Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 12 (1939)
Heft: III

Artikel: Ein dynamisches Modell für schwere Teilchen
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110939

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein dynamisches Modell für schwere Teilchen

von **W. Scherrer**, Bern.

(27. III. 39.)

Einleitung.

Eines der interessantesten Ergebnisse der Relativitätstheorie ist zweifellos die Äquivalenz von Masse und Energie. In der Kernphysik ist es üblich, derselben eine sehr weitgehende Bedeutung beizumessen, indem man irgend zwei verschiedenen Ruhmassen M und m die Energiebeträge Mc^2 und mc^2 zuordnet. In der Theorie ist es meines Wissens noch nicht gelungen, Energieumwandlungen darzustellen, die eine Erklärung für die Existenz verschiedener Ruhmassen bilden könnten. So enthält der Energiesatz für ein Elektron im Feld eines unendlich schweren Kerns

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{e^2}{r} = W \tag{1}$$

keinen Fall, wo Energie auf die Ruhmasse übertragen wird.

Bei der Verallgemeinerung der Gleichung (1) auf mehrere Teilchen stehen die Dinge auch nicht besser. Bei einem Versuch, die Verschiedenheit von Ruhmassen theoretisch zu erfassen, wird es sich wohl vor allem um folgende Alternative handeln: Entweder man führt diese Verschiedenheiten auf Geschwindigkeiten innerhalb eines aus gleichartigen Teilchen zusammengesetzten Systems zurück, oder aber man führt von vorneherein eine variable Masse in die Dynamik ein. Der erste Fall hat eine befriedigende Lösung des Zweikörperproblems der relativistischen Elektrodynamik zur Voraussetzung und kann also so lange nicht ausgeschlossen werden, als eine solche Lösung nicht vorliegt. Unter diesem Vorbehalt soll nun im Folgenden ein Modell für den zweiten Fall auseinandergesetzt werden, das insofern vielleicht einiges Interesse verdient, als es die Entstehung eines schweren Teilchens aus zwei leichten unter dem Einfluss hoher Energien illustriert.

Ob dieses Modell auf die Wirklichkeit angewendet werden kann, muss vorderhand noch eine offene Frage bleiben.

*

Den Ausgangspunkt bildet eine Lagrange-Funktion für zwei geladene Teilchen, die ich in einer kurzen Note „über die Prinzipien der Physik" mitgeteilt habe[1]). Daselbst findet der Leser die allgemeinen Erwägungen, die mich zu ihrer Aufstellung geführt haben. Doch sollen im Folgenden alle für das Detail der Theorie notwendigen Entwicklungen Platz finden.

Schliesslich möchte ich den Leser ersuchen, die hier verwendete Methode der älteren Quantentheorie nicht übel zu vermerken. Zu ihrer Rechtfertigung mag folgendes dienen. Der Zusammenhang zwischen der geometrisch vollkommen durchsichtigen klassischen Punktdynamik und der nichtrelativistischen Wellenmechanik ist sehr eng und verleiht der letzteren eine starke Stütze. Im relativistischen Falle fehlt nun gerade dieser Untergrund, wodurch wohl ein nicht geringer Teil der bestehenden Schwierigkeiten verursacht wird. Jedenfalls erscheint die Frage berechtigt, ob durch eine Analyse der relativistischen Punktdynamik etwas zu gewinnen sei. Eine dem hier gegebenen Ansatz entsprechende einkomponentige Wellengleichung wird in § 6 mitgeteilt.

§ 1. Wahl einer Lagrange-Funktion.

Wir charakterisieren die Lage zweier Elementarteilchen mit den Ruhmassen m und M im vierdimensionalen Zeitraum durch die Vektoren.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, \sqrt{-1}\, c\, t)\,, \\ \mathfrak{Y} &= (y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1, y_2, y_3, \sqrt{-1}\, c u)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Die damit eingeführte orthogonale Schreibweise erlaubt uns, auf den Gebrauch von Indizes zu verzichten. Für eine in einem festen Koordinatensystem vorzunehmende Zerspaltung in Raum und Zeit verwenden wir überdies die Symbole

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= (x_1, x_2, x_3)\,; \qquad \mathfrak{X} = (\mathfrak{x}\,;\ \sqrt{-1}\, c\, t)\,, \\ \mathfrak{y} &= (y_1, y_2, y_3)\,; \qquad \mathfrak{Y} = (\mathfrak{y}\,;\ \sqrt{-1}\, c\, u)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Für einen Gradienten setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{X}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) \tag{4}$$

und entsprechend für $\mathfrak{Y}$.

---

[1]) Helvetica Physica Acta XI, S. 219 (1938).

Schliesslich bedienen wir uns der skalaren Multiplikation.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}\,\mathfrak{Y} &= x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_4\,y_4\,, \\ \mathfrak{X}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Die als raumartig vorausgesetzte Distanz R der beiden Teilchen ist dann definiert durch

$$R = |\,\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}\,| = \underset{+}{\sqrt{(\mathfrak{X} - \mathfrak{Y})^2}}\,. \tag{6}$$

Um die einzuführende Lagrange-Funktion bequem mit der relativistischen Elektrodynamik vergleichen zu können, betrachten wir zuerst eine Lagrange-Funktion, aus welcher man die ponderomotorische Kraft des vom Teilchen in $\mathfrak{Y}$ erzeugten Feldes auf das Teilchen in $\mathfrak{X}$ ableiten kann.

