Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 15 (1942)

Heft: V

Artikel: Théorie de l'influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux

Autor: Weigle, Jean / Bleuler, Konrad

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111313

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie de l'influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux

par **Jean Weigle** et **Konrad Bleuler.**

(16. V. 1942.)

1. Introduction.

Nous avons montré dans un article précédent[1]) comment le réseau de Fourier d'un cristal était perturbé par la présence d'ondes déplaçant les atomes. Nous avions restreint nos considérations à des ondes de très faibles amplitudes avec le but d'appliquer nos résultats aux ondes thermiques. Celles-ci, en effet, ont des amplitudes extrêmement petites à la température ordinaire; on calcule sans peine que des ondes d'une longueur d'onde aussi grande que 1 cm. donnent des amplitudes, dans un cristal comme NaCl, de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm., c'est-à-dire 10^{-5} fois plus petites que la distance séparant les atomes. Cependant il est possible de produire artificiellement, par exemple par des oscillations piezoélectriques, des ondes dont l'amplitude est beaucoup plus grande que la distance entre les atomes. Il devient alors intéressant de calculer comment la diffraction des rayons X est affectée par des oscillations. En plus, dans la théorie de l'effet thermique, on trouve qu'il est nécessaire, à cause du grand nombre des ondes présentes dans le cristal, de tenir compte de termes d'ordre supérieur dans l'approximation des petites amplitudes. La théorie que nous donnons ici servira donc à ces deux buts. Au lieu de suivre exactement la méthode employée dans l'article précédent, nous procéderons d'une façon un peu plus générale. Dans les fonctions de densité du cristal dont nous désirons obtenir l'image dans l'espace de Fourier (les transformées de Fourier), nous avions cherché à mettre en évidence une partie périodique que nous avions alors exprimée en série de Fourier. Dans le procédé que nous employons ici, nous ne faisons aucune supposition quant à la periodicité des fonctions périodiques modulées; c'est l'analyse de Fourier qui se charge elle-même de montrer si la fonction est périodique ou partiellement périodique. Le procédé consiste à prendre l'intégrale de Fourier de la fonction à analyser. Si elle est purement pério-

[1]) Weigle, Helv. Phys. Acta **15**, 162, 1942.

dique, l'intégrale dégénère en une série de Fourier, si elle est périodique et modulée elle devient une série qui permet de trouver la structure du réseau de Fourier. Nous nous servirons constamment d'un théorème simple sur ces transformations, que nous démontrons dans l'appendice et qui s'exprime ainsi:

$$\iiint\limits_{\infty} \sum_{\substack{l_1=-N_1 \\ \lim N_i \to \infty}}^{+N_1} \sum_{l_2=-N_2}^{+N_2} \sum_{l_3=-N_3}^{+N_3} e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}(l_1 \boldsymbol{a}_1 + l_2 \boldsymbol{a}_2 + l_3 \boldsymbol{a}_3))} f(\boldsymbol{b})\, dv_b$$

$$= v_b \sum_{h_1} \sum_{h_2} \sum_{h_3} f(h_1 \boldsymbol{b}_1 + h_2 \boldsymbol{b}_2 + h_3 \boldsymbol{b}_3) \qquad (1)$$

les vecteurs $\boldsymbol{b}_i$ étant réciproques des $\boldsymbol{a}_i((\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_j) = \delta_{ij})$ et les h_i étant des nombres entiers. Les sommes sur les h_i s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Ondes de grandes amplitudes dans un cristal.

Le cristal est construit sur la maille a_1, a_2, a_3 à l'intérieur de laquelle se trouvent différents atomes m dont la position est donnée par

$$\varrho_m = \alpha_{1m} \boldsymbol{a}_1 + \alpha_{2m} \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{3m} \boldsymbol{a}_3$$

$(m = 1, 2 \cdots p$; p, nombre d'atomes dans la maille)

La position de l'atome m de la maille l est alors donnée par

$$\boldsymbol{a}_{m,l} = (l_1 + \alpha_{1m}) \boldsymbol{a}_1 + (l_2 + \alpha_{2m}) \boldsymbol{a}_2 + (l_3 + \alpha_{3m}) \boldsymbol{a}_3$$

La densité $f_m(a)$ d'un atome est supposée pouvoir être exprimée en intégrale de Fourier

$$f_m(\boldsymbol{a}) = \int\limits_{\infty} \varphi_m(\boldsymbol{b})\, e^{2\pi i (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})}\, dv_b \qquad \varphi_m(\boldsymbol{b}) = \int\limits_{\infty} f_m(\boldsymbol{a})\, e^{-2\pi \ \boldsymbol{b}\boldsymbol{a})}\, dv_a$$

avec

$$dv_a = (\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3])\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = v_a\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

et l'on a

$$v_a \cdot v_b = 1$$

La densité dans le cristal est alors

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_l \sum_m f_m(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{m,l})$$

Si, maintenant, les atomes sont déplacés de leurs positions $a_{m,l}$ par une onde[1]) plane généralisée

$$\xi_{m,l} = \xi_m \sin 2\pi((\boldsymbol{k}\, \boldsymbol{a}_{m,l}) - \nu t)$$

la densité $F(\boldsymbol{a})$ qui était périodique, est alors modulée en phase

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_m \sum_l f_m(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{m,l} - \xi_{m,l})$$

[1]) Voir par ex. Seitz, Modern theory of solids p. 128.

