Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 11 (1938)

Heft: IV

Artikel: Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. Teil II und III

Autor: Stueckelberg, E.C.G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110855

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. (Teil II und III)

von **E. C. G. Stueckelberg.**

(6. IV. 38.)

Inhalt.

Teil II. Die in Teil I angegebene Methode zur Berechnung der Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen wird auf ein Viererpotential verallgemeinert. Eine positiv definite Feldenergie kann auch für ein Feld, dessen Teilchen eine nicht verschwindende Ruhemasse besitzen, durch eine Nebenbedingung erzeugt werden. Es wird die allgemeine Form der durch dieses Feld vermittelten Wechselwirkung zwischen zwei Spinorteilchen gegeben.

Teil III. Die Bewegungsgleichung des Kernkraftfeldes und des Spinorfeldes der Materie werden quantenmechanisch aus einem Hamiltonoperator abgeleitet. Es zeigt sich, dass Operatoren existieren, welche der Kontinuitätsgleichung genügen. Verlangt man die Erhaltung der elektrischen Ladung und die Erhaltung der Dichte der schweren Teilchen, so sind im wesentlichen vier verschiedene Felder möglich. Ihre Teilchen sind: geladene und ungeladene leichte Teilchen mit einer Masse, deren Comptonwellenlänge der Reichweite der Kräfte zwischen schweren Teilchen entspricht, und geladene und ungeladene schwere Teilchen, deren Masse grösser als Proton resp. Neutronmasse ist.

Die empirische Form der Kräfte zwischen Neutron und Proton ergibt sich nur dann, wenn man auch für die ungeladenen leichten Teilchen die Existenz zweier Teilchensorten annimmt (Antiteilchen). Hingegen bestätigt sich die Vermutung, dass eine Theorie ohne Antineutrino im Sinne Majoranas möglich ist.

TEIL II.

7. Verallgemeinerung der Theorie auf ein Viererpotential.

In einem ersten Teile[12]) wurde gezeigt, dass die gegenseitigen Störungen zwischen zwei Materiepartikeln in erster Näherung aus einer Hamiltonfunktion berechnet werden können, in welcher ein Teil der Wechselwirkung Feld-Materie durch gewisse Wechselwirkungsterme Materie-Materie ersetzt werden. Diese Terme hatten folgende Form: Operator der retardierten Ladung des einen Teilchens am Orte des andern mal Ladung des anderen Teilchens.

In der Ableitung beschränkten wir uns auf den skalaren Fall.

Ein solches skalares Feld gibt aber eine Wechselwirkung zwischen den Kernbestandteilen (Protonen und Neutronen), welche ein falsches Vorzeichen und falsche Spinabhängigkeit besitzt: Der skalare Anteil von (4.22) ist positiv, gibt also Abstossung.

Es soll daher als Verallgemeinerung das Feld eines Viererpotentials behandelt werden.

Im vorliegenden zweiten Teil soll daher zuerst die Frage des Vorzeichens der Feldenergie diskutiert werden und nachher sollen die retardierten Potentiale berechnet werden.

Formal geschieht die Verallgemeinerung einfach dadurch, dass den Grössen A (Potential), J (Ladung) und S_k (Polarisation) ein Index i ($i = 0,1,2,3$) angehängt wird: A_i, J_i, S_{ik}.

Die Formeln von Teil I gelten wörtlich weiter, wenn man die in den A, P, J und S bilinearen Terme durch entsprechende Summen über i (von 0 bis 3) ersetzt.

So zum Beispiel:

$$A^*A \text{ durch } \sum_i \varepsilon_i A_i^* A_i = (A, A)$$

(und analog für P^*P)

$$PS_o \text{ durch } \sum_i \varepsilon_i P_i S_{io}$$

$$\left(\frac{\partial A^*}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial A}{\partial \vec{x}}\right) \text{ durch } \sum_k{}' \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial A_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \text{ usw.}$$

Dabei bedeutet Σ' eine nur über 1,2 und 3 erstreckte Summe. ε_i hat für $i = 1, 2, 3$ den Wert $+1$ und für $i = o$ den Wert -1.

Die Vertauschungsrelationen (3.2) sind durch

$$[P_i(\vec{x}), A_{i'}(\vec{x}')] = \delta_{ii'}(h/i)\,\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{7.1}$$

zu ersetzen. Die Gleichungen (2.3) resp. (2.7) und (2.8) sind, wegen des Auftretens ε_i, durch

$$\dot{A}_i = \frac{\delta H}{\delta P_i} = \varepsilon_i (8\pi c^2 P_i^* - 4\pi c S_{io}) \tag{7.2}$$

$$\dot{P}_i^* = -\frac{\delta H}{\delta A_i^*} = \varepsilon_i \left(\frac{1}{8\pi}(\Delta - l^2) A_i + \tfrac{1}{2}\left(J_i - \sum_k{}' \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}\right)\right) \tag{7.3}$$

Formel (3.17) erhält deshalb im zweiten ($P(\vec{x})^*$—) Term ebenfalls den Faktor ε_i. Dieser hat zur Folge, dass die Vertauschungs-

relationen für die explizit zeitabhängigen Operatoren $A_i(x)$ die Form erhalten:

$$[A_i(x)^*, A_k(y)] = -2\frac{hc}{i}\varepsilon_i \delta_{ik} D(x-y). \tag{7.4}$$

Die endgültige Form für den Wechselwirkungsoperator (4.22), (4.23) und (4.24) ändert sich nur insofern, als er durch eine Summe über i (mit ε_i) zu ersetzen ist.

8. Erzeugung positiv definiter Energiedichte durch eine Nebenbedingung.

Den Operator der Energiedichte des Strahlungsfeldes (2.5) formen wir ebenfalls durch die unitäre Transformation (3.14) um. Das bedeutet, dass in (2.5) die $A_i(\vec{x})$ durch die explizit zeitabhängigen Operatoren $A_i(x)$ und die $P_i(\vec{x})$ durch die zeitlichen Ableitungen der $A_i(x)$ ersetzt. (Gleichung (3.21) enthält wegen (7.2) den Faktor ε_i.) Man kann dann die Energiedichte als Summe der Energiedichten einzelner Potentialkomponenten schreiben:

$$\mathfrak{W} = \sum_i \varepsilon_i \mathfrak{W}(A_i) \tag{8.1}$$

mit

$$\mathfrak{W}(A) = \frac{1}{8\pi}\left(\sum_k \frac{\partial A^*}{\partial x_k}\frac{\partial A}{\partial x_k} + l^2 A^* A\right). \tag{8.2}$$

Der Ausdruck (8.2) ist stets positiv, da der Faktor ε_k *nicht* auftritt (die Summe über k ist also *kein* skalares Produkt). Die Energiedichte (8.1) hingegen enthält für $i=0$ einen negativen Summanden. In der Elektrodynamik kann die positiv definite Energie durch die homogene Nebenbedingung (6.1) erzeugt werden. Im Falle $l = o$ hingegen ist diese Nebenbedingung nicht mehr mit ihrer konjugiert komplexen vertauschbar. Führen wir aber neben den vier Potentialkomponenten A_i noch eine skalare Komponente B ein, die ebenfalls einer Wellengleichung (1.1) mit demselben l genügt, so ist die Nebenbedingung (6.2) am Orte y mit ihrer konjugiert komplexen am Orte x vertauschbar. Man findet

$$\begin{aligned}[(6.2)^*, (6.2)] &= \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y} D(x-y) + l^2 D(x-y) \\ &= -(\Box - l^2) D(x-y) = 0.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichsetzung erfolgte, weil die D-funktion ihrer

Herkunft nach (Differenz zwischen avanciertem und retardiertem Potential) der homogenen Wellengleichung genügt.

Die Nebenbedingung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial A_0}{\partial x_0}\,\psi = (-\operatorname{div}\vec{A} - l\,B)\,\psi\,. \tag{8.3}$$

Übt man auf beide Seiten der Gleichung die Operation $\frac{\partial A_0}{\partial x_0}$ aus und berücksichtigt, dass sie mit dem Operator der rechten Seite vertauschbar ist, so folgt aus (8.3) und aus der conj. compl. Bedingung (6.2) die Identität:

$$-\frac{\partial A_0^*}{\partial x_0}\frac{\partial A_0}{\partial x_0}\,\psi = (-\operatorname{div}\vec{A}^*\operatorname{div}\vec{A} - l\,(B^*\operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{A}^*.\,B) - l^2\,B^*B)\,\psi\,, \tag{8.4}$$

welche einen der negativen Terme von (8.1) eliminiert.

Für den Term $-\operatorname{grad} A_0^*\operatorname{grad} A_0 - l^2\,A_0^*\,A_0 = f$ schreiben wir $-f + 2f$ und formen den Term $2f$ durch partielle Integration um

$$\int d\vec{x}^3\,2\,f = \int d\vec{x}^3\,(A_0^*\,(\Delta - l^2)\,A_0 + A_0^*\,(\Delta - l^2)\,A_0)\,.$$

Berücksichtigt man, dass A_0 der homogenen Wellengleichung genügt, so folgt aus der Nebenbedingung:

$$A_0^*\,(\Delta - l^2)\,A_0\,\psi = A_0^*\,\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2}\,\psi = -A_0^*\left(\operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_0} + \frac{\partial B}{\partial x_0}\right)\psi = 0\,.$$

Die Terme, welche div linear enthalten, formen wir noch durch partielle Integration um. Dann kann das Integral der Energiedichte mit dem Intergranden $\mathfrak{W}'$ geschrieben werden:

$$\int d\vec{x}^3\left(\sum_i \varepsilon_i\,\mathfrak{W}\,(A_i) + \mathfrak{W}\,(B)\right)\psi = \int d\vec{x}^3\,\mathfrak{W}'\,\psi$$

mit

$$\mathfrak{W}' = \frac{1}{8\pi}\left((\operatorname{rot}\vec{A}^*, \operatorname{rot}\vec{A}) + \left(\operatorname{grad} A_0^* + \frac{\partial\vec{A}^*}{\partial x_0}, \operatorname{grad} A_0 + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x_0}\right) + \left(l\,A_0^* - \frac{\partial B^*}{\partial x_0}\right)\left(l\,A_0 - \frac{\partial B}{\partial x_0}\right) + (l\,\vec{A}^* + \operatorname{grad} B^*, l\,\vec{A} + \operatorname{grad} B)\right).$$

Die Nebenbedingung (6.2) (oder (8.3)) ergibt also eine stets positive Energiedichte.