Zu diesem Zweck setzen wir:

$\bar{e}$ = Ladung des Teilchens in $\mathfrak{X}$.
$\mathfrak{S}$ = Ruhrichtung des Teilchens in $\mathfrak{Y}$.
φ = Retardiertes Potential des Teilchens in $\mathfrak{Y}$, bezogen auf die Ruhrichtung $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{Y}$ ist also Quellpunkt.
τ = Eigenzeit des Teilchens in $\mathfrak{X}$. Die Ableitung nach τ werde durch einen Punkt bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen erweist sich die Lagrange-Funktion

$$L = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{\mathfrak{X}}^2 + \frac{\bar{e}}{c}\,\varphi\,\mathfrak{S}\,\dot{\mathfrak{X}} \tag{7}$$

als ausreichend für den oben genannten Zweck. Um die Wirkung des Teilchens $\mathfrak{X}$ auf das Teilchen $\mathfrak{Y}$ zu erhalten, müsste man diejenige Lagrange-Funktion nehmen, welche aus L durch Vertauschung von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ sowie der entsprechenden Grössen hervorgeht.

Die Doppelspurigkeit der Beschreibung wird offenbar verursacht durch die systematische Berücksichtigung der Retardierung. Die dadurch bewirkten Abweichungen von der klassischen Dynamik sind recht einschneidend. Zum Beispiel existiert kein Systemparameter mehr. Jedes Teilchen hat seine Eigenzeit. Ausserdem hat man während der Durchlaufung des Systems scharf auseinanderzuhalten die „Bewegung" etwa des Teilchens $\mathfrak{X}$ und die zugeordnete Variation des durch den Nullkegel der Vergangenheit von $\mathfrak{X}$ auf der Bahn von $\mathfrak{Y}$ ausgeschnittenen Quellpunktes.

Als wichtigste Konsequenz ergibt sich eine Unbestimmtheit in den Anfangsbedingungen, deren Natur man sich leicht klar

macht, wenn man nur „ebene" Bewegungen $x_2 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ in Betracht zieht. Auf beiden Bahnen kann je ein Stück, von denen mindestens eines eine endliche Länge hat, beliebig angenommen werden. Diese Unbestimmtheit wird umso grösser, je weiter die beiden Teilchen auseinanderliegen. Die damit angegebenen Abweichungen erhöhen die mathematischen Schwierigkeiten dieser Dynamik ganz wesentlich.

Nun sei noch eine letzte Konsequenz erwähnt, der wir im Folgenden eine spezielle Bedeutung beimessen werden. Die Auswertung von (7) führt auf die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{X}}^2 = \text{konst.} \tag{8}$$

Ihr zufolge muss die Ruhmasse immer durch einen konstanten Faktor zur Geltung gebracht werden. Analoges gilt für $\dot{\mathfrak{Y}}$ und der ganze Ansatz bietet keine Handhabe, Veränderungen der Ruhmasse darzustellen. Wir haben damit in veränderter Form wiederum dasselbe Argument gefunden, von dem wir in der Einleitung ausgegangen sind. Man kann nun die in der vorliegenden Untersuchung verfolgte Tendenz auch kurz so ausdrücken: Es wird versucht, Variationen der Ruhmasse durch Variationen des Betrages der Vierergeschwindigkeit darzustellen. Zu diesem Zwecke muss die im engeren Sinne geometrische Deutung der Weltlinien preisgegeben werden. Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sollen unabhängig sein und ihr Betrag ist als eine Belegungsdichte zu deuten.

Betrachten wir nun die Gleichung (7). Statt $\mathfrak{S}$ kann man immer setzen $\dot{\mathfrak{Y}}/|\dot{\mathfrak{Y}}|$. Um also die Normierung der Vierergeschwindigkeit aufzuheben, brauchen wir nur $|\dot{\mathfrak{Y}}|$ zu ersetzen durch die Lichtgeschwindigkeit c, womit auch die Dimension gewahrt bleibt. Die damit erhöhte Symmetrie legt weiter die Addition des dem Teilchen in $\mathfrak{Y}$ entsprechenden Massenterms nahe, und wir gelangen so zu der Lagrange-Funktion:

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathfrak{X}}^2 + \tfrac{1}{2} M \dot{\mathfrak{Y}}^2 + \frac{\bar{e}}{c} \varphi \dot{\mathfrak{X}} \dot{\mathfrak{Y}} . \tag{9}$$

Es ist nun wichtig, zu betonen, dass die durch (9) zum Ausdruck gebrachte Symmetrie die Verwendung eines retardierten Potentials verbietet. Um dies einzusehen, genügen die im Anschluss an (7) gegebenen Erläuterungen. Die frühere Eigenzeit τ geht jetzt über in einen nicht mehr an die einzelne Weltlinie gebundenen Systemparameter, und man ist gezwungen, φ als Funktion der

Distanz derjenigen Bahnpunkte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ aufzufassen, welche demselben Werte τ entsprechen. Darin liegt vorderhand ein Verzicht auf einen feldmässigen Ausbau des Ansatzes. Es ist wohl anzunehmen, dass eine weitere Modifikation von (9), die sowohl die angestrebte Variation der Vierergeschwindigkeit als auch die Retardierung zum Ausdruck bringt, möglich ist. Die oben angegebenen formalen Schwierigkeiten würden sich natürlich wieder geltend machen.

Schon eine erste Analyse des Ansatzes (9) zeigt, dass er tatsächlich eine Variation der Beträge der Viergeschwindigkeit nach sich zieht. Dadurch wird die Forderung nahegelegt, den primären Einsatz verschiedener Massen zu vermeiden und also die Entstehung verschiedener Gewichte dynamisch herzuleiten. In diesem Sinne schränken wir (9) durch die Gleichung $M = m$ weiter ein. Weiterhin empfiehlt es sich, (9) mit m zu multiplizieren und als neuen Systemparameter die Variable

$$s = \frac{\tau}{m} \tag{10}$$

einzuführen. Bezeichnet man die Ableitung nach s mit einem Strich, so gelangt man schliesslich zu folgender Lagrange-Funktion:

$$\boxed{L = \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}'^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Y}'^2 + \Phi\,\mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}'} \tag{11}$$

Unter m soll die Elektronenmasse verstanden sein und für Φ setzen wir

$$\Phi = -\frac{a}{R}, \tag{12}$$

wobei die Länge a so bestimmt werden soll, dass die beiden Teilchen in grosser Entfernung aufeinander eine Anziehung nach Coulomb ausüben.