Ecrivons les intégrales de Fourier

$$F(\boldsymbol{a}) = \int_{\infty} \Phi(\boldsymbol{b})\, e^{2\pi i (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})}\, dv_b \quad \text{et} \quad \Phi(\boldsymbol{b}) = \int_{\infty} F(\boldsymbol{a})\, e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a})}\, dv_a$$

On a

$$\Phi(\boldsymbol{b}) = \int_{\infty} \sum_l \sum_m f_m(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{m,l} - \xi_{m,l})\, e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a})}\, dv_a$$

Posons

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{m,l} - \boldsymbol{\xi}_{m,l} = \boldsymbol{a}'$$

Ainsi

$$\Phi(\boldsymbol{b}) = \sum_m \int_{\infty} \sum_l [f_m(\boldsymbol{a}')\, e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))}]\, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}'}\, dv_a$$

et donc

$$\Phi(\boldsymbol{b}) = \sum_l \sum_m e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}_{m,l} + \xi_{m,l})} \int_{\infty} f_m(\boldsymbol{a}')\, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}'}\, dv_a$$

$$= \sum_l \sum_m \varphi_m(\boldsymbol{b})\, e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))}$$

finalement

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_m \int_{\infty} \sum_l e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))}\, \varphi_m(\boldsymbol{b})\, e^{2\pi i (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a})}\, dv_b$$

Mais on a

$$e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}\,\xi_m) \sin 2\pi (\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{ml} - \nu t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\,(2\pi\, \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{\xi}_m)\, e^{-2\pi i n (\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{ml} - \nu t)}$$

J_n étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. Il vient alors

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_n \sum_m \int_{\infty} \sum_l J_n\,(2\pi\, \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{\xi}_m)\, e^{-2\pi i [(\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{a}_{ml} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}]}\, \varphi_m(\boldsymbol{b})\, e^{2\pi i n \nu t}\, dv_b \tag{2}$$

ou en posant $\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}'$:

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_n \sum_m \int_{\infty} \sum_l J_n\,(2\pi\, (\boldsymbol{b}' - n\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\xi}_m)\, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}' \boldsymbol{a}_{ml}}\, e^{2\pi i (\boldsymbol{b}' - n\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{a}}$$

$$\varphi_m\,(\boldsymbol{b}' - n\boldsymbol{k})\, e^{2\pi i n \nu t}\, dv_b$$

Appliquant alors le théorème (1), on a

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_h \sum_n \sum_m v_b\, J_n\,(2\pi\, (\boldsymbol{b}_h - n\,\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\xi}_m)\, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \varrho_m}$$

$$\varphi_m\,(\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k})\, e^{2\pi i (\boldsymbol{b}_h - n\,\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{a}}\, e^{2\pi i n \nu t} \tag{3}$$

Dans le réseau de Fourier correspondant à (3), il y a donc tout d'abord les points $\boldsymbol{b}_h$ du réseau non perturbé dont les facteurs de structure $F_{h,0}$ sont

$$F_{h,0} = \sum_m v_b\, J_0\,(2\pi\, \boldsymbol{b}_h\, \boldsymbol{\xi}_m)\, \varphi_m\,(\boldsymbol{b}_h)\, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \varrho_m}$$

Si les ondes avaient de petites amplitudes $((\xi_m \boldsymbol{b}_h) \ll 1)$, on aurait donc

$$F_{h,0} = \sum_m v_b \, \varphi_m \, (\boldsymbol{b}_h) \, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \boldsymbol{\varrho}_m}$$

ce qui est bien le résultat que nous avions obtenu dans l'article précédent. De plus, il y a dans le réseau de Fourier des points à distance $n\boldsymbol{k}$ de chaque point $\boldsymbol{b}_h$ avec des facteurs de structure $F_{h,n}$ proportionnels à $J_{-n}(2\pi(\boldsymbol{b}_h + n\boldsymbol{k})\xi_m)$. Si de nouveau on garde uniquement les termes du premier ordre en $(\boldsymbol{b}_h \xi_m)$, on trouve que seuls les points $n = \pm 1$ ont des facteurs non négligeables.

