varepsilon}$, on remarque que

$$(\tilde{\psi}\tilde{\varepsilon}) = \tilde{1}$$

$\tilde{1}$ étant une matrice unité. Pour les composantes des tenseurs, cette équation devient

$$\sum_{\nu} \psi^{\lambda\nu} \varepsilon^{\nu k} = \vartheta^{\lambda k}$$

ce qui, dans notre cas, donne

$$\psi^{11} = \frac{1}{\varepsilon^{11}} \quad \text{et} \quad \psi^{33} = \psi^{22} = \frac{1}{\varepsilon^{33}} . \tag{28}$$

---

[1]) Molière, Ann. der Phys. **24**, 591, 1934.

On peut donc écrire

$$\left.\begin{aligned} \psi^{11}(x) &= \sum_m \psi_m^{11} e^{2\pi i m b x} & \psi_m^{11} &= \psi_{-m}^{11*} \\ \psi^{33}(x) &= \sum_m \psi_m^{33} e^{2\pi i m b x} & \psi_m^{33} &= \psi_{-m}^{33*} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Pour calculer les $\psi_m^{\nu\nu}$ en fonction des $\varepsilon_n^{\nu\nu}$, on aura donc des équations exactement semblables à (3).

En cherchant des solutions des équations de MAXWELL sous la forme

$$\left.\begin{aligned} D &= \sum_n D_n e^{2\pi i((k_n \cdot r)-\nu t)} \\ E &= \sum_n E_n e^{2\pi i((k_n \cdot r)-\nu t)} \\ H &= \sum_n H_n e^{2\pi i((k_n \cdot r)-\nu t)} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

on trouve facilement que

$$\frac{k^2}{k_n^2} D_n = E_{n \perp kn} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\nu}{c} \tag{31}$$

$E_{n\perp kn}$ étant le vecteur composante de E_n perpendiculaire au vecteur d'onde k_n; D_n est évidemment perpendiculaire à ce dernier. D'autre part, en introduisant (29) et (30) dans l'équation (27), on trouve

$$\sum_n E_m e^{2\pi i((k_n \cdot r)-\nu t)} = \sum_p \sum_m (\tilde{\psi}_p D_m) e^{2\pi i[((k_m+pb)\cdot r)-\nu t]}$$

$(\tilde{\psi}_p D_m)$ est le vecteur qu'on obtient en multipliant le vecteur D_m par le tenseur dont les composantes sont $\psi_p^{\nu\lambda}$, c'est-à-dire le tenseur ayant pour composantes les $p^{\text{ièmes}}$ coefficients des séries de FOURIER (29). Dans l'équation ci-dessus, b est un vecteur ayant la direction x ($b=1/\Lambda$). L'égalité des sommes d'exponentielles nous conduit à écrire

$$k_{m+p} = k_m + pb \qquad \text{ou} \qquad k_n = k_0 + nb \tag{32}$$

et, en posant $n+p=q$

$$\sum_n E_n e^{2\pi i(k_n \cdot r)} = \sum_q e^{2\pi i(k_q \cdot r)} \sum_m (\tilde{\psi}_{q-m} D_m).$$

On voit alors que

$$E_n = \sum_m (\tilde{\psi}_{n-m} D_m)$$

et, en introduisant cette expression dans (30), on a, finalement,

$$\frac{k^2}{k_n^2} D_n = \sum_m (\tilde{\psi}_{n-m} D_m)_{\perp kn}. \tag{33}$$

Les deux systèmes d'équations (32) et (33) sont les équations fondamentales du problème. On voit que (32), qui détermine tous les vecteurs d'onde à partir de l'un d'entre eux, est exactement l'équation (4) valable pour les constantes diélectriques scalaires. Les équations (33) sont, elles, très semblables à (5) et permettent de calculer les D_n.

Les équations (33) sont tout à fait générales et s'appliquent aussi bien aux milieux périodiques à trois dimensions, avec une constante diélectrique tensorielle dont les axes principaux ne coïncident pas nécessairement avec les directions de périodicité, qu'au problème plus restreint pour la solution duquel nous allons les employer. Elles ont déjà été données par POSENER[1]) dans un travail sur la biréfringence des rayons X.

L'expression $(\tilde{\psi}_{n-m} D_m)_{\perp kn}$ représente le vecteur composante de $(\tilde{\psi}_{n-m} D_m)$ perpendiculaire au vecteur d'onde k_n.