In diesem Sinne soll uns also (11) ein Modell liefern für dasjenige neutrale Gebilde, welches aus einem Elektron und einem Positron besteht. Es wird also vorausgesetzt, dass diese Partikel während längerer Zeit existieren und miteinander reagieren können. Das Modell würde also hinfällig, falls beim Zusammentreffen zweier derartiger Partikel ausnahmslos eine Zerstrahlung stattfinden würde. Weitere Erläuterungen allgemeiner Natur insbesondere über die durch den Parameter s vermittelte Phasen-

zuordnung findet der Leser an anderer Stelle[2]). Das engere Ziel der vorliegenden Arbeit soll nun in der Ermittlung der stabilen Zustände des durch (11) definierten dynamischen Systems bestehen.

§ 2. Energie und Impuls.

Wegen der Homogenität der Lagrange-Funktion (11) gilt

$$H = L,$$

wo H die Hamilton-Funktion bedeutet. Das formale Analogon des Energiesatzes lautet demnach

$$L = \text{konst.}$$

Die Festsetzung der Konstanten ist gleichbedeutend mit der Normierung des Systemparameters s. Dieselbe soll so erfolgen, dass gilt

$$t' = u' = m\,,$$

sobald die beiden Teilchen in unendlicher Entfernung voneinander zur Ruhe gelangt sind. Die Gleichung $L = \text{konst.}$ nimmt damit folgende Gestalt an

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\mathfrak{X}'^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Y}'^2 + \Phi\,\mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}' = -m^2c^2} \tag{13}$$

Inhaltlich entspricht sie offenbar der üblichen Normierung

$$\dot{\mathfrak{X}}^2 = -c^2\,.$$

Das formale Analogon des Impulssatzes erhalten wir durch Addition der Lagrange'schen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{X}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{X}} &= 0\,, \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{Y}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{Y}} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Denn zufolge (11), (12) und (6) gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{X}} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{Y}} = 0$$

und es folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{X}'} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{Y}'} = \text{konst.} = \mathfrak{C}\,.$$

---

[2]) l. c. 1) S. 223.

Die rechte Seite ist ein zeitartiger Vektor von der Dimension mc. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{A}$ einen zeitartigen Einheitsvektor, so kommen wir schliesslich auf die Impulsgleichung

$$\boxed{(1 + \Phi)\,(\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}') = 2\,w m c\,\mathfrak{A}} \tag{15}$$

in der w eine reine Zahl bedeutet. Für die von uns beabsichtigte Feststellung der stabilen Zustände ist eine vollständige, auch asymmetrische Anfangsbedingungen berücksichtigende Lösung nicht notwendig. Wir erhalten alles Notwendige, wenn wir uns auf die Symmetrie

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= (\mathfrak{x}\,,\ c\,t\sqrt{-1}) \\ \mathfrak{Y} &= (-\mathfrak{x}\,,\ c\,t\sqrt{-1}) \end{aligned} \tag{16}$$

beschränken, welche durch Transformation auf das durch den Vektor $\mathfrak{A}$ festgelegte Ruhsystem nahegelegt wird.

Von (15) bleibt nur noch die vierte, die Energiekomponente. An Stelle von (13) und (15) treten die beiden skalaren Gleichungen

$$L = (1 - \Phi)\,\mathfrak{x}'^2 - (1 + \Phi)\,c^2\,t'^2 = -m^2c^2\,, \tag{17a}$$

$$(1 + \Phi)\,t' = w\,m\,. \tag{17b}$$

Diese beiden Gleichungen können wir in der üblichen Weise in eine zusammenziehen, in welcher t die unabhängige Variable darstellt. Bezeichnen wir die Ableitung nach t mit einem Punkt und setzen wir noch $\dot{\mathfrak{x}}^2 = v^2$, so folgt wegen (12)

$$\boxed{w = \sqrt{\frac{1 - \frac{a}{R}}{1 - \frac{1 + \frac{a}{R}}{1 - \frac{a}{R}} \cdot \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{18}$$

Entwickelt man diese Gleichung für grosse R und kleine v und multipliziert sie hierauf mit $2\,mc^2$, so folgt in erster Näherung

$$2\,(w - 1)\,mc^2 = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2a}{R}\,. \tag{19}$$

Diese Gleichung stellt den klassischen Energiesatz für zwei Teilchen von der Masse m dar, welche sich nach dem Coulomb'schen Gesetz anziehen, falls man setzt

$$a = \frac{e^2}{mc^2} \tag{20}$$

Wie man leicht aus (14) und (16) entnimmt, spielt t' tatsächlich die Rolle der Masse. Sie berechnet sich aus (17a) und wegen (12) zu

$$\boxed{t' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{a}{R} - \left(1 + \frac{a}{R}\right)\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (18) und (21) folgt, dass die beiden Teilchen — auch bei einem Zentralstoss — die Distanz a nie unterschreiten können. In dem Moment, wo die Minimaldistanz erreicht wird, ist $v = 0$ und $t' = \infty$. Wir werden später sehen, dass der Mittelwert von t' während der ganzen Bewegung endlich bleibt.