Führen wir jetzt den neuen Vierervektor des Potentials

$$\Phi_i = A_i + \varepsilon_i \, l^{-1} \frac{\partial B}{\partial x_i} \tag{8.6}$$

ein und den antisymetrischen Feldstärkentensor

$$F_{ik} = \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \varepsilon_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = \varepsilon_i \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \varepsilon_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \tag{8.7}$$

so kann die Energiedichte unter Verwendung des dreidimensionalen Vektors

$$\vec{F} \text{ mit Komponenten } (F_{01}, F_{02}, F_{03})$$

und des dreidimensionalen Pseudovektors

$$\overset{\smile}{F} \text{ mit Komponenten } (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

die Form

$$\mathfrak{W}' = \frac{1}{8\pi} \left((\overset{\smile}{F}{}^*, \overset{\smile}{F}) + (\vec{F}^*, \vec{F}) + l^2 (\vec{\Phi}^*, \vec{\Phi}) + l^2 \, \Phi_0^* \, \Phi_0 \right) \tag{8.8}$$

gebracht werden. Die Energiedichte ist also positiv definit und geht für $l = o$ (B verschwindet identisch) bei reellen Feldstärken in den Energieausdruck der Maxwellschen Elektrodynamik über*).

9. Die Nebenbedingung bei Anwesenheit von Ladungen.

Bei Anwesenheit von Ladungen muss das Funktional ψ nicht nur der Nebenbedingung, sondern auch der Schroedingergleichung (3.13) (wir schreiben im folgenden stets K für K'')

$$\left(K + \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0 \tag{9.1}$$

genügen. Hier ist also K der Hamiltonoperator der Materie, in welchem die explizit zeitabhängigen Potentiale auftreten.

Schreibt man K in Form eines Integrals über $d\vec{x}^3$ (der Wechselwirkungsanteil Feld—Materie habe zum Beispiel die Form des Integrals über den Ausdruck (3.22)) und führt als Schrödingerzeit $x_0 = ct$ ein, so errechnet sich aus den Vertauschungsrelationen (7.4)

$$\left[K + \frac{hc}{i} \frac{\partial}{\partial x_0}, A_i(y) \right] = -2 \frac{hc}{i} \int d\vec{x}^3 \left(\frac{\delta K}{\delta A_i^*} D(x-y) + \frac{\delta K}{\delta \frac{\partial A_i^*}{\partial x_0}} \frac{\partial D(x-y)}{\partial x_0} \right)$$

*) $\mathfrak{W}$ ist auch tatsächlich die $0-0$ Komponente des Tensors

$$\frac{1}{8\Pi} \left(\sum_m \varepsilon_m F_{im}^* F_{km} + l^2 \, \Phi_i^* \, \Phi_k + \text{conj.} \right) - \varepsilon_i \, \delta_{ik} \, \mathfrak{L},$$

wo $\mathfrak{L}$ die Proca'sche Lagrangefunktionsdichte (11.8) bedeutet.

($\partial/\partial x_0$ ist natürlich mit $A_i(y)$ vertauschbar.) Ein analoger Ausdruck folgt für B. Die Ladungs- und Polarisationsgrössen ($\mathfrak{K}$ ist der Integrand von K und hat z. B. die Form (3.22)) werden folgendermassen definiert:

$$-2\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial B^*} = J^B \qquad -2\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \frac{\partial B^*}{\partial x_i}} = S_i^B$$
$$-2\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial A_i^*} = J_i\,\varepsilon_i \qquad -2\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \frac{\partial A_i^*}{\partial x_k}} = S_{ik}\,\varepsilon_i \tag{9.2}$$

Wir erhalten folgende Vertauschungsrelation

$$\left[K+\frac{hc}{i}\frac{\partial}{\partial x_0},\left(\frac{\partial}{\partial y},A\right)+lB\right]=\frac{hc}{i}\int d\vec{x}^3\Big\{(\operatorname{div}(\vec{J}-l\vec{S}^B)$$
$$+l(J^B-lT))\,D(x-y)-(J_0-lS_0^B)\frac{\partial D(x-y)}{\partial x_0}\Big\} \tag{9.3}$$

Das Argument der Ladungs- und Polarisationsoperatoren ist $\vec{x}$. Für den Tensor S_{ik} wurde die einschränkende Annahme gemacht

$$S_{ik}=\varepsilon_i\delta_{ik}T+S'_{ik},\quad S'_{ik}=-S'_{ki}. \tag{9.4}$$

Damit das Funktional ψ gleichzeitig die Nebenbedingung und die Schrödingergleichung erfüllt, müssen die beiden Operatoren: „Nebenbedingung und $K+h\,\partial/i\,\partial t$" vertauschbar sein. Das ist aber gemäss (9.3) nicht der Fall.

Wir addieren darum zur Nebenbedingung noch einen inhomogenen Term, d. h. wir schreiben

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y},A\right)+lB+\int d\vec{x}^3 J_0'(\vec{x})\,D(x-y)\right)\psi=0 \tag{9.5}$$

wo J_0' die 0-Komponente eines combinierten Ladungsvektors ist.

$$J_i'=J_i-lS_i^B \tag{9.6}$$

Dann gilt:

$$\left[K+\frac{hc}{i}\frac{\partial}{\partial x_0},\int d\vec{x}^3 J_0'\,D(x-y)\right]$$
$$=\frac{hc}{i}\int d\vec{x}^3\left((-\operatorname{div}\vec{J}'+R')\,D(x-y)+J_0'\frac{\partial D(x-y)}{\partial x_0}\right). \tag{9.7}$$

Der Skalar R' ist als Viererdivergenz von J_i' definiert:

$$\frac{i}{hc}[K,J_0']+\operatorname{div}\vec{J}'=R'=\frac{1}{c}\dot{J}_0'+\operatorname{div}\vec{J}'. \tag{9.8}$$

Vergleich von (9.3) und (9.7) zeigt, dass die inhomogene Nebenbedingung (9.5) im Laufe der Zeit erhalten bleibt, wenn die Operatoridentität

$$\dot{J}_0' + c \operatorname{div} \vec{J}' = l\,(J^B - l\,T) \tag{9.9}$$

identisch erfüllt ist.

Ferner muss J_0' mit den Potentialoperatoren und mit $J_0'^*$ vertauschbar sein, damit die inhomogene Nebenbedingung mit sich selbst und mit ihrer konjugiert komplexen verträglich bleibt.

In der Elektrodynamik verschwinden B und l. Ferner verschwindet auch die Viererdivergenz des elektrischen Stromes. (9.9) ist also erfüllt und die Nebenbedingung (9.5) ist möglich. Sie führt bekanntlich auf die Maxwellschen Gleichungen.

Bei den Kernkräften wird sich zeigen, dass J_0' nicht mit $J_0'^*$ vertauschbar ist. Eine Nebenbedingung in inhomogener Form ist daher nicht möglich. Die einzige Lösung, welche (9.9) erfüllt, besteht darin, dass der Vierervektor J_i' und damit auch seine Viererdivergenz verschwinden, und dass $J^B = lT$.

Aus dem identischen Verschwinden der beiden Seiten der Gleichung (9.9) und aus der Definition der Ladungs- und Polarisationsgrössen (9.2) (9.4) (9.6) und (9.8) folgt dann, dass $\mathfrak{K}$ nur von den folgenden Verbindungen des skalaren Potentials B und des Viererpotentials A_i abhängen kann:

1. Vom Skalar

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, A\right) + l\,B = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \Phi\right).$$

2. Von den in (8.6) definierten Potentalen Φ_i.

3. Wegen der Antisymetrie des Tensors S_{ik}' (9.4), von den Feldstärken F_{ik}.

Wegen der, nunmehr homogenen und mit K vertauschbaren, Nebenbedingung verschwindet die unter 1. erwähnte skalare Abhängigkeit. (Natürlich kann widerspruchsfrei eine weitere Abhängigkeit von einem weiteren Skalarfeld C, welches unabhängig von dem zur Erzeugung der Φ_i verwendeten B ist, eingeführt werden.)

Wir schreiben noch die Vertauschungsrelationen dieser neuen Grössen:

$$\begin{aligned}
[\Phi_i^*(x), \Phi_k(y)] &= -2\,\frac{hc}{i}\,\varepsilon_i\left(\delta_{ik} - \varepsilon_k\,\frac{\partial^2}{l^2\,\partial x_i\,\partial x_k}\right) D(x-y) \\
[F_{ik}^*(x), \Phi_l(y)] &= -2\,\frac{hc}{i}\,\varepsilon_i\,\varepsilon_k\left(\delta_{kl}\,\frac{\partial}{\partial x_i} - \delta_{il}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\right) D(x-y).
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Gesternte Grössen sind nach wie vor mit ungesternten vertauschbar.

Die Nebenbedingung nimmt, wegen der Definition der Φ_i, die an die Vacuumelektrodynamik erinnernde Form an

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \Phi\right) \psi = 0. \tag{9.11}$$

Da die Φ_i wie die A_i und die B der homogenen Wellengleichung

$$(\Box - l^2)\, \Phi_i = 0 \tag{9.12}$$

genügen, so folgen für die in (8.7) definierten Feldstärken wegen der Nebenbedingung (9.11) die *Proca*'schen Gleichungen[10])

$$\left(\sum_k \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_k} - l^2\, \Phi_i\right) \psi = 0. \tag{9.13}$$

Für $l = 0$ gehen sie in die Maxwell'schen Gleichungen des Vacuums über.

Mit genau gleichem Recht, wie wir (9.11) als Nebenbedingung behandelten und daraus die vier Gleichungen (9.13) herleiteten, können wir eine der Gleichungen (9.13) als Nebenbedingung betrachten und daraus die drei anderen Gleichungen (und die Gleichung (9.11)) entwickeln.

In der Elektrodynamik liess sich durch die *Elimination der Nebenbedingung* die Coulomb'sche Wechselwirkung einführen. Das Feld hatte dann nur noch zwei transversale Komponenten. Eine solche Elimination ist bei nicht verschwindender Ruhmasse($l \neq 0$) unmöglich. Hingegen kann die Nebenbedingung durch eine *Definition der Operatoren* identisch befriedigt werden:

Man wählt die Gleichung (9.13) für $i = 0$ als Nebenbedingung und betrachtet Φ_1, Φ_2 und Φ_3 als *unabhängige Operatoren*, welche den Vertauschungsrelationen (9.10) genügen, und die F_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) als daraus *abgeleitete Operatoren*. Andererseits sieht man die drei Operatoren

$$\Pi_i = \frac{1}{8\pi c} F^*_{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9.14}$$

als weitere *unabhängige Grössen* an. Für $x_0 = y_0$ gilt nach (9.10):

$$[\Pi_i(x), \Phi_k(y)] = \frac{h}{i}\, \delta_{ik}\, \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (x_0 = y_0). \tag{9.15}$$

Die Operatoren F_{k0} lassen sich also jetzt gemäss (9.14)* durch die Π_i^* ausdrücken. Definiert man jetzt Φ_0 ebenfalls als *abgeleiteten Operator* in der Form

$$\Phi_0 = 8\pi c\, l^{-2} \operatorname{div} \vec{\Pi}^* \tag{9.16}$$

so ist die, als Nebenbedingung betrachtete, letzte Gleichung ($i = 0$) von (9.13) tatsächlich identisch erfüllt.