Nous écrirons maintenant les équations (33) en exprimant explicitement les composantes des D_n. Les équations (32) montrent que tous les vecteurs d'onde sont dans un même plan contenant l'axe x de stratification. Nous placerons donc l'axe y dans ce plan et l'axe z perpendiculaire au plan des k. On a ainsi

$$\frac{k^2}{k_n^2}(D_n^1 + D_n^2 + D_n^3) = \sum_m (\psi_{n-m}^{11} D_m^1 + \psi_{n-m}^{33} D_m^2 + \psi_{n-m}^{33} D_m^3)_{\perp k_n}.$$

On voit que ces équations se décomposent en deux groupes

$$\frac{k^2}{k_n^2} D_n^3 = \sum_m \psi_{n-m}^{33} D_m^3 \tag{34}$$

et

$$\frac{k^2}{k_n^2}(D_n^1 + D_n^2) = \sum_m (\psi_{n-m}^{11} D_m^1 + \psi_{n-m}^{33} D_m^3)_{\perp k_n}. \tag{35}$$

Ces deux groupes d'équations étant indépendants, les ondes D^3 de polarisation perpendiculaire au plan des k se propagent indépendamment des ondes de polarisation comprise dans le plan des k. Les ondes sont donc décomposées en deux polarisations et il y aura biréfringence si les vecteurs des ondes D^3 sont différents des vecteurs des ondes $D^{1,2}$.

Nous considérerons séparément ces deux polarisations.

---

[1]) POSENER, Ann. der Phys. **19**, 849, 1934.

A. *Polarisation perpendiculaire au plan des k (ondes ordinaires).*

L'équation (34) étant exactement semblable à (6) et les relations (28) correspondant à (2), l'artifice de calcul représenté par (3) et (10) peut donc être employé et l'on trouve immédiatement

$$k_0 = k \sqrt{\varepsilon_0^{33}}. \tag{36}$$

La polarisation perpendiculaire donne donc une sphère comme figure de dispersion, l'onde se propage dans toutes les directions avec la même vitesse. L'amplitude des ondes diffusées est donnée par

$$\frac{D_n^3}{D_0^3} = \frac{\varepsilon_n^{33}}{\varepsilon_0^{33}}.$$

Tout ce que nous avons dit au sujet des ondes diffusées dans l'article précédent s'applique exactement ici et, par conséquent, nous n'y reviendrons pas.

B. *Polarisation parallèle au plan des k (ondes extraordinaires).*

Pour résoudre les équations (35), il est nécessaire d'introduire les angles α_n entre les vecteurs k_n et l'axe x. On a

$$\alpha_n \cong \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{k_0}{nb} \sin \Theta \left(1 - \frac{k_0}{b} \cos \Theta\right).$$

L'expression générale du vecteur projeté sur la perpendiculaire à k_n, qui intervient au second membre de (35), devient ainsi, au signe près, en négligeant les termes en $(k_0/b)^2$ devant l'unité

$$D_m(\psi_{n-m}^{11} \sin \alpha_n \sin \alpha_m + \psi_{n-m}^{33} \cos \alpha_n \cos \alpha_m) = D_m \psi_{n-m}^{33}$$

sauf pour les termes contenant des indices n ou m de valeur nulle. Pour ceux-ci, on a

$$\mathrm{D}_0 \left(\psi_n^{11} \frac{k_0}{nb} \sin^2 \Theta + \psi_n^{33} \cos \Theta\right)$$

ou

$$D_m \left(\psi_{-m}^{11} \frac{k_0}{mb} \sin^2 \Theta + \psi_{-m}^{33} \cos \Theta\right).$$

Les équations (35) prennent alors la forme

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ldots + \psi_0^{33} D_{-2} + \psi_{-1}^{33} D_{-1} - \left(\psi_{-2}^{33} \cos\Theta - \psi_{-2}^{11} \frac{k_0}{2b} \sin^2\Theta\right) D_0 - \psi_{-3}^{33} D_1 - \psi_{-4}^{33} D_2 - \ldots = 0$$

$$\ldots + \psi_1^{33} D_{-2} + \psi_0^{33} D_{-1} - \left(\psi_{-1}^{33} \cos\Theta - \psi_{-1}^{11} \frac{k_0}{b} \sin^2\Theta\right) D_0 - \psi_{-2}^{33} D_1 - \psi_{-3}^{33} D_2 - \ldots = 0$$

$$\begin{aligned} &-\left(\psi_2^{33} \cos\Theta - \psi_2^{11} \frac{k_0}{2b} \sin^2\Theta\right) D_{-2} - \left(\psi_1^{33} \cos\Theta - \frac{k_0}{b} \psi_1^{11} \sin^2\Theta\right) D_{-1} \\ &\quad + \left(\psi_0^{33} \cos^2\Theta + \psi_0^{11} \sin^2\Theta - \frac{k^2}{k_0^2}\right) D_0 + \left(\psi_{-1}^{33} \cos\Theta + \psi_{-1}^{11} \sin^2\Theta\right) D_1 \\ &\qquad + \left(\psi_{-2}^{33} \cos\Theta + \psi_{-2}^{11} \frac{k_0}{2b} \sin^2\Theta\right) D_2 + \ldots = 0 \end{aligned}$$