Für $R = \infty$ geht (21) über in die bekannte Massenformel der speziellen Relativitätstheorie. Sie vereinigt also in sich das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit mit einem Verbot der Distanzen kleiner als a.

§ 3. Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung.

Wir gehen aus von (17a)

$$L = (1 - \Phi)\,\mathfrak{x}'^2 - (1 + \Phi)\,c^2 t'^2 = -m^2 c^2 \tag{17a}$$

und führen ebene Polarkoordinaten für den Vektor $\mathfrak{x}$ ein:

$$\left.\begin{aligned} r &= |\,\mathfrak{x}\,| = \tfrac{1}{2} R \\ \mathfrak{x}'^2 &= r'^2 + r^2 \varphi'^2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Es folgt

$$L = (1 - \Phi)\,(r'^2 + r^2 \varphi'^2) - (1 + \Phi)\,c^2 t'^2 = -m^2 c^2 \tag{23}$$

Die partiellen Ableitungen der zu L gehörigen Wirkungsfunktion S ergeben sich in der bekannten Weise aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r} &= \frac{\partial L}{\partial r'} = 2\,(1 - \Phi)\,r' \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = 2\,(1 - \Phi)\,r^2 \varphi' \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial t'} = -2\,(1 + \Phi)\,c^2 t' \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Wie schon zu Beginn des vorigen Paragraphen bemerkt wurde,

stimmt die Hamiltonfunktion mit der Lagrange-Funktion überein. Um also die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung zu erhalten, brauchen wir nur vermittels (24) die Grössen r', φ', t' durch die Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial r}, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial S}{\partial t}$$

auszudrücken und in (23) einzusetzen. Man bekommt

$$\boxed{H = \frac{1}{4(1-\Phi)}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} - \frac{1}{4(1+\Phi)c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = -m^2c^2} \tag{25}$$

Unser System ist also vollständig separierbar und periodisch. Die Separation ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -2\,mc^2 w \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= J \\ \frac{\partial S}{\partial r} &= 2\,mc\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2r}\right)\left(\frac{w^2}{1-\frac{a}{2r}} - 1\right) - \frac{J^2}{4\,m^2c^2r^2}} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Konstante in der ersten dieser drei Gleichungen folgt aus der dritten Gleichung von (24) in Verbindung mit (17b). Die ausschlaggebende Abweichung von der üblichen Behandlung des Zweikörperproblems beruht natürlich auf der dritten Gleichung von (26). Damit die Wurzel reell ausfällt, muss gelten

$$w^2 \geq \frac{2r-a}{2r}\left[1 + \frac{J^2}{2\,m^2c^2r\,(a+2r)}\right] \geq 0 \tag{27}$$

Es empfiehlt sich, die Diskussion dieser Ungleichung für fest vorgegebenen Drehimpuls J in einer (r, w) — Ebene vorzunehmen. Es genügt, wenn man sich auf den Quadranten $2r \geq a$, $w \geq 0$ beschränkt. In diesem Gebiet betrachten wir die durch die Gleichung

$$w = \sqrt{\frac{2r-a}{2r}\left[1 + \frac{J^2}{2\,m^2c^2r\,(a+2r)}\right]} \tag{28}$$

definierte Kurve Γ und führen eine rationelle Längeneinheit ein;

$$\left.\begin{aligned} 2\,r &= a\varrho \\ \frac{J}{mca} &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Es folgt

$$w = \sqrt{\frac{\varrho - 1}{\varrho}\left[1 + \frac{\beta^2}{\varrho\,(\varrho + 1}\right]} \tag{30}$$

Wenn man für J die Grössenordnung des von der Quantentheorie geforderten Drehimpulses annimmt, erhält β die Grössenordnung der reziproken Feinstrukturkonstante. Bei der Diskussion von (30) kann man also β^2 als grosse Zahl ansehen. Dann ergeben sich für die Kurve Γ näherungsweise folgende Hauptpunkte:

$$\left.\begin{aligned} &\text{A:}\quad \varrho = 1;\ w = 0 \\ &\text{B:}\quad \varrho \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ w \sim \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\,\beta \ \text{(Maximum)} \\ &\text{C:}\quad \varrho \sim 2\,(\beta^2 - 1);\ w \sim 1 - \frac{1}{8\beta^2} \ \text{(Minimum)} \\ &\text{D:}\quad \varrho = \infty;\ w = 1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die Kurve Γ steigt also von der Ausgangsstelle A sehr rasch auf einen beträchtlichen Maximalwert, senkt sich dann allmählich in eine flache Mulde, um den weit entfernten Punkt C herum, um schliesslich im Unendlichen asymptotisch von unten gegen die Ordinate 1 zu streben. Für Punkte, die einigermassen rechts vom Maximum liegen, deckt sich der Verlauf mit dem der klassischen Dynamik.

Die charakteristische Abweichung liegt im Stück A B. Sie hängt offenbar mit dem Verbot der Distanzen $R < a$ zusammen. Die realisierbaren Zustände liegen nach (27) oberhalb der Kurve Γ. Wir ersehen also, dass in genügender Nähe der Minimaldistanz Energien von ganz kleinen bis zu beliebig grossen Beträgen auftreten können. Über die dynamisch stabilen Zustände können wir speziell folgendes feststellen: Neben dem der klassischen Dynamik entsprechenden Stabilitätsintervall der flachen Mulde finden wir ein zweites von der Grössenordnung der Minimaldistanz a, in welchem grosse Energiewerte realisiert werden können.