Unter Verwendung der unabhängigen Operatoren $\vec{\Phi}$ und $\vec{\Pi}$ schreibt sich die Energiedichte (8.8)

$$\mathfrak{W}' = \frac{1}{8\pi} \left(l^2 (\vec{\Phi}^*, \Phi) + (\operatorname{rot} \vec{\Phi}^*, \operatorname{rot} \vec{\Phi})\right)$$
$$+ 8\pi c^2 \left((\vec{\Pi}^*, \vec{\Pi}) + l^{-2} \operatorname{div} \vec{\Pi}^* \cdot \operatorname{div} \vec{\Pi}\right). \tag{9.17}$$

Zur Ableitung der Feldgleichungen können zwei Wege eingeschlagen werden:

1. Übergang zur „einzeitigen" Theorie, d. h. Rückgängigmachen des Formalismus, welcher auf Gleichung (3.5) folgte. Die Hamiltonfunktion in (3.5) enthält also dann wieder einen Feldanteil. Dieser ist nichts anderes als (9.17), wo jetzt wieder sämtliche explizit zeitabhängigen Operatoren $F(x)$ $(= F''(\vec{x}, x_0))$ durch die vermittels der Transformation (3.14) verbundenen, nicht explizit zeitabhängigen Operatoren $F(\vec{x})$ zu ersetzen sind. Das geschieht formal einfach dadurch, dass man überall $x_0 = 0$ setzt. Dann sind die drei Φ_i und ihre Ableitungen alle untereinander vertauschbar. Dasselbe gilt für die Π_i^* und ihre Ableitungen. Π_i und Φ_i hingegen gehorchen der Relation (9.15), d. h. sie sind kanonisch konjugiert. Der Materieanteil K bleibt derselbe, nur sind auch hier die Feldgrössen $F(x)$ durch $F(\vec{x})$ zu ersetzen. Alles dies entspricht genau dem Formalismus Kemmers[11]). Näheres hierüber in Paragraph 11.

2. Aus der vorliegenden mehrzeitigen Theorie auf Grund der Beziehung

$$\frac{1}{c} \dot{F}(y) = \left(\frac{\partial F(y)}{\partial y_0} + \frac{i}{hc} [K, F(y)]\right)_{y_0 = x_0}. \tag{9.18}$$

Wir lassen die Nebenbedingung in der ursprünglichen Form, d. h. betrachten *alle vier Φ_i als unabhängige Operatoren.* Man muss dann an Stelle des Φ_0 ein $\bar{\Phi}_0$ definieren:

$$\bar{\Phi}_0 = A_0 - \frac{1}{c} \dot{B}. \tag{9.18a}$$

Die Nebenbedingung lautet dann in $\bar{\Phi}_0$:

$$\left(\operatorname{div} \vec{\Phi} + \frac{1}{c}\dot{\bar{\Phi}}_0 - 4\pi l^{-2}\left(\operatorname{div} \vec{J} + \frac{1}{c}\dot{J}_0\right)\right)\psi = 0. \tag{9.19}$$

Die Feldgleichungen für die Komponenten Φ_1, Φ_2 und Φ_3 lauten nach zweimaliger Anwendung der Regel (9.18):

$$(\Delta - l^2)\,\Phi_i - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi}_i = -4\pi\left(J_i - \sum_k{}' \frac{\partial S'_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\dot{S}'_{i0} - \frac{\partial}{\partial x_i} l^{-2}\left(\operatorname{div} \vec{J} + \frac{1}{c}\dot{J}_0\right)\right). \tag{9.20}$$

Für das in (9.18a) definierte $\bar{\Phi}_0$ erhält man eine analoge Gleichung. Nur ist $\partial/\partial x_0$ durch $-1/c$ mal die zeitliche Ableitung $(\dot{\ })$ der nachfolgenden Grössen zu ersetzen.

Führt man noch die entsprechenden Feldstärken ein

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \\ \bar{F}_{i0} &= \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}_i \end{aligned} \tag{9.21}$$

so lassen sich, unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (9.19) die Gleichungen (9.20) schreiben

$$\left(\sum_k{}' \frac{\partial \bar{F}_{ki}}{\partial x_k} + \frac{1}{c}\dot{\bar{F}}_{0i} - l^2\bar{\Phi}_i + 4\pi\left(J_i - \sum_k{}' \frac{\partial S'_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\dot{S}'_{i0}\right)\right)\psi = 0. \tag{9.22}$$

Sie entsprechen für $l = 0$ den Maxwell'schen Gleichungen für die Anwesenheit von Ladungen.

10. Die Wechselwirkungsterme des Viererpotentials.

Zur Ableitung der Wechselwirkungsterme kann man entweder explizit die Methode des Paragraphen 4 (Teil I) verwenden, oder aber sich erinnern, dass die Φ_i durch die A_i und B ausdrückbar sind (8.6). Da für diese der wiederholt erwähnte klassische Ausdruck „Retardiertes Potential des ersten Teilchens am Orte des zweiten mal Ladung des zweiten" gilt, so gilt er auch für die Φ_i. Dabei sind dann allerdings als Ladungen die Ausdrücke der rechten Seite der Feldgleichungen (9.20) zu wählen.

Wir wollen uns auf den statischen Fall beschränken. Er sei dadurch definiert, dass

1. alle Grössen $\partial/\partial x_0$ (oder in (9.20) die $(\cdot)$) vernachlässigt werden (Vernachlässigung der Retardierung).

2. Ebenso sollen die J_i $(i \neq 0)$ und die S'_{0k} vernachlässigt werden (Vernachlässigung der Bewegung).

Dann wird gemäss (0.2) und (9.20)

$$\begin{aligned} \Phi^r(x)_0 &= \int d\vec{y}^3 J_0^r(\vec{y})\, v(\vec{x}-\vec{y}), \quad v(\vec{x}) = \frac{e^{-l|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \\ \Phi^r(x)_i &= \int d\vec{y}^3 \sum_k{}' S_{ik}^r \frac{\partial}{\partial y_k} v(|\vec{x}-\vec{y}|) \end{aligned} \tag{10.1}$$

der Vierervektor des Potentials, welches das r-te Teilchen am Orte $\vec{x}$ zur Schrödingerzeit $t = x_0/c$ erzeugt. Wir schreiben im folgenden S_{ik} für S'_{ik}. (Es sei noch bemerkt, dass in dieser Näherung die Potentiale A_i mit den Φ_i identisch werden.)

Die Wechselwirkungsausdrücke werden gemäss (4.22) (man berücksichtige auch die Anmerkung).

$$\begin{aligned} U^{rs}+U^{sr} = \frac{1}{2}\int d\vec{x}^3\, d\vec{y}^3 \Big\{ \Big(& J_0^{s*}(\vec{x})\, J_0^r(\vec{y}) \\ & + \sum_i{}' \sum_m{}' \sum_k{}' S_{im}^{s*}(\vec{x})\, S_{ik}^r \frac{\partial^2}{\partial x_m\, \partial x_k} \Big) v(\vec{x}-\vec{y}) + \text{konj.} \Big\} \end{aligned}$$

Unter Einführung des dreidimensionalen Pseudovektors $\breve{S}$ (S_{23}, S_{31}, S_{12}) und des Operatorvektors $\vec{\nabla}$ lässt sich der letzte Term in die Form

$$(\breve{S}^s \times \vec{\nabla}, \breve{S}^r \times \vec{\nabla}) = (\breve{S}^s, \breve{S}^r)\, \triangle - (\breve{S}^s, \vec{\nabla})\, (\breve{S}^r, \vec{\nabla}) \tag{10.2}$$

umformen.

Beschreibt man die Ladungen (Materie) durch eine Dirac'sche Theorie, so ist

$$J_i^r(\vec{x}) = f e\, \tau^r\, \alpha_i^r\, \delta(\vec{x}-\vec{q}^r) \tag{10.3}$$

wo f eine Konstante der Dimension einer Zahl, e die elektrische Elementarladung, α_i^r die Dirac'schen Geschwindigkeitsoperatoren (Matrizen) des r-ten Teilchens, τ^r gewisse (im allgemeinen nichthermiteische) Matrixoperatoren (isotopic Spin), die mit den α_i^r vertauschbar sind, und $\vec{q}^r$ der Ortsvektor des r-ten Teilchens sind.

Entsprechend wird der antisymetrische Tensor

$$\begin{aligned} &\text{Für } i, k \neq 0: \; S^r_{ik}(\vec{x}) = +\, i\, g\, e \frac{1}{l} \tau^r \beta^r \alpha^r_i \alpha^r_k \delta(\vec{x} - \vec{q}^r) \\ &\text{Für } i = 0: \; S^r_{0k}(\vec{x}) = -\, i\, g\, e \frac{1}{l} \tau^r \beta^r \alpha^r_k \delta(\vec{x} - \vec{q}) . \end{aligned} \tag{10.4}$$

Hier ist g ebenfalls eine Konstante von der Dimension einer Zahl. β^r ist die Dirac'sche β-Matrix des r-ten Teilchens. Wählt man die Spinoren so, dass $\alpha_0 = 1$ und

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wird, so sieht man, dass nur α_0 und $\beta \alpha_i \alpha_k$ „diagonale" Matrizen sind. Bei Reduktion auf die „grossen Komponenten" der Dirac-Funktion tragen daher die nichtdiagonalen Matrizen erst in der Näherung „Kinetische Energie durch Ruhmasse mal c^2" bei. Somit sind die Vernachlässigungen unter 2. gerechtfertigt. Man kann dann noch (für positive Energien) β durch 1 ersetzen und für $i \beta \alpha_i \alpha_k$ die Matrizen σ_{ik} einführen. Dann wird die Wechselwirkung

$$\begin{aligned} U^{rs} + U^{sr} = \frac{e^2}{2} (\tau^r \tau^{s*} + \tau^{r*} \tau^s) \big(|f|^2 + |g|^2 (\vec{\sigma}^r, \vec{\sigma}^s) \\ - |g|^2 (\vec{\sigma}^r, \vec{\nabla}) (\vec{\sigma}^s, \vec{\nabla}) \big) v(|\vec{q}^r - \vec{q}^s|) .^{*)} \end{aligned} \tag{10.5}$$

Hierbei wurde, um den Operator $\triangle$ zu eliminieren, von der Relation

$$(\triangle - l^2)\, v(\vec{x}) = -4\pi\, \delta(\vec{x}) \tag{10.6}$$

Gebrauch gemacht.

Es tritt also, strenggenommen, neben den Termen (10.5) noch ein „Nahwirkungsterm"

$$-4\pi |g|^2 (\vec{\sigma}^r, \vec{\sigma}^s)\, l^{-2}\, \delta(\vec{q}^r - \vec{q}^s) \tag{10.7}$$

innerhalb der letzten Klammer auf.

Dieser Term tritt immer (auch in der Elektrodynamik) auf, wenn man die Umformung (10.2) vollzieht. Er wird aber leicht

---

*) $\vec{\nabla}$ bedeutet in *beiden* Faktoren die Gradientbildung bezüglich $\vec{q}^r$ (oder beidemale bezüglich $\vec{q}^s$).