$$\ldots - \psi_3^{33} D_{-2} - \psi_2^{33} D_{-1} + \left(\psi_1^{33} \cos\Theta + \psi_1^{11} \frac{k_0}{b} \sin^2\Theta\right) D_0 + \psi_0^{33} D_1 + \psi_{-1}^{33} D_2 + \ldots = 0$$

$$\ldots - \psi_4^{33} D_{-2} - \psi_3^{33} D_{-1} + \left(\psi_2^{33} \cos\Theta + \psi_2^{11} \frac{k_0}{2b} \sin^2\Theta\right) D_0 + \psi_1^{33} D_1 + \psi_0^{33} D_2 + \ldots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Comme dans la première partie de ce travail, le déterminant des coefficients de ces équations doit être nul et peut être décomposé en quatre déterminants partiels:

$$\Delta = \Delta_0 \cos^2\Theta + (\Delta_1 + \Delta_1') \frac{k_0}{b} \sin^2\Theta \cos\Theta + \left(\frac{k_0}{b}\right)^2 \sin^4\Theta\, \Delta_2 = 0.$$

On trouve alors que les deux déterminants Δ_1 et Δ_1' s'anullent. Si d'autre part, on néglige le terme en $(k_0/b)^2$, il faut que

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots & \psi_0^{33} & \psi_{-1}^{33} & \psi_{-2}^{33} \ldots \\ \ldots & \psi_1^{33} & \left(\psi_0^{33} \cos^2\Theta + \psi_0^{11} \sin^2\Theta - \frac{k^2}{k_0^2}\right) \frac{1}{\cos^2\Theta} & \psi_{-1}^{33} \ldots \\ \ldots & \psi_2^{33} & \psi_1^{33} & \psi_0^{33} \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Un raisonnement semblable à celui employé précédemment nous donne alors

$$\left(\psi_0^{33} \cos^2\Theta + \psi_0^{11} \sin^2\Theta - \frac{k^2}{k_0^2}\right) \frac{1}{\cos^2\Theta} = \psi_0^{33} - \frac{1}{\varepsilon_0^{33}}$$

ce qui détermine k_0.

$$k_0 = \frac{k}{\sqrt{\psi_0^{11}\left[1 - \cos^2\Theta\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0^{33}\,\psi_0^{11}}\right)\right]}}. \tag{37}$$

On voit donc que, pour cette polarisation, les surfaces de dispersion seront des ellipsoïdes tangents le long de l'axe x aux sphères de la polarisation normale. L'axe de stratification est donc l'axe optique du milieu.

Il y a des ondes diffusées latéralement comme pour l'autre polarisation, mais il n'est pas possible de donner une expression simple pour leurs amplitudes. Elles sont du même ordre de grandeur que celles des ondes ordinaires.

Nous pouvons maintenant comparer ces résultats avec ceux obtenus pour un milieu à constante diélectrique scalaire. Pour cela, nous nous servirons des indices de réfraction ordinaires et extraordinaires pour les constantes diélectriques scalaire et tensorielle respectivement. On voit, d'après les formules (36), (37) et (11) (17), que

$$n_0^s = \sqrt{\varepsilon_0} \qquad n_e^s = \frac{1}{\sqrt{\psi_0}}$$

$$n_0^t = \sqrt{\varepsilon_0^{33}} \qquad n_e^t = \frac{1}{\sqrt{\psi_0^{11}}}$$

$n_0^s\ n_e^s$ et $n_0^t\ n_e^t$ se rapportant aux milieux scalaires et tensoriels respectivement.

Les deux anisotropies se marquent nettement. En effet, l'anisotropie de la répartition des atomes dans l'espace provient de la différence entre ε_0 et $1/\psi_0$, c'est-à-dire entre la moyenne de $\varepsilon(x)$ et l'inverse de la moyenne de l'inverse de $\varepsilon(x)$. L'anisotropie des atomes eux-mêmes fait intervenir les deux constantes diélectriques principales ε^{33} et ε^{11}. Si cette dernière anisotropie avait été seule, autrement dit s'il n'y avait pas eu d'anisotropie dans la répartition dans l'espace des atomes anisotropes, on aurait obtenu

$$n_0^t = \sqrt{\varepsilon^{33}} \qquad n_e^t = \sqrt{\varepsilon^{11}}.$$

On voit donc que l'anisotropie spaciale a, sur la biréfringence d'un milieu microscopiquement anisotrope, une influence semblable à celle qu'elle avait sur un milieu isotrope. C'est de nouveau la différence entre ε_0^{11} et $1/\psi_0^{11}$ qui exprime cet effet.

Il serait utile d'étendre ces études aux milieux périodiques à trois dimensions, aux cristaux. Cependant, les conclusions auxquelles nous sommes parvenus grâce au modèle extrêmement simplifié dont nous nous sommes servis, nous semblent être générales et ne seront pas essentiellement différentes pour les cristaux réels.

Institut de Physique, Université de Genève.