Angesichts der sich hier als *Folgerung* ergebenden Minimaldistanz a mag darauf hingewiesen werden, dass in neuerer Zeit verschiedene Autoren[3]) aus *prinzipiellen Gründen* die Existenz einer kleinsten Länge fordern. Bei unserem Modell ausschlaggebend ist vor allem der Umstand, dass für $R = a$ die quadratische Form (12) ausartet. Dieser Effekt ist weitgehend unabhängig von der speziellen Potentialfunktion Φ.

§ 4. Quantisierung.

Da unser System periodisch ist, besteht die Möglichkeit, die provisorischen Quantenregeln

$$\left.\begin{aligned} \oint \frac{\partial S}{\partial \varphi}\, d\varphi &= kh \\ \oint \frac{\partial S}{\partial r}\, dr &= nh \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

zur Anwendung zu bringen. Der Kreis auf dem Integralzeichen soll die Erstreckung des Integrals über eine volle Periode bedeuten. Unter Beachtung von (29) erhalten wir aus (26)

$$J = \frac{kh}{2\pi} \tag{33}$$

$$\oint \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{w^2}{1 - \frac{1}{\varrho}} - 1\right) - \frac{k^2 h^2}{4\pi^2 m^2 c^2 a^2 \varrho^2}}\, d\varrho = \frac{nh}{mca} \tag{34}$$

Nun ist wegen (20)

$$\frac{2\pi mca}{h} = \frac{2\pi e^2}{hc} = \alpha, \tag{35}$$

wo α die Feinstrukturkonstante darstellt. Setzen wir also zur Abkürzung

$$K = \frac{k}{\alpha w}, \tag{36}$$

so geht (34) nach einer leichten Umformung über in

$$\frac{1}{2\pi K} \oint \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\varrho}} - \frac{1}{w^2}\right) - \frac{K^2}{\varrho^2}}\, d\varrho = \frac{n}{k}. \tag{37}$$

[3]) Vergleiche etwa A. March, Naturwissenschaften 26, S. 649 (1938), woselbst weitere Literatur angegeben ist.

Die Diskussion am Schlusse des vorigen Paragraphen hat gezeigt, dass zwei wesentlich verschiedene Stabilitätsintervalle in Betracht kommen:

1. Für alle Werte von w zwischen Null und dem Maximum ein sehr kleines Intervall von der Grössenordnung des „Elektronenradius" a.
2. Für Werte w wenig unterhalb 1 das Intervall der flachen Mulde, das wie man leicht feststellt, die Grössenordnung des Bohr'schen Atomradius besitzt.

Im zweiten Falle erhält man ein Termsystem, das demjenigen des Wasserstoffs eng verwandt ist, in der absoluten Grösse aber um einen endlichen Faktor von ihm abweicht. Es müsste also einem hypothetischen neutralen Gebilde von der Totalmasse 2 m zugeordnet werden. Ich kann mir kein Urteil erlauben darüber, ob seine Existenz mit Sicherheit ausgeschlossen werden kann.

Das Charakteristische des vorgeschlagenen Modells ergibt die Behandlung des kleinen Stabilitätsintervalls. Wir fragen nach denjenigen Zuständen, wo w dem in (31) angegebenen Maximum möglichst nahe kommt. Aus (29), (31), (33) und (36) entnimmt man, dass in diesem Falle $\frac{1}{w^2}$ im Integral (37) im Vergleich zu den übrigen Grössen vernachlässigt werden darf. Wir vereinfachen also unsere Aufgabe, wenn wir nach denjenigen Werten von w — respektive K — fragen, welche für vorgegebene k und n die Relation

$$\frac{1}{2\pi K} \oint \sqrt{\frac{\varrho+1}{\varrho-1} - \frac{K^2}{\varrho^2}}\, d\varrho = \frac{n}{k} \tag{38}$$

erfüllen. Wir nehmen noch die Verschiebung

$$\varrho = 1 + \tau \tag{39}$$

vor und erhalten statt (38)

$$\frac{1}{2\pi K} \oint \sqrt{\frac{2+\tau}{\tau} - \frac{K^2}{(1+\tau)^2}}\, d\tau = \frac{n}{k}. \tag{40}$$

Das für die Integration massgebende Intervall wird links begrenzt durch den Punkt $\tau = 0$, rechts durch die kleinste positive Nullstelle des Radikanden $\tau = \Theta$. Das linke Ende ist also eine Unendlichkeitsstelle. Sie ist zugänglich, insofern in ihr die Energie endlich bleibt.

Lässt man nun w monoton von 0 nach ∞ wachsen, so durchläuft gemäss (36) K alle Werte von ∞ bis 0 und gleichzeitig wächst Θ von 0 an so lange monoton, bis es in der Doppelwurzel Θ_0 des Radikanden mit der zweiten positiven Nullstelle zusammentrifft. Dem Werte Θ_0 entspricht also ein Wert K_0 derart, dass für jedes $K \geq K_0$ ein Intervall vorhanden ist, für $K < K_0$ aber nicht. Mit w_0 sei noch das zu K_0 gehörige w bezeichnet. Die Werte Θ_0, K_0, w_0 berechnen sich zu

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 0{,}618 \\ K_0 &= \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} \sim 3{,}315 \\ w_0 &= \frac{k}{\alpha K_0} \sim 41{,}3\ k \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Wenn wir nun K von ∞ bis K_0 laufen lassen, erhalten wir den ganzen Wertevorrat, der durch die linke Seite von (40) dargestellt werden kann. Man sieht aber leicht ein, dass während der Variation von K diese linke Seite monoton wächst bis zu einem Maximalwert

$$C = \frac{1}{\pi K_0} \int_0^{\Theta_0} \sqrt{\frac{2+\tau}{\tau} - \frac{K_0^2}{(1+\tau)^2}}\, d\tau\,. \tag{42}$$