übersehen, wenn man die Operation $\vec{\nabla}$ auf $v\,(\vec{x}-\vec{y})$ zuerst ausführt, d. h. wenn man schreibt

$$(\vec{S}^s\times\vec{\nabla},\,\vec{S}^r\times\vec{\nabla})\,v\,(|\vec{z}|) = (\vec{S}^s\times\vec{z},\,\vec{S}^r\times\vec{z})\,\frac{1}{|\vec{z}|}\,\frac{\partial}{\partial\,|\vec{z}|}\left(\frac{1}{|\vec{z}|}\,v'\,(|\vec{z}|)\right)$$
$$+\,2\,(\vec{S}^r,\,\vec{S}^s)\,\frac{1}{|\vec{z}|}\,v'\,(|\vec{z}|)\,.$$

Hier bedeutet $v'\,(|\vec{z}|)$ die Ableitung von v nach $|\vec{z}|$. Formt man jetzt den Vektorproduktterm nach der Formel

$$(\vec{S}^s\times\vec{z},\,\vec{S}^r\times\vec{z}) = (\vec{S}^r,\,\vec{S}^s)\,|\vec{z}|^2-(\vec{S}^r,\,\vec{z})\,(\vec{S}^s,\,\vec{z}) \tag{10.8}$$

um, so erhält man genau (10.5) *ohne* den störenden Ausdruck (10.7). Das beruht aber nur darauf, dass wir bei der Umformung des Vektorproduktes einen Term der Ordnung $|\vec{z}|^2/|\vec{z}|^5$ dazuzählen, welcher für $\vec{z}=0$ singulär wird.

Auch bei der Berechnung der Spin-Spinwechselwirkung zweier Elektronen tritt der gleiche Term auf:

Gehen wir nämlich in der üblichen Weise vor: Berechnung des Breit'schen Wechselwirkungsterms durch Entwicklung nach $1/c^2$ der Moeller'schen Wechselwirkung und Reduktion der Diracgleichung auf die „grossen Komponenten", so tritt die Spinwechselwirkung tatsächlich in einer Form $(\vec{\sigma}^s\times\vec{\nabla},\,\vec{\sigma}^r\times\vec{\nabla})\,|\vec{z}|^{-1}$ auf. In der Literatur wird nun, der Einfachheit halber, spätestens an dieser Stelle die Umformung (10.8) verwendet, so dass der Zusatzterm vergessen wird.

Erinnert man sich der Tatsache, dass die ganzen so erhaltenen Wechselwirkungsterme (mit Ausnahme des Coulomb'schen Terms)*) nur als *Störung erster Ordnung* verwendet werden dürfen, so tritt der Zusatzterm nur als eine kleine weitere Aufspaltung proportional e^4 zwischen Singlet und Triplet in Erscheinung. Wollte man ihn aber bei der strengen Lösung in Berücksichtigung ziehen, so würde er im anziehenden Falle zu unendlich tiefen Termen führen.

Wir müssen daher bei der Anwendung der so errechneten Wechselwirkungsterme uns stets bewusst bleiben, dass wir sie, zum Unterschiede gegen den in der Elektrodynamik auftretenden Coulombterm, nur als *Störungen* betrachten dürfen.

Tatsächlich brauchen wir aber zur Lösung der Kernprobleme d. h. zur Auffindung der stationären Zustände die *strenge Wechselwirkung*. Wollen wir also die empirischen Wechselwirkungsansätze

*) Siehe Seite 306.

mit den hier erhaltenen Resultaten vergleichen, so müssen wir auf alle Fälle diesen zusätzlichen Nahwirkungsterm fortlassen.

Formel (10.5) hat dann bis auf den grad-Term tatsächlich das richtige Vorzeichen und die richtige Spinabhängigkeit für die Kräfte zwischen Neutron und Proton. Dass auch dem „isotopic spin" Faktor die gewünschte Form gegeben werden kann, soll im § 12 (Teil III) gezeigt werden.

III. TEIL.

11. Bewegungsgleichung und Hamiltonoperator.

Das Kernkraftfeld werde durch mehrere Vierervektoren Φ_i^s beschrieben. Der obere Index s unterscheidet hier, im Gegensatz zu den vorhergehenden Paragraphen nicht mehr die einzelnen Teilchen, sondern eine Anzahl verschiedener Procafelder, deren Operatoren untereinander vertauschbar sind. Die daraus abgeleiteten Sechservektoren F_{ik}^s und die Φ_i^s selbst entsprechen natürlich den auf Gleichung (9.18) folgenden überstrichenen Grössen.

Das Spinorfeld der Materie beschreiben wir in der vom Verfasser vorgeschlagenen Form durch ein 16-komponentiges Spinorfeld[2] [13] φ_μ^ν, wo jeder der beiden Indices von 1 bis 4 geht. Die Matrices α_i, β der Dirac'schen Theorie und die von den „Paulitermen" herrührenden Matrices σ_{ik} sollen auf den unteren Index μ wirken, während die Matrices τ (und μ), welche im Paragraphen 10. eingeführt wurden, auf den oberen Index ν auszuübende lineare Operationen darstellen. Sie sind daher mit den Dirac'schen Operatoren vertauschbar. (In den zitierten früheren Arbeiten wurden sie mit Ω und Δ bezeichnet.)

Dann lauten die Bewegungsgleichungen des Feldes:

$$\sum_k \frac{\partial F_{ki}^s}{\partial x_k} - l_s^2 \Phi_i^s + 4\pi \left(J_i^s - \sum_k \frac{\partial S_{ik}^s}{\partial x_k} \right) = 0. \tag{11.1}$$

Übt man die Operation $\partial/\partial x_i$ auf die Gleichungen aus und addiert, so folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \Phi^s \right) - 4\pi l^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial x}, J^s \right) = 0. \tag{11.2}$$

Die Bewegungsgleichungen der Materie lauten

$$\left(-ihc \left(\alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right) + mc^2 \beta \mu - \sum_r \frac{1}{2} \left((j^{*r}, \Phi^r) + (s^{r*}, F^r) + \text{conj.} \right) \right) \varphi = 0. \tag{11.3}$$

Dabei sind J^r und Sr Abkürzungen für die folgenden, aus φ gebildeten Vektoren und Tensoren:

$$\begin{aligned} J_i^r &= \varphi^* \, j_i^r \, \varphi \\ S_{ik}^r &= \varphi^* \, s_{ik}^r \, \varphi \,. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Die Grössen j^r und s^r werden aus den numerischen Faktoren f^r und g^r, dem elektrischen Elementarquant e und den auf die Spinorindices wirkenden Matrizen in folgender Weise gebildet:

$$\begin{aligned} j_i^r &= f^r \, e \, \alpha_i \, \tau^r, \quad \alpha_0 = 1 \\ s_{ik}^r &= g^r \, e \, \frac{1}{l_r} \, \sigma_{ik} \, \tau^r \\ \sigma_{ik} &= i \, \beta \, \alpha_i \, \alpha_k, \quad \sigma_{0k} = - i \, \beta \, \alpha_k \end{aligned} \tag{11.5}$$

(s^{r*}, F^r) ist das skalare Produkt der beiden Sechservektoren (d. h. $= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \varepsilon_i \varepsilon_k \ldots$), μ ist eine Matrix, deren Eigenwerte die Massen von Elektron, Neutrino, Proton und Neutron sind (gemessen als Vielfache der Elektronenmasse m). l_r sind für jedes Feld charakteristische reciproke Längen (= Masse der dem Felde r zugeordneten Partikel mal c/h).

In einer klassischen Feldtheorie erhält man die Feldgleichungen für Kernfeld und Materie aus der Extremumsforderung des Raumzeitintegrals einer Lagrangefunktionsdichte $\mathfrak{L}$. Ihr Materieanteil hat die Form:

$$\mathfrak{L}(\varphi) = - \varphi^* \text{ mal Ausdruck (11.3)} \tag{11.6}$$

Für den Feldanteil kann man entweder schreiben

$$\mathfrak{L}(\Phi) = \sum_s \sum_i \varepsilon_i \, \mathfrak{L}(A_i^s)_s + \mathfrak{L}(B^s)_s \tag{11.7}$$

(mit $\Phi_i^s = A_i^s + l_s^{-1} \, \varepsilon_i \, \partial B / \partial x_i$), wo die Summanden Ausdrücke der Form (2.1) darstellen (mit angehängten Indices i und s und ohne den Materieanteil, der ja in (11.6) schon steht), oder aber den Proca'schen Ausdruck

$$\mathfrak{L}(\Phi^s)_s = - \frac{1}{8\pi} \left((F^{s*}, F^s) + l_s^2 \, (\Phi^{s*}, \Phi^s) \right). \tag{11.8}$$

Bei Verwendung von (11.7) muss man die Gleichung (11.2) als Nebenbedingung betrachten.

Der Übergang zur Hamiltonfunktion geschieht in der üblichen Weise (vgl. z. B. Paragraph 2). Allerdings kann nur die Form (11.7) verwendet werden, da in (11.8) die zeitlichen Ableitungen

von Φ_0 nicht auftreten. Verwendet man (11.7) so treten in der Hamiltonfunktion die A_i^r, B^r und ihre konjugierten Momente auf.

Der in den Paragraphen 8 und 9 entwickelte Formalismus (die „zweizeitige Formulierung" ist natürlich nicht wesentlich) gestattet (gemäss Formel (9.17) und nachfolgender Bemerkung 1)) einen Hamiltonoperator zu schreiben, welcher nur von je drei Feldgrössen Φ_1^r, Φ_2^r, Φ_3^r, ihren konjugierten Impulsen Π_i^r sowie von ihren konjugiert komplexen Operatoren abhängt.

Die Hamiltonfunktionsdichte lautet:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H} = {} & \frac{1}{8\pi} \sum_r \left(l_r^2 \left(\vec{\Phi}^{r*}, \vec{\Phi}^r\right) + \left(\operatorname{rot} \vec{\Phi}^{r*}, \operatorname{rot} \vec{\Phi}^r\right)\right) \\
& + 8\pi c^2 \sum_r \left(\left(\vec{\Pi}^{r*}, \vec{\Pi}^r\right) + l_r^{-2} \operatorname{div} \vec{\Pi}^{r*} \operatorname{div} \vec{\Pi}^r\right) \\
& + \varphi^* \left(- i h c \left(\vec{\alpha}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right) + m c^2 \beta\right) \varphi \\
& + \frac{1}{2} \sum_r \Bigg(- \left(\vec{J}^r, \vec{\Phi}^{r*}\right) + J_0^r \, 8\pi c \, l_r^{-2} \operatorname{div} \vec{\Pi}^r + \text{konj.} \\
& \qquad - \sum_i{}' \sum_k{}' S_{ik}^r \frac{\partial \Phi_i^{r*}}{\partial x_k} + \sum_k S_{0k}^r \, 8\pi c \, \Pi_k^r + \text{konj.}\Bigg) \\
& + \pi \sum_r \left(l_r^{-2} \left(J_0^{r*} J_0^r + J_0^r J_0^{r*}\right) + \sum_k \left(S_{0k}^{r*} S_{0k}^r + S_{0k}^r S_{0k}^{r*}\right)\right). \qquad (11.9)
\end{aligned}$$

Die zu den φ_μ^ν konjugierten Impulse sind natürlich gemäss (11.6) die konjugiert komplexen $\varphi_\mu^{\nu *}$ mal ih. Die Hamiltonfunktion ist in den Kern- und Materiefeldgrössen bilinear bis auf die letzte Linie, welche die (symetrisierten) Terme der Anmerkung (2.6a) enthält. Diese Terme sind biquadratisch in den φ.