Für den Faktor vor dem Integral (40) ist das monotone Wachstum evident. Im Integral selbst aber wächst sowohl das Intervall als auch der Integrand. Für die Auswertung des Integrals (42) — das wegen der Doppelwurzel des Integranden elementar ist — empfiehlt sich die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \frac{4+2\,\Theta_0+\tau}{\tau} &= z^2 \\ \frac{4+3\,\Theta_0}{\Theta_0} &= \zeta^2. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Unter Beachtung von

$$\frac{(2+\Theta_0)\,(1+\Theta_0)^2}{\Theta_0} = K_0^2 \tag{44}$$

ergibt die Berechnung

$$C = \frac{4\sqrt{2}}{\pi(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta^2-3}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\zeta^2+1)\sqrt{3\zeta^2-1}}{4\sqrt{\zeta^2-1}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3\zeta^2-1}}{\zeta\sqrt{\zeta^2-3}}\right) \\ -\dfrac{(\sqrt{\zeta^2-3})^3}{4\sqrt{\zeta^2-1}} \operatorname{Lg}\left(\dfrac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) \\ -\dfrac{\zeta\sqrt{\zeta^2-3}}{\sqrt{\zeta^2-1}} \end{array} \right\} \tag{45}$$

Die numerische Auswertung liefert

$$C = 0{,}12899\ldots \tag{46}$$

Damit nun die Gleichung (40) eine Lösung hat, muss nach dem Vorausgegangenen die rechte Seite offenbar kleiner sein als dieses Maximum. Es folgt also

$$k > \frac{1}{C}\, n \tag{47}$$

Da nun C wenig grösser als $1/8$ ist, kann man näherungsweise setzen

$$k \geq 8\, n. \tag{47'}$$

Die letzte Bedingung deckt sich für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ noch genau mit (47). Die Tatsache, dass zu einem vorgegebenen n eine stabile Lösung nur möglich ist, wenn sich ihm ein gemäss (47) grösseres k beigesellt, bildet natürlich den eigentlichen Grund dafür, dass in kleinen Dimensionen viel höhere Energien konzentriert werden, als man nach der Formel (41) für den Maximalwert w_0 erwarten würde.

Um nun die Aufgabe der wirklichen Bestimmung von w respektive K aus der Gleichung (40) bei vorgegebenen n und k zu diskutieren, müssen die Grenzen 0 und Θ sichtbar gemacht werden. Θ ist — wie schon oben erwähnt wurde — die kleinste positive Nullstelle des Radikanden, und es gilt

$$K^2 = \frac{(1+\Theta)^2(2+\Theta)}{\Theta} \tag{48}$$

An Stelle von (40) erhalten wir

$$\frac{1}{\pi(1+\Theta)\sqrt{2+\Theta}} \int_0^{\Theta} \frac{\sqrt{\tau(\Theta-\tau)[2-(4\Theta+\Theta^2)\tau-\Theta\tau^2]}}{\tau(1+\tau)}\, d\tau = \frac{n}{k} \tag{49}$$

also im wesentlichen ein elliptisches Integral, dessen Nullstellen wir steigend geordnet bezeichnen mit

$$\Theta_2,\ 0,\ \Theta,\ \Theta_1.$$

Führen wir dieselben durch eine lineare Transformation*) über in die Nullstellen

$$-\frac{1}{\lambda},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{\lambda},$$

so ergibt sich für den Modul λ der Wert

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 - 4\,\Theta^2 - \Theta^3 - 4\sqrt{1 - 2\,\Theta^2 - \Theta^3}}{2 - 4\,\Theta^2 - \Theta^3 + 4\sqrt{1 - 2\,\Theta^2 - \Theta^3}}}. \tag{50}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

I. Θ liegt in der Nähe der Doppelwurzel Θ_0. Für die letztere gilt

$$1 - 2\,\Theta_0^2 - \Theta_0^3 = (1 + \Theta_0)\,(1 - \Theta_0 - \Theta_0^2) = 0.$$

Also ist der Modul nahe bei 1 und für das Integral in (49) ist eine Entwicklung

$$\int_0^{\Theta} \frac{\sqrt{}}{\tau\,(1+\tau)}\,d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} [A_i \operatorname{Lg}(\Theta_0 - \Theta) + \mathrm{B}_i]\,(\Theta_0 - \Theta)^i \tag{51}$$

zu erwarten. Dabei muss natürlich sein

$$A_0 = 0;\ B_0 = C\,,$$

wo C durch (42) bzw. (45) und (46) gegeben ist. Die umfangreiche Entwicklung des Integrals in (49) nach Normalintegralen und Reihen ergibt weiter

$$A_1 = 0;\ B_1 = 0,$$

wie es dem Charakter des Maximums entspricht, und schliesslich $A_2 < 0$ sowie vermutlich $B_2 > 0$. Ergäbe eine exakte Berechnung von B_2 wider Erwarten ein negatives Vorzeichen, so würde sich das nur günstig auswirken, insofern der in § 5 berechnete Massenmittelwert in Richtung auf den empirischen Massenwert verschoben würde.

*) Es empfiehlt sich, dieselbe in der Gestalt

$$\tau = \Theta\,\frac{1 + z}{\alpha_1 + \alpha_2\,z}\,;\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

anzusetzen.

Eine Abschätzung von A_2 ergibt, dass die Differenz $\Theta_0 - \Theta$ schon recht klein sein muss, bis die zweite Näherung ausreichend wird. Für die günstigsten Fälle (aber kleine n)

$$k = 8\,n, \tag{52}$$

wo also der Abstand vom Maximum

$$C - \frac{n}{k} = C - \frac{1}{8} = 0{,}0039 \tag{52'}$$

klein genug zu sein scheint, ergab eine direkte Approximation, dass Θ zwischen 0,51 und 0,52 liegt, was nach (41)

$$\Theta_0 - \Theta \sim 0{,}103 \tag{53}$$

ergibt. Für diese Distanz ist aber die zweite Näherung nicht mehr brauchbar. Zu diesem Θ ergibt sich nach (48), (36) und (52)

$$w \sim 327\,n,$$

was im Sinne von (26) auf die Totalenergien

$$2\,mc^2 w \sim 654\,n \cdot mc^2 \tag{54}$$

führt. Die der Folge (52) entsprechenden Energien schreiten also nach ganzzahligen Vielfachen eines Grundwertes fort.

II. Θ sei klein. Dann wird nach (48) K gross. Beschränken wir uns auf Glieder erster Ordnung in τ, so folgt statt (40)

$$\frac{1}{2\pi K} \oint \sqrt{\frac{2-(K^2-5)\,\tau}{\tau}}\,\frac{d\tau}{1+\tau} = \frac{n}{k} \tag{55}$$

Die Berechnung ist elementar und liefert

$$\sqrt{1-\frac{3}{K^2}} - \sqrt{1-\frac{5}{K^2}} = \frac{n}{k}.$$

Entsprechend der vorgenommenen Näherung begnügen wir uns mit den beiden ersten Gliedern der binomischen Reihen und erhalten

$$\frac{1}{K^2} = \frac{n}{k}$$

also nach (36)

$$w = \frac{\sqrt{kn}}{\alpha}$$

und somit für die Totalenergie

$$\boxed{2\,wmc^2 = \frac{2\sqrt{kn}}{\alpha}\,mc^2} \tag{56}$$

Wenn man diese Termformel auf die unter I behandelten Grenzfälle anwendet, ergibt sich ein Fehler, den man leicht feststellt, indem man (52) in (56) einsetzt. Es folgt

$$2\,wmc^2 \sim 776\,n \cdot mc^2. \tag{57}$$

Der Vergleich mit (54) zeigt, dass bei durchgehendem Gebrauch von (56) im schlimmsten Fall ein Fehler von 19% resultiert. Natürlich immer unter der Voraussetzung, dass man $\frac{1}{w^2}$ in (37) vernachlässigen darf.

Die Betrachtung der Termformel (56) führt neben der positiven Feststellung, dass das Modell die Realisierung grosser Energien erlaubt, zu der wichtigen Frage, ob mit der aus (56) folgenden Möglichkeit beliebig grosser Energien der Bogen nicht überspannt worden sei. Solange keine schweren Neutronen gefunden worden sind, wird sich das Modell kaum in die Wirklichkeit einordnen lassen.

§ 5. Ein Massenmittelwert.

In § 2 wurde darauf hingewiesen, dass der Masse des einzelnen Teilchens die Grösse t' entspricht. Sie verändert sich beständig und wird für unser spezielles Zweikörperproblem dargestellt durch die Formel (21). Für das grosse Intervall der flachen Mulde (Totalenergie wenig unterhalb $2\,mc^2$) hat die relative Abweichung von m die Grössenordnung von α^2, also einen kleinen Wert.

Ganz anders liegen die Verhältnisse im kleinen Intervall. Um das Numerische zu übersehen genügt es, mit Hilfe von (18) die Geschwindigkeit v aus (21) zu eliminieren. Es folgt für die Totalmasse

$$2\,t' = \frac{2\,mw}{1-\frac{a}{R}} = 2\,\frac{1+\tau}{\tau}\,mw. \tag{58}$$

Beschränken wir uns auf die tiefsten Quantenzahlen $n = 1$, $k = 8$,

so folgt auf Grund von (53), (41) und (54) für $\tau = \Theta$ als Massenwert $2\,t' \sim 1920\,m$. Für $\tau = 0$ aber ist $2\,t' = \infty$. Man ist also gezwungen, einen Mittelwert zu verwenden. Als naheliegendste Bildung ist wohl der Ausdruck

$$\overline{m} = 2\,\frac{\oint t'\,ds}{\oint ds} \tag{59}$$

anzusehen. Führen wir r als unabhängige Variable ein, so folgt

$$\overline{m} = 2\,\frac{\oint \frac{t'}{r'}\,dr}{\oint \frac{1}{r'}\,dr}\,.$$

Vermittelst (24), (26), (29), (39) und (48) ergibt sich schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \overline{m} &= 2 \cdot \frac{\int\limits_0^{\Theta} \frac{(1+\tau)\,(2+\tau)}{\sqrt{Q}}\,d\tau}{\int\limits_0^{\Theta} \frac{\tau\,(2+\tau)}{\sqrt{Q}}\,d\tau} \\ Q &= \tau\,(\Theta - \tau)\,[2 - (4\,\Theta + \Theta^2)\,\tau - \Theta\tau^2] \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Da Θ nach (53) nicht genügend nahe bei Θ_0 liegt, ergeben sich für die Berechnung dieselben Schwierigkeiten, welche in § 4 im Anschluss an (51) geschildert worden sind. Eine direkte ziemlich rohe Approximation liefert

$$\overline{m} \sim 2700\,m. \tag{61}$$

Der gefundene Wert liegt also etwa 50% über dem empirisch bestimmten Gewicht der schweren Elementarteilchen.