Die Bewegungsgleichungen erhält man klassisch und quantentheoretisch aus den kanonischen Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi_i^r}{\partial x_0} = \frac{1}{c} \dot{\Phi}_i^r = \frac{\delta H}{c \, \delta \Pi_i^r} = \frac{i}{h c} [H, \Pi_i^r] \quad i = 1, 2, 3 \qquad (11.10)$$

und einer analogen Gleichung, wo Φ_i^r mit Π_i^r vertauscht ist und wo im dritten Gleichungsglied ein $-$ steht. $\delta H / \delta \Pi_i^r$ bedeutet funktionelle Differentiation des Funktionals H (= Volumintegral von $\mathfrak{H}$) nach der Funktion Π_i^r. Für φ gilt die analoge Beziehung

$$- i h c \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = - i h \dot{\varphi} = - \frac{\delta H}{\delta \varphi^*} = [H, \varphi]. \qquad (11.11)$$

Bei der letzten Gleichsetzung in (11.11) ist bei der Differentiation auf die Reihenfolge der Glieder zu achten, da J_0^{r*} mit J_0^r nicht vertauschbar ist.

Die letzten Identitäten (11.10) und (11.11), welche das Korrespondenzprinzip ausdrücken, gelten, wenn das Kernfeld symmetrisch gequantelt wird

$$[\Pi_i^r(\vec{x}), \Phi_k^s(\vec{y})] = \frac{h}{i}\,\delta_{rs}\,\delta_{ik}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{11.12}$$

und wenn für das Materiefeld die symmetrische (—) oder antisymmetrische (+) Quantisierung gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi_\mu^\nu(\vec{x})\,\varphi_\lambda^\varrho(\vec{y}) \pm \varphi_\lambda^\varrho(\vec{y})\,\varphi_\mu^\nu(\vec{x}) = 0 \\ &\varphi_\mu^{\nu *}(\vec{x})\,\varphi_\lambda^\varrho(\vec{y}) \pm \varphi_\lambda^\varrho(\vec{y})\,\varphi_\mu^{\nu *}(\vec{x}) = \delta_{\mu\lambda}\,\delta_{\nu\varrho}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Alle anderen Operatoren sind miteinander vertauschbar. Da Φ_0^r nicht auftritt, muss die quantentheoretische Ableitung der Feldgleichungen kurz skizziert werden:

1. Differentiation nach der Zeit von (11.10) und Elimination von $\dot{\Pi}_i^r$ aus der kanonisch konjugierten Gleichung führt auf die Gleichungen (9.20) für $i = 1, 2, 3$.

2. *Definiert* man den Operator

$$\Phi_0^r = 8\,\pi\,c\,l_r^{-2}\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}^{r*} + 4\,\pi\,l_r^{-2}\,J_0 \tag{11.14}$$

so folgt aus der zeitlichen Ableitung der kanonisch konjugierten Gleichung (11.10) für $\dot{\vec{\Pi}}^r$ (und Elimination von $\dot{\Phi}_s^r$ durch (11.10) selbst) die vierte Gleichung (9.20).

3. Aus der zu (11.10) kanonisch konjugierten Gleichung ergibt sich durch Divergenzbildung und Verwendung der Definition (11.14) die Beziehung (11.2).

4. Mit Hilfe des so erhaltenen (11.2) eliminiert man die Viererdivergenz des Stromes auf der rechten Seite der Gleichungen (9.20) und erhält die Feldgleichungen in der Form (11.1)

Wir bemerken dazu folgendes:

Die Operatoren

$$\Pi_i^r,\ \Phi_i^r \text{ und } F_{ik}^r = \frac{\partial \Phi_k^r}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i^r}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

sind *reine Feldoperatoren* und daher mit den Materieoperatoren φ vertauschbar.

Die Operatoren Φ_0^r (definiert durch 11.14) und die Operatoren $F_{i0}^r = \partial \Phi_0^r/\partial x_i + \dot{\Phi}_i^r/c$ sind gemischte Operatoren. Sie sind mit

den Materieoperatoren φ *nicht vertauschbar.* Aus den Gleichungen (11.10) folgt direkt die Beziehung

$$F^r_{i0} = 8\pi c\, \Pi^{r*}_i + 4\pi S_{0i} \tag{11.15}$$

als *Definition von* F^r_{i0} in Analogie zu (11.14).

Die aus (11.11) folgende Bewegungsgleichung der Materie hat folgende Form:

$$\Big(-ihc\Big(\alpha, \frac{\partial}{\partial x}\Big) + mc^2\beta\mu + \frac{1}{2}\sum_r\Big(-(\vec{j}^{r*}, \vec{\Phi}^r) + j^{r*}_0\, 8\pi c^2 l_r^{-2}\operatorname{div}\vec{\Pi}^{r*}$$
$$-\sum_i{}'\sum_k{}' s^{r*}_{ik}\frac{\partial\Phi^r_i}{\partial x_k} + \sum_k{}' s^{r*}_{0k}\, 8\pi c\, \Pi^{r*}_k + \text{konj.}\Big)\Big)\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\sum_\nu\Big(j^{r*}_0\, 2\pi l_r^{-2}(J^r_0\varphi + \varphi J^r_0) + \sum_k s^{r*}_{0k}\, 2\pi(S^r_{0k}\varphi + \varphi S^r_{0k}) + \text{konj.}\Big) = 0\,. \tag{11.16}$$

Wären also die J^r_0 und S^r_{0k} mit φ vertauschbar, so würde (11.16) nach Einsetzen der Definitionen (11.14) und (11.15) tatsächlich identisch mit der klassischen Bewegungsgleichung (11.3). (11.16) ist eine in φ nicht lineare Diracgleichung. Die Nichtlinearität rührt vom Auftreten von Ableitungen der Potentiale in der Lagrangefunktion her, wenn man die A^r_i und B^r als primäre Grössen ansieht (siehe Anm. Teil I, Formel (2.6a)).

12. Die Kontinuitätsgleichung der elektrischen und der schweren Ladung und die explicite Form der Wechselwirkungskräfte im Kern.

Im allgemeinen Formalismus von Teil II ist die *Elektrodynamik* mitenthalten, wenn man für eines der Felder ($r = 0$) $l_0 = 0$ setzt. Dann existiert kein B^0 und man hat $\Phi^0_i = A_i{}^0$ und in (9.9) $J_i' = J_i$. Ausser dem trivialen Fall $J^0_i = 0$ ist dann nur die Möglichkeit noch offen, dass J^0_0 mit J^{0*}_0 vertauschbar ist. Zerlegt man jetzt in Real- und Imaginärteil, so teilt sich die Beschreibung in zwei unabhängige reelle Felder auf, die je mit einem unabhängigen reellen Strom in Wechselwirkung stehen. Beide Stromanteile müssen einzeln der Kontinuitätsgleichung genügen. Die Kontinuitätsgleichung und die Realität des Feldes sind somit Konsequenzen von $l_0 = 0$.

Der Formalismus vom vorhergehenden Paragraphen ist hingegen noch nicht allgemein genug um die Elektrodynamik zu beschreiben: Der aus den φ mit Hilfe reeller τ^0 gebildete Strom (11.4) und (11.5) genügt nämlich bei Anwesenheit anderer Felder Φ^r, deren τ^r mit τ^0 nicht vertauschbar sind, nicht der Kontinuitätsgleichung. Man muss daher zum Stromausdruck noch einen

aus den Φ^r gebildeten Vierervektor addieren, d. h. die Felder Φ^r müssen Ladungsträger sein.

Ausser diesem, durch die Maxwell'sche Theorie bedingten, *Erhaltungssatz der elektrischen Ladung*, gibt es aber offenbar noch einen weiteren Erhaltungssatz: Bei allen beobachteten Umwandlungen der Materie, wurden noch keine Umwandlungen von schweren Partikeln (Neutron und Proton) in leichte Partikel (Elektron und Neutrino) beobachtet. Wir wollen daher einen *Erhaltungssatz der schweren Ladung* fordern.

Die Matrizen ($\tau^0 = \lambda$)

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{und} \quad \lambda' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

welche auf den oberen Index von φ wirken, erlauben die vom Spinorfeld getragene elektrische resp. schwere Ladungsdichte in der Form $\varphi^* \alpha_i \lambda \varphi$ zu schreiben. Sind λ^ν die Diagonalelemente der Matrix λ, so hat die 0-Komponente die Form $\sum_\nu \lambda^\nu \varphi^{\nu *} \varphi^\nu$. Die Eigenwerte des Volumintegrals von $\varphi^{\nu *} \varphi^\nu$ sind, bei Verwendung der Löchertheorie und der antisymetrischen Quantelung (vgl. auch Majorana loc. cit. 12)) ganze positive oder negative Zahlen. $\lambda^\nu = 0$ oder 1 ist also die Ladung der Partikel des ν-ten Spinorfeldes. Die Antipartikel haben die Ladung $-\lambda^\nu$.

Wir berechnen jetzt die Viererdivergenz des durch die Matrizen λ geformten Stromes:

Dazu multiplizieren wir (11.16) mit $\varphi^*\lambda$ von links und die konjugiert komplexe Gleichung mit $\lambda\varphi$ von rechts, und subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander. Die Viererdivergenz verschwindet nun im allgemeinen nicht, sondern wird ein relativ komplizierter Ausdruck. Er vereinfacht sich sehr, wenn die Matrix λ den folgenden Vertauschungsrelationen genügt:

$$\begin{aligned} [\lambda, \mu] &= 0 \\ [\lambda, \tau^r] &= \Lambda^r \tau^r \\ [\lambda, \tau^{r*}] &= -\Lambda^{r*} \tau^{r*} \\ \Lambda^r &= \text{Vielfaches der Einh. Matrix.} \end{aligned} \tag{12.2}$$

Daraus folgt, dass λ hermiteisch und Λ^r eine reelle Zahl sein muss. Die Divergenzgleichung nimmt dann die Form an

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi^* \alpha_i \lambda \varphi) = \frac{i}{2hc} \sum_r \Lambda^r \Big((\vec{\Phi}^{r*}, \vec{J}^r) - 8\pi c l^{-2} \operatorname{div} \vec{\Pi}^r \cdot J_0^r$$
$$+ \sum_i{}' \sum_k{}' \frac{\partial \Phi_i^{r*}}{\partial x_k} S_{ik}^r - \sum_k{}' 8\pi c \Pi_k^r S_{0k}^r - \text{konj.} \Big) \tag{12.3}$$

*

Dass sich die Terme vierter Ordnung in φ fortheben, folgt aus der Relationen (11.13) und aus der aus (12.2) folgenden Beziehung

$$[\lambda\, \tau^r, \tau^{r*}] + [\tau^{r*}\, \lambda, \tau^r] = 0\,.$$

Um zu zeigen, dass die rechte Seite die Divergenz eines weiteren Viererstromes ist, multiplizieren wir die Feldgleichung (11.1) mit $\varepsilon_i\, \Phi_i^{s*}$ von links und die konjugiert komplexe Gleichung ebenfalls von links mit $\varepsilon_i\, \Phi_i^s$ und addieren die Summen der beiden Gleichungen über i von 0 bis 3.

Man erhält, unter Berücksichtigung der Nichtvertauschbarkeiten, folgende Viererdivergenz:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{i}{8\,\pi\, h\, c}\sum_k \varepsilon_k\,(\Phi_k^{r*}\, F_{ik}^r - \Phi_k^r\, F_{ik}^{r*})\right) =$$

$$-\frac{i}{2\,h\,c}\Big((\vec{\Phi}^{r*}, \vec{J}^r) - (\vec{J}^{r*}, \vec{\Phi}^r) - \Phi_0^{r*}\, J_0^r + \Phi_0^r\, J_0^{r*} - \frac{l^2}{4\,\pi}[\Phi_0^{r*}, \Phi_0^r]$$

$$- \Phi_i^{r*}\sum_k \frac{\partial S_{ik}^r}{\partial x_k} - \Phi_i^r \sum_k \frac{\partial S_{ik}^{r*}}{\partial x_k} - \frac{1}{4\pi}\sum_k [F_{k0}^{r*}, F_{k0}^r]\Big)\,. \qquad (12.4)$$

Wegen der Definition von Φ_0^{r*} (11.14) ergeben der dritte, vierte und fünfte Term in der Klammer der rechten Seite gerade

$$(\ldots\, -8\,\pi\, c\, l^{-2}\, \mathrm{div}\, \vec{\Pi}^r \cdot J_0^r + \text{konj.}\ \ldots) \qquad (12.5)$$

Der letzte Term in der rechten Klammer, nimmt wegen der Definition der F_{k0}^r (11.15) die Form an:

$$\Big(\ldots\, -\sum_k{}' \,4\,\pi\, S_{0k}^{r*}\, S_{0k}^r + \sum_k{}' \,4\,\pi\, S_{0k}^r\, S_{0k}^{r*}\Big)\,. \qquad (12.6)$$

Multipliziert man also (12.4) mit der Zahl Λ^r und summiert über r, so kann die Summe von (12.3) und (12.4) bei Berücksichtigung der Definition (11.15) als Kontinuitätsgleichung geschrieben werden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \varrho\right) = 0 \text{ mit den Komponenten}$$

$$\varrho_i = \sum_\nu \lambda^\nu\,(\varphi^{\nu*}\, \alpha_i\, \varphi^\nu) + \sum_r \Lambda^r\Big(\frac{i}{8\,\pi\, h\, c}\sum_k \Phi_k^{r*}\,(F_{ik}^r - 4\,\pi\, S_{ki}^r)$$

$$- \Phi_k^r\,(F_{ik}^{r*} - 4\,\pi\, S_{ik}^{r*})\Big)\,. \qquad (12.7)$$

Der Ladungsanteil des r-ten Feldes ist also der r-te Summand der zweiten Summe, genau wie der ν-te Summand der ersten Summe den Ladungsanteil des ν-ten Materiefeldes darstellt.

Der Ladungsanteil des r-ten Feldes verschwindet insbesondere dann, wenn das Feld reell ist. Dass ein analoger Satz für Spinorfelder existiert, hat MAJORANA gezeigt[9]).

Die 0-Komponente ist die eigentliche Ladungsdichte. Sie lautet unter Verwendung der Definition (11.15):

$$\varrho_0 = \sum_\nu \lambda^\nu (\varphi^{\nu *} \varphi^\nu) + \sum_r \Lambda^r \sum_k{}' \frac{i}{h} (\Pi_k^r \Phi_k^r - \Pi_k^{r*} \Phi_k^{r*}). \quad (12.8)$$

Wie bereits bemerkt, sind die Eigenwerte eines einzelnen Summanden der ersten Summe, bei Berücksichtigung der Diracschen Löchertheorie, positive und negative Vielfache von λ^ν. Dasselbe gilt, nach der Pauli-Weisskopf'schen Theorie[6]) für jeden einzelnen Summand der zweiten Doppelsumme. Die Zahlen λ^ν und Λ^r stellen somit die Ladung der Partikel des ν-ten Materie-(Spinor)- und des r-ten Kernkraft(Tensor)-Feldes dar. Jedes der Felder Φ_i^r (mit Ausnahme der reellen Felder) hat Partikel und Antipartikel. Letztere haben das umgekehrte Vorzeichen der Ladung*).

Die Gleichungen (12.2), welche die *zur Existenz einer Kontinuitätsgleichung* (12.7) notwendigen Bedingungen darstellen, gestatten eine Bestimmung der möglichen Matrices τ^r.

Zuerst folgt aus der ersten Gleichung, dass λ eine Diagonalmatrix sein muss, da die Eigenwerte von μ alle verschieden sind. Die zweite und dritte Gleichung fordern Hermiteicität für λ und bestimmen damit λ^ν und Λ^r als reelle Zahlen. Die Matrices der Gleichung (12.1), elektrische und schwere Ladung, gehorchen offenbar diesen Anforderungen.

Um die Form der vierreihigen Matrices τ^r zu bestimmen, zerlegen wir die allgemeinste vierreihige Matrix in eine Summe von direkten Produkten von zweireihigen Matrices. Es seien 11, 21, 12 und 22 die Numerierung der vier Zustände Elektron, Neutrino, Proton und Neutron (entsprechend den vier möglichen Werten des oberen Index ν von φ). $\tau_o = 1$, τ_1, τ_2 und τ_3 seien die Einheit und die drei Pauli'schen Matrices, welche auf den ersten Index von 11, 21, usw. wirken. Ebenso seien die τ_i' $(i = 0, 1, 2, 3)$ die entsprechenden auf den zweiten Index wirkenden Matrices.

Die gestrichenen und die ungestrichenen Matrices sind natürlich miteinander vertauschbar. Ferner gilt für beide Matrices die bekannte Regel

$$\tau_i \tau_k = -\tau_k \tau_i = \tfrac{1}{2} [\tau_i, \tau_k] = i \tau_l, \quad i k l = \text{cykl.} \quad (12.9)$$

*) Die Summe über k von 1 bis 3 bedeutet, dass die Teilchen drei Einstellmöglichkeiten der Spins haben.

Die allgemeinste vierreihige Matrix lautet dann

$$\tau^r = \sum_i \sum_k a^r_{ik}\, \tau_i\, \tau_k' \tag{12.10}$$

und die speziellen Matrices (12.1) haben die Form

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\tau_0 + \tau_3)\, \tau_0'\,; \quad \lambda' = \tfrac{1}{2}\, \tau_0\, (\tau_0' - \tau_3')\,. \tag{12.11}$$

Einsetzen dieser Entwicklungen in die zweite Gleichung (12.2) und Koeffizientenvergleich beider Seiten der Gleichung gibt folgende Beziehungen zwischen den a^r_{ik}:

$$\begin{aligned} \Lambda^r\, a^r_{0k} &= 0 \qquad & \Lambda^r\, a^r_{2k} &= +\, i\, a^r_{1k} \\ \Lambda^r\, a^r_{3k} &= 0 \qquad & \Lambda^r\, a^r_{1k} &= -\, i\, a^r_{2k}\,. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Für die Erhaltung der schweren Ladung folgt eine analoge Gleichung, für den zweiten Index. Nur steht überall statt Λ^r die Grösse $-\Lambda'^r$.

Die Lösungen von (12.12) sind:

$$\begin{aligned} &\Lambda^r = 0 \text{ mit } a^r_{1k} = a^r_{2k} = 0 \text{ oder} \\ &\Lambda^r = \pm 1 \text{ mit } a^r_{0k} = a^r_{3k} = 0 \text{ und } a^r_{2k} = \pm\, i\, a^r_{1k} \end{aligned} \tag{12.13}$$

und analoge Gleichungen für den zweiten Index mit Λ'^r.

Es sind demgemäss folgende Fälle möglich:

1. Feld ohne elektrische und schwere Ladung:

$\Lambda^1 = \Lambda'^1 = 0$ und

$$\tau^1 = a^1_{00} + a^1_{10}\, \tau_1 + a^1_{01}\, \tau_1' + a^1_{11}\, \tau_1\, \tau_1'\,. \tag{12.14}$$

Ein solches Feld ist offenbar das elektromagnetische Feld. Diese Felder können insbesondere reell sein, da die Matrices τ hermiteisch sind, und die Konstanten reell gewählt werden können.

Die durch dieses Feld hervorgerufene Wechselwirkung zwischen zwei Materieteilchen im Konfigurationenraum folgt durch Einsetzen von (12.14) in (10.5). Beschränken wir uns auf schwere Teilchen, so kann man $\tau_3'\, \psi = 1\psi$ setzen, und der τ enthaltende Faktor von (10.5) lautet einfach*):

$$|a|^2 + |b|^2\, \tau^r_3\, \tau^s_3 + \tfrac{1}{2}\,(a\, b^* + a^*\, b)\, (\tau^r_3 + \tau^s_3) \tag{12.15}$$

dabei sind a und b beliebige komplexe Zahlen. Sind sie insbesondere reell, so ist das Feld reell.

---

*) Die Indices r und s in den Gleichungen (12.15), (12.17) und (12.18) beziehen sich natürlich nicht auf verschiedene Felder, sondern, gemäss der Konfigurationenraumbeschreibung des Paragraphes 10, auf zwei verschiedene schwere Teilchen.

2. Feld mit elektrischer, aber ohne schwere Ladung.

$$\Lambda^2 = -1,\ \Lambda'^2 = 0 \text{ und}$$
$$\tau^2 = (\tau_1 - i\,\tau_2)\,(a_{10}^2 + a_{13}^2\,\tau_3')\,. \tag{12.16}$$

Die Wechselwirkung zwischen zwei schweren Teilchen ist wieder Formel (10.5), wo der τ enthaltende Faktor

$$|a'|^2\,(\tau_1^r\,\tau_1^s + \tau_2^r\,\tau_2^s) \tag{12.17}$$

lautet. Will man insbesondere Kräfte zwischen Neutron und Proton haben, welche unabhängig von der Ladung und nur abhängig vom Symmetriecharakter der Wellenfunktion im Konfigurationsraum der schweren Teilchen sind, so muss sich die Wechselwirkung in der Form (10.5) mit einem τ Faktor („isotopic spin factor"[14]))

$$\left(|a|^2 + |b|^2 \sum_{i=1}^{i=3} \tau_i^r\,\tau_i^s\right) \tag{12.18}$$

schreiben lassen. Bildet man die Summe von (12.15) und (12.17), indem man für beide Felder 1 und 2 dieselben Konstanten f und g in (10.5) nimmt, so erhält man tatsächlich (12.18), wenn man $a' = a$ und $b = i\,a$ setzt. Das führt allerdings zu der Unschönheit, dass das Feld 1 (Feld ohne elektrische und schwere Ladung) komplex ist und also zwei Teilchensorten (Antiteilchen) enthält. Da die τ Matrices der folgenden Felder nur noch τ_1' und τ_2' enthalten, tragen sie nichts mehr zur Wechselwirkung zwischen schweren Teilchen bei. Der Fall $\Lambda^2 = +1$, $\Lambda^1 = 0$ ist identisch mit dem behandelten (Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen).