Wie empfindlich der Wert auf die Differenz $\Theta_0 - \Theta$ reagiert, mag folgende Berechnung dartun. Hätte man für den dem Maximum am nächsten gelegenen Wert $\frac{n}{k} = \frac{1}{8}$ im Vertrauen auf die Kleinheit von (52′) die nullte Näherung, also w_0 aus (41) mit $k = 8$ und $\Theta \sim \Theta_0$, verwendet, so ergäbe sich aus (60) ein Mittelwert

$$\overline{m}_0 \sim 1730\,m. \tag{61'}$$

Ob der gefundene Maximalmittelwert (61) auch als Trägheitswiderstand gegenüber einer äussern Kraft in Betracht kommt,

bleibt natürlich noch ungewiss. Vorderhand handelt es sich um eine interne Angelegenheit unseres Systems:

Definiert man die Masse durch (59), so verhält sich die Masse des Zustandes $n = 1$, $k = 8$, $w = 327$ zu derjenigen der Zustände $w \sim 1$ wie

$$2700 : 2.$$

Was die Überhöhung des gefundenen Wertes gegenüber dem beobachteten betrifft, so mag daran erinnert werden, dass die punktdynamische Berechnung des Heliumgrundterms eine Überhöhung von ca. 15% ergab, welche durch den Übergang zur Wellenmechanik beinahe restlos aufgehoben werden konnte. Es erhebt sich also die Frage, ob in unserem Falle die Überhöhung der Masse um 50% durch eine passende Wellengleichung kompensiert werden kann. Ob in dieser Richtung eine Verbesserung oder eine Verschlechterung zu erwarten ist, weiss ich nicht. Ich muss mich damit begnügen, im nächsten Paragraphen die meines Erachtens naheliegendste Wellengleichung mitzuteilen.

§ 6. Eine Wellengleichung.

Da die linke Seite der formal dem klassischen Energiesatz entsprechenden Gleichung (13) aus § 2

$$L \equiv \tfrac{1}{2}\mathfrak{X}'^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Y}'^2 + \Phi\,\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}' = -m^2c^2 \tag{13}$$

eine quadratische Form aller Geschwindigkeitskomponenten darstellt, liegt es nahe, von der Metrik

$$2\,m^2c^2ds^2 = -(d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + 2\,\Phi\,d\mathfrak{X}d\mathfrak{Y}) \tag{62}$$

Gebrauch zu machen.

Um die geläufigen Formeln der Tensoranalysis verwenden zu können, setzen wir allgemein

$$L \equiv \tfrac{1}{2}\,g_{ik}\,x_i'\,x_k' = -m^2c^2 \tag{63}$$

und formen L gemäss

$$\frac{\partial L}{\partial x_i'} = \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{K}{\psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

um zu

$$L = \frac{K^2}{2\,\psi^2}\,g^{ik}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = H\,.$$

An Stelle von (63) erhalten wir so

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{2 m^2 c^2}{K^2} \psi^2 = 0 . \tag{64}$$

Die einfachste invariante Möglichkeit, aus (64) eine Wellengleichung zweiter Ordnung zu erhalten, besteht offenbar darin, den daselbst auftretenden Differentialausdruck erster Ordnung durch den der Metrik entsprechenden Differentialausdruck zweiter Ordnung zu ersetzen. Mit

$$K = \frac{h}{2\pi \sqrt{-1}}$$

erhält man so aus (64)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right\} - \frac{8 \pi^2 m^2 c^2}{h^2} \psi = 0$$

Die Anwendung auf (13) ergibt schliesslich im Sinne der in § 1 eingeführten Symbolik

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \mathfrak{X}} \left[(1 - \Phi^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{X}} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{Y}} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{Y}} \left[(1 - \Phi^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{Y}} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{X}} \right) \right] = \frac{8 \pi^2 m^2 c^2}{h^2} (1 - \Phi^2)^2 \psi \end{aligned}} \tag{65}$$

Schlussbemerkungen.

Um noch einmal die charakteristische Abweichung des hier diskutierten Ansatzes gegenüber der relativistischen Lagrange-Funktion (7) hervorzuheben, schreiben wir (7) vermittelst $\mathfrak{S} = \dot{\mathfrak{Y}}/|\dot{\mathfrak{Y}}|$ in der Form

$$L = \tfrac{1}{2} m \mathfrak{X}^2 + \frac{\bar{e} \psi}{c\, |\dot{\mathfrak{Y}}|} \dot{\mathfrak{Y}} \dot{\mathfrak{X}} \tag{7'}$$

und stellen dieser Definition die Gleichung (9) für $M = m$ gegenüber:

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\mathfrak{X}}^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{\mathfrak{Y}}^2 + \frac{\bar{e} \varphi}{c^2} \dot{\mathfrak{X}} \dot{\mathfrak{Y}} . \tag{9'}$$

Die ausschlaggebende formale Abweichung liegt also vor allem in der Einschiebung des dem zweiten Teilchen entsprechenden quadratischen Gliedes. Dadurch, dass man auf diese Weise für zwei (oder auch mehr) Teilchen eine einzige Lagrange-Funktion herstellt, wird erst die ganze Technik der Hamilton'schen Dynamik verwertbar. Dabei ergibt sich also die Möglichkeit einer Quantisierung von Ruhmassen und dies zu zeigen war der Hauptzweck der vorliegenden Untersuchung. Auf das Detail des hier gewählten speziellen Ansatzes kann schon darum weniger Gewicht gelegt werden, weil eine grosse Serie ähnlicher Ansätze ähnliche Effekte zeitigen müssen.

Wenn man diese Wendung vermeiden will, ist man eben gezwungen, soviele Gleichungen (7') zu verwenden, als Teilchen vorhanden sind. Es ist sehr wohl möglich, dass dieses Verfahren korrekter ist und es ist wohl eine Frage von prinzipiellem Interesse, ob nicht auch schon in diesem Falle Masseneffekte vorhanden sind, von denen unsere Gleichung (21) vielleicht ein vergröbertes und verzerrtes Abbild liefert.

Bern, mathemat. Seminar der Universität.