13. Fortsetzung der Diskussion der möglichen Felder.

Während bei den am Ende des vorhergehenden Paragraphen diskutierten Feldtypen die Darstellung durch Vierervektoren Φ_i^r notwendig war, um Übereinstimmung mit dem Experiment (Anziehung im Grundzustand des Deuterons usw.) zu finden, ist sie für die weiteren Felder nicht mehr notwendig. Diese Felder können also z. B. auch skalaren Charakter haben. Man überzeugt sich aber leicht, dass auch für sie analoge Gesichtspunkte gelten und dass insbesondere die Relationen (12.2) gelten, sowie die daraus abgeleiteten Beziehungen (12.12) und (12.13).

Bezeichnen wir die Spinorpartikel Elektron, Neutrino, Proton und Neutron durch*) e (1,0), n (0,0), P (1,1) und N (0,1), die

*) Die beiden Indices in der auf das Symbol folgenden Klammer beziehen sich auf elektrische und schwere Ladung der Teilchen.

neutralen Partikel von Feld 1 (deren wegen der komplexen Konstanten in (12.15) mindestens zwei existieren müssen) mit $\mathfrak{n}$ (0,0) und die geladenen Partikel des Feldes 2 mit $\mathfrak{e}$ (1,0), so geben die Matrices (12.14) und (12.16) zu folgenden möglichen Umwandlungen Anlass:

Feld 1.

$$\text{Spinorpartikel} \longrightarrow \text{gleiche Spinorpartikel}' + \mathfrak{n}\,(0{,}0) \tag{13.1}$$

Dabei sind natürlich zur Zeit nur die Reaktionen mit schweren Spinorpartikeln „beobachtet", d. h. ihre Existenz muss zur Erklärung der Kernkräfte zwischen gleichen Teilchen gefordert werden.

Feld 2.

$$P\,(1{,}1) \rightleftarrows N\,(0{,}1) + \mathfrak{e}\,(1{,}0) \tag{13.2}$$

$$e\,(1{,}0) \rightleftarrows n\,(0{,}0) + \mathfrak{e}\,(1{,}0)\,. \tag{13,3}$$

Die sämtlichen Symbole sind als algebraische Grössen zu betrachten (negative Symbole bedeuten die entsprechenden Antiteilchen). Aus (13.2) aus (13.3) folgt beispielsweise

$$(-\mathfrak{e}\,(1{,}0)) \rightleftarrows (-e\,(1{,}0)) + n\,(0{,}0)\,. \tag{13.3'}$$

D. h. ein (negativ geladenes) Anti-$\mathfrak{e}$-Teilchen $(-\mathfrak{e})$ kann in ein negatives Elektron $(-e)$ und ein Neutrino (n) zerfallen.

Auch hier sind vorerst nur die Reaktionen (13.2) „beobachtet", da aus ihnen die Austauschkräfte zwischen Proton und Neutron resultieren.

Da aber die $\mathfrak{e}$-Teilchen offenbar äusserst selten vorkommen, erklärte (13.3′) ihre endliche Lebensdauer.

Ferner gibt (13.3) eine Theorie des β-Zerfalles:

Ein Neutron verwandelt sich in ein Proton + ein Anti-$\mathfrak{e}$-Teilchen gemäss der algebraischen Umschreibung von (13.2):

$$N\,(0{,}1) \longrightarrow P\,(1{,}1) + (-\mathfrak{e}\,(1{,}0))\,. \tag{13.2'}$$

Hierauf tritt Reaktion (13.3′) ein.

Gemäss dem Formalismus von Teil II kann das so gedeutet werden: Ein positives Elektron in einem Zustande negativer Energie springt unter dem Einfluss des retardierten Potentials eines schweren Teilchens, welches sich aus einem Neutron in ein Proton verwandelt, in einen Neutrinozustand positiver Energie. Da die Bewegung der schweren Teilchen langsam erfolgt, kann

die Retardierung gemäss Paragraph 10 vernachlässigt werden und eine Wechselwirkung der Form (10.5) in die Hamiltonfunktion eingesetzt werden.

Da die Reichweite des $\mathfrak{e}$-Feldes aus den heuristischen Ansätzen über Kernkräfte als klein gegen die Wellenlänge der de Broglie-wellen von Elektron und Neutrino erscheint, kann die „Fernwirkung" aus Gleichung (10.5) durch eine Nahwirkung ersetzt werden und es folgt eine der Fierz'schen Verallgemeinerungen[5]) der Fermischen Theorie[16]) des β-Zerfalles.

Nun hat aber auch diese Verallgemeinerung immer noch den Nachteil, eine zu schwache Asymetrie der Energieverteilung im kontinuierlichen β-Spektrum zu liefern.

Wir werden sehen, dass die weiteren möglichen Feldtypen eine alternative und nach Rechnungen von WENTZEL[17]) bessere Beschreibung des β-Zerfalles bieten.

Das Nichteintreten der Reaktion (13.3) resp. das nur relativ unwahrscheinliche Eintreten derselben, ergäbe eine unendlich lange, resp. eine längere als die von BHABHA vorgeschlagene[2]) Lebensdauer der $\mathfrak{e}$-Partikel. Die endliche Lebensdauer wäre dann *nur* durch auftretende Zusammenstösse mit Neutronen in Atomkernen bedingt (resp. für Anti-$\mathfrak{e}$-Teilchen mit Protonen)[21]).

Wir setzen unsere Diskussion der Feldtypen fort:

3. Feld ohne elektrische, aber mit schwerer Ladung.

$$\Lambda^3 = 0,\ \Lambda'^3 = -1 \text{ ergibt analog (12.16)}$$

$$\tau^3 = (a^3_{01} + a^3_{31}\,\tau_3)\,(\tau_1' + i\,\tau_2')\,. \tag{13.4}$$

Die Teilchen bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$ (0,1). Sie geben zu folgenden Reaktionen Anlass:

$$N\,(0{,}1) \rightleftharpoons n\,(0{,}0) + \mathfrak{N}\,(0{,}1) \tag{13.5}$$

$$P\,(1{,}1) \rightleftharpoons e\,(1{,}0) + \mathfrak{N}\,(0{,}1)\,. \tag{13.6}$$

Da das Proton sicher eine stabile Partikel ist, so folgt aus (13.6), dass die Masse der $\mathfrak{N}$-Partikel grösser als die Differenz zwischen Protonen- und Elektronenmasse ist. Da aber auch aus den Kernspin und Kernstatistikmessungen hervorgeht, dass im Kern nur Neutronen und Protonen aber keine Partikel mit ganzzahligem Spin vorkommen, ist es wahrscheinlich, dass die $\mathfrak{N}$-Partikel auch grössere Masse als die Neutronen besitzen und daher instabil sind.

Gemäss den Überlegungen über die retardierten Potentiale gibt dieses Feld 3 Anlass zu Austausch-Kräften zwischen leichten

und schweren Partikeln von sehr kurzer Reichweite (Comptonwellenlänge des Protons). Diese Austauschkräfte erlauben die alternative Erklärung des β-Zerfalles:

Nach (13.5) entsteht eine $\mathfrak{N}$-Partikel und ein Neutrino. Die $\mathfrak{N}$-Partikel zerfällt nach der algebraisch umgeschriebenen Gleichung (13.6):

$$\mathfrak{N}\,(0{,}1) \longrightarrow P\,(1{,}1) + (-e\,(1{,}0))\,. \tag{13.6'}$$

Anders ausgedrückt lautet das: Eine Spinorpartikel geht aus dem Zustande „kerngebundenes Neutron" in einen Zustand „freies Neutrino" über. Das durch diesen Übergang erzeugte retardierte oder avancierte Potential des Feldes 3 induziert den Quantensprung einer anderen Partikel aus einem Zustand „Elektron negativer Energie" in einen Zustand „kerngebundenes Proton".

Eine Vernachlässigung der Retardierung ist natürlich nicht mehr möglich. Wie WENTZEL[17]) zeigt erhält man eine stärkere Asymetrie als diejenige der Fermi'schen Theorie, wenn das $\mathfrak{N}$-Feld vom Kern beeinflusst wird (d. h. wenn „Zwischenzustände" mit gebundenen $\mathfrak{N}$-Partikeln existieren).

4. *Feld mit elektrischer und schwerer Ladung gleichen Vorzeichens.*

$\Lambda^4 = \Lambda'^4 = -1$ ergibt

$$\tau^4 = a^4_{11}\,(\tau_1 - i\,\tau_2)\,(\tau_1' + i\,\tau_2')\,. \tag{13.7}$$

Die, mit $\mathfrak{P}$ (1,1) bezeichneten Teilchen, geben nur zu der Reaktion

$$P\,(1{,}1) \rightleftharpoons n\,(0{,}0) + \mathfrak{P}\,(1{,}1) \tag{13.8}$$

Anlass. Damit das Proton stabil erscheint, müssen die $\mathfrak{P}$-Teilchen eine grössere Masse als die des Protons haben.

5. *Feld mit elektrischer und schwerer Ladung verschiedenen Vorzeichens.*

$\Lambda^5 = +1,\ \Lambda'^5 = -1$ gibt

$$\tau^5 = a^5_{11}\,(\tau_1 + i\,\tau_2)\,(\tau_1' + i\,\tau_2') \tag{13.19}$$

und ebenfalls nur die einzige Reaktion

$$N\,(0{,}1) \rightleftharpoons e\,(1{,}0) + \mathfrak{P}\,(-1{,}1)\,. \tag{13,10}$$

14. Erweiterung des Strombegriffes J_i^r.

Die Definitionen (11.4) der in den Proca'schen Gleichungen (11.1) auftretenden Stromgrössen sind noch einer, ebenfalls in φ bilinearen, Erweiterung fähig. Fügt man ihnen die Terme

$$K_i^r = \varphi\, k_i^r\, \varphi; \quad R_{ik}^r = \varphi\, r_{ik}^r\, \varphi \tag{14.1}$$

mit den Matrixoperatoren

$$k_i^r = f'^r\, e\, \delta\, \alpha_i\, \varkappa^r; \; r_{ik}^r = g'^r\, e\, \frac{1}{l_r}\, \delta\, \sigma_{ik}\, \varkappa^r \tag{14.2}$$

hinzu, wo δ die von Fermi eingeführte Matrix [16]) (s. auch Pauli [18])) bedeutet und wo $\varkappa^r$ wieder auf den oberen Index ν von φ_μ^ν wirkende Operatoren darstellen, so ändert sich an den Bewegungsgleichungen des Feldes (11.1) und an der Divergenzgleichung des Feldes (12.4) nichts, ausser dass J_i^r durch $J_i^r + K_i^r$ ersetzt ist. Um die Bewegungsgleichungen für φ aus der Hamiltonfunktion zu erhalten, müssen wir noch (ausser dem erwähnten Ersetzten) die Terme

$$2\pi \sum_r (l_r^{-2} (J_0^{r*}\, K_0^r + K_0^{r*}\, J_0^r + K_0^{r*}\, K_0^r) + \text{entspr. Terme in } S_{0k}^r \text{ und } R_{0k}^r) \tag{14.3}$$

hinzufügen. Es sei bemerkt, dass diese Terme zwar hermiteisch, aber, im Gegensatz zu den Termen der letzten Linie von (11.9) *nicht symetrisch* sind. Nur mit diesen Termen ist eine Kontinuitätsgleichung möglich.

Bei symmetrischer Quantelung von φ erhält man die klassischen Wellengleichungen (11.3), welche aber durch Terme in φ^* ergänzt sind. Bei antisymmetrischer Quantelung*) zeigt sich ein charakteristischer Vorzeichenunterschied eines dieser Terme gegenüber den klassischen Gleichungen. Die Divergenzgleichung (12.3) behält ihre Form, wenn die Matrices $\varkappa$ den Antivertauschungsrelationen

$$\lambda\, \varkappa^r + \varkappa^r\, \lambda = -\Lambda^r\, \varkappa^r \tag{14.4}$$

genügen. Entwickelt man die Matrices $\varkappa$ wieder nach (12.10) mit Konstanten b_{ik}, so folgen in Analogie mit (12.12) und (12.13) die Beziehungen.

$$\begin{aligned} b_{1k}^r &= -\Lambda^r\, b_{1k}^r, \; b_{2k}^r = -\Lambda^r\, b_{2k}^r \\ b_{0k}^r + b_{3k}^r &= -\Lambda^r\, b_{0k}^r, \; b_{3k}^r + b_{0k}^r = -\Lambda^r\, b_{3k}^r. \end{aligned} \tag{14.5}$$

---

*) Dann gilt in (11.11) nur die Form $[H, \varphi]$ und nicht mehr $\delta H/\delta\varphi$.

Die Lösungen für Λ^r lauten jetzt $0, -1, -2$ statt $0, -1, +1$ wie im Paragraph 12. Die Lösung -2 (doppelt geladene Elementarteilchen) wollen wir ausschliessen.

Die im vorhergehenden Paragraphen besprochenen Feldtypen geben dann zu folgenden zusätzlichen möglichen Reaktionen Anlass:

1. Feld ohne elektrische und ohne schwere Ladung.

$$\varkappa^1 = b^1_{00} (\tau_0 - \tau_3) (\tau_0' + \tau_3') \tag{14.6}$$

d. h. die Reaktion:

$$\mathfrak{n}\,(0,0) \rightleftharpoons 2\, n\,(0,0)\,. \tag{14.7}$$

2. Feld mit elektrischer, aber ohne schwere Ladung.

$$\varkappa^2 = (b^2_{10}\, \tau_1 + b^2_{20}\, \tau_2)\, (\tau_0' + \tau_3') \tag{14.8}$$

oder in der Reaktionsschreibweise

$$e\,(1,0) \rightleftharpoons (-\, n\,(0,0)) + \mathfrak{e}\,(1,0)\,. \tag{14.8}$$

3. Feld ohne elektrische, aber mit schwerer Ladung.

$$\varkappa^3 = (\tau_0 - \tau_3)\, (b^3_{01}\, \tau_1' + b^3_{02}\, \tau_2') \tag{14.9}$$

oder

$$N\,(0,1) \rightleftharpoons (-\, n\,(0,0)) + \mathfrak{N}\,(0,1)\,. \tag{14.10}$$

4. Feld mit elektrischer und schwerer Ladung gleichen Vorzeichens.

$$\varkappa^4 = (b^4_{11}\, \tau_1 + b^4_{21}\, \tau_2)'\, \tau_1' + (b^4_{12}\, \tau_1 + b^4_{22}\, \tau_2)\, \tau_2' \tag{14.11}$$

mit den Reaktionen

$$P\,(1,1) \rightleftharpoons (-\, n\,(0,0)) + \mathfrak{P}\,(1,1) \tag{14.12}$$

$$N\,(0,1) \rightleftharpoons (-\, e\,(1,0)) + \mathfrak{P}\,(1,1)\,. \tag{14.13}$$

Das Feld 5 mit schwerer und elektrischer Ladung verschiedenen Vorzeichens gibt nur die Matrix $\varkappa^5 = 0$.

Ausser der letzten Reaktion (14.13) sind alle neuen Reaktionen dieselben wie diejenigen der τ Matrices, nur spielt überall das Antineutrino die Rolle des Neutrinos.

Das Feld 4 gibt eine weitere Möglichkeit des β-Zerfalles: Ein Neutron wird eine $\mathfrak{P}$ (1,1)-Partikel (14.13) und sendet ein negatives Elektron aus. Die $\mathfrak{P}$ (1,1)-Partikel zerfällt hierauf, gemäss der algebraischen Umschreibung von (14.12), in ein Proton und ein Neutrino:

$$\mathfrak{P}\,(1,1) \longrightarrow P\,(1,1) + n\,(0,0). \tag{14.12'}$$

Für (12.12′) gilt das anlässlich (13.6′) gesagte[17]). Das Auftreten von Neutrino und Antineutrino hat folgende tiefergehende Bedeutung:

a) Neutrino und Antineutrino sind verschiedene Partikel. Dann unterscheiden sie sich durch die sogenannte Neutrinoladung. Fordert man die *Erhaltung der Neutrinoladung*, so muss man auch dem Neutron eine Neutrinoladung zusprechen. Die Matrix

$$\lambda'' = 1 - \lambda \tag{14.12}$$

erlaubt dann die von den Spinorpartikeln getragene Neutrinoladungsdichte zu formen. Aus (12.2) folgt dann

$$[\lambda'', \tau^r] = \Lambda''^r \tau^r = -\Lambda^r \tau^r \tag{14.13}$$

d. h. die Partikel des Kernfeldes haben gleichzeitig elektrische und Neutrinoladung umgekehrten Vorzeichens. Aus (14.14) folgt aber

$$\lambda'' \varkappa^r + \varkappa^r \lambda'' = -\Lambda''^r \varkappa^r = (2 + \Lambda^r)\, \varkappa^r \tag{14.14}$$

(14.14) und (14.13) sind nur miteinander verträglich, wenn entweder $\varkappa^r$ oder τ^r verschwindet, d. h. für ein bestimmtes Feld Φ^r treten nur entweder die Reaktionen des Paragraphen 13 oder die Reaktionen aus diesem Paragraphen auf.

b) Es existiert kein Unterschied zwischen Neutrino und Antineutrino. Dann können die Matrices $\varkappa$ so gewählt werden, dass in den Wechselwirkungstermen Feld-Materie in der Hamiltonfunktion der Spinor des Neutrinofeldes φ^2 nur in der Kombination

$$\overline{\varphi}^2 = \varphi^2 + \delta^* \varphi^{2*} \tag{14.15}$$

auftritt. Wählt man die Matrices α_i und β in der Form, dass die α_i rein reell und β rein imaginär erscheinen, so wird die Matrix δ gleich der Einheitsmatrix und man hat $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi}^{*2}$. Majorana[9]) hat gezeigt, dass man dann auch den Anteil der freien Spinorpartikel in der Hamiltonfunktion allein unter Verwendung der reellen Funktion $\overline{\varphi}^2$ schreiben kann. Das reelle Spinorfeld kennt also, genau wie das reelle Tensorfeld, keine Antipartikel, d. h. es besteht aus nur einer Partikelart (vgl. dazu auch Racah[19]).

15. Schlussbemerkung.

Nachdem die Existenz einer Kontinuitätsgleichung bei Abwesenheit von elektrischen Feldern gezeigt worden ist, macht die Einführung der Wechselwirkung „Elektrisches Feld mit elektrisch geladenen Φ^r und φ^ν Feldern“ keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr. Klassisch ist der Fall von Proca[10]) bereits behandelt.

Es sind dann u. a. folgende interessante Eigenschaften der neuen Partikel zu behandeln (vgl. dazu auch BHABHA[2])):

1. Bremsstrahlung, Comptoneffekt und Paarerzeugung der $\mathfrak{e}$-Partikel (für spinlose Partikel wurde die zur Bethe-Heitler'schen analoge Formel bereits von PAULI und WEISSKOPF berechnet[6])).

2. Absorption (und Streuung) eines $\mathfrak{e}$-Teilchens (oder eines ungeladenen $\mathfrak{n}$-Teilchens) durch ein schweres Teilchen im Atomkern (= Atomzertrümmerung durch $\mathfrak{e}$- oder $\mathfrak{n}$-Teilchen, da schon die Ruhenergie dieser Teilchen genügt, um einen Kernbestandteil aus seiner Bindung zu lösen) [21]).

3. Erzeugung von Paaren von $\mathfrak{e}$- oder $\mathfrak{n}$-Teilchen, durch Rekombination von Proton, Neutron mit Antiproton und Antineutron. Ausstrahlung einer oder mehrerer $\mathfrak{e}$- und $\mathfrak{n}$-Partikel durch Bremsung von schnellen Neutronen und Protonen.

Das Entstehen der doch offenbar instabilen $\mathfrak{e}$-Partikel (über ihre Instabilität vgl. auch soeben veröffentlichte Beobachtungen von BLAKETT[20])) könnte dann eventuell, ausser durch Paarerzeugung aus einer primären Photonenstrahlung, durch diese Rekombination einer primären, aus schweren Antiteilchen bestehenden, kosmischen Strahlung mit Kernbestandteilen gedeutet werden.

Institut de Physique, Université de Genève.

Literatur.

[1]) bis [11]) siehe unter STUECKELBERG, Teil I[12]).
[12]) STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 225 (1938).
[13]) STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **9**, 389 (1936).
[14]) BREIT, CONDON and PRESENT, Phys. Rev. **50**, 825 (1936).
[15]) FIERZ, Zeitschr. f. Phys. **104**, 553 (1937).
[16]) FERMI, Zschr. f. Phys. **88**, 161 (1934).
[17]) WENTZEL, Zschr. f. Phys. **104**, 34 (1936) und **105**, 738 (1937).
[18]) PAULI, Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, p. 109.
[19]) RACAH, Nuovo Cim. **14** (N⁰ 7) (1937).
[20]) BLACKETT, Proc. Roy. Soc. **165**, 30 (1938).
[21]) STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 378 (1938).