Si, par contre, les amplitudes ξ sont grandes par rapport à la dimension de la maille, l'onde donne naissance à un grand nombre de points nouveaux, dont les facteurs de structure sont

$$F_{h,n} = \sum_m v_b \, J_n \, (2\pi \, (\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}) \, \xi_m) \, \varphi_m \, (\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}) \, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \boldsymbol{\varrho}_m}$$

L'onde produit donc non seulement des stratifications d'épaisseur $\frac{1}{\boldsymbol{k}}$ mais encore des stratifications d'épaisseur deux fois, trois fois, etc., plus petite. En plus, il y a évidemment des stratifications d'épaisseur $1/|\boldsymbol{b}_h + n\boldsymbol{k}|$. On peut donc imaginer que, même si k est très petit par rapport à b (grandes longueurs d'ondes qui permettent d'obtenir de grandes amplitudes), les rayons X pourront se réfléchir sur ces stratifications d'ordre $|\boldsymbol{b}_h + n\boldsymbol{k}|$ et donner un étalement de la diffraction. Mais ces ondes de grandes amplitudes, excitées piezoélectriquement par exemple, sont en général des ondes stationnaires. Or, l'effet de deux ondes superposées dans le réseau de Fourier n'est pas donné par la superposition des réseaux de Fourier de chaque onde considérée séparément. Il nous faut donc étudier les ondes stationnaires.

3. Ondes stationnaires.

Supposons qu'on ait deux ondes se propageant en sens inverses et de même fréquence

$$\xi \sin 2\pi \left((\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_{ml}) - \nu t\right) \quad \text{et} \quad \xi \sin 2\pi \left((\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_{ml}) + \nu t\right)$$

qui déplacent tous les atomes de la même manière, ce qui est toujours vrai pour des ondes de grandes longueurs d'ondes. On obtient alors

$$e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}\,\xi)\,[\sin 2\pi (\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{ml} - \nu t) + \sin 2\pi (\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{ml} + \nu t)]}$$
$$= \sum_q \sum_p J_q \, (2\pi \, \boldsymbol{b} \, \xi) \, J_p \, (2\pi \, \boldsymbol{b} \, \xi) \, e^{-2\pi i \,[(q+p)\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_{ml} + (p-q)\,\nu t]}$$

et, au lieu de (2), on a

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_q \sum_p \sum_m \int_\infty \sum_l J_q \, J_p \, e^{-2\pi i ((q+p)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}_{ml}} \, e^{2\pi i \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}} \, \varphi_m(\boldsymbol{b}) \, e^{-2\pi i (p-q)\nu t} \, dv_b$$

En posant $(q+p)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ et en appliquant le théorème (1) on trouve

$$F(\boldsymbol{a}) = \sum_h \sum_n \sum_p \sum_m v_b \, J_p(x) \, J_{n-p}(x) \, e^{-2\pi i (2p-n)\nu t} \, \varphi_m(\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}) \, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \boldsymbol{\varrho}_m} \, e^{2\pi i (\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k})\boldsymbol{a}} \tag{4}$$

avec

$$x = 2\pi \left((\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}) \, \xi \right)$$

ou, pour le facteur de structure du point $\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}$

$$F_{h,-n} = \sum_p J_p(x) \, J_{n-p}(x) \sum_m \varphi_m(\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}) \, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \boldsymbol{\varrho}_m} \, v_b$$

La présence, dans (4), du terme contenant le temps, montre l'effet Doppler et l'on voit que les rayons X diffractés au point $(h, -n)$ seront formés d'ondes de différentes fréquences. Car, en effet, toute la théorie est basée sur le fait qu'une onde de rayons X incidente de vecteur $\boldsymbol{s}_0$ est diffractée par le point $(h, -n)$ donnant une onde de vecteur $\boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}$. Et cette règle d'addition joue aussi pour les fréquences, l'onde diffractée ayant une fréquence $\omega + \nu$ si ω est la fréquence de l'onde incidente et ν la fréquence associée au point $(h, -n)$ du réseau de Fourier. Cela a été démontré expérimentalement dans la diffraction de la lumière par les ultrasons[1]) et l'on a introduit[2]) à cette occasion la notion du réseau de Fourier dynamique. Dans le cas qui nous occupe ici, il faudra tenir compte du fait que les différentes ondes diffractées en un même point $(h, -n)$ ne peuvent donc pas interférer et, pour calculer l'intensité totale diffractée, il faudra prendre la somme des carrés des termes formant le facteur de structure du point et non pas le carré de la somme. En supposant que les fréquences $(2p - n)\nu$ sont toujours négligeables par rapport à la fréquence ω des rayons X et en posant

$$\varphi_m(\boldsymbol{b}_h - n\boldsymbol{k}) \cong \varphi_m(\boldsymbol{b}_h)$$

on trouve donc

$$F^2_{h,-n} = F^2_h \sum_p J^2_p(x) \, J^2_{n-p}(x)$$

où

$$F^2_h = \sum_m v_b \, \varphi_m(\boldsymbol{b}_h) \, e^{-2\pi i \boldsymbol{b}_h \boldsymbol{\varrho}_m}$$

---

[1]) R. Bär, Helv. Phys. Acta **8**, 592, 1935.

[2]) R. Exterman, Helv. Phys. Acta., **10**, 185, 1937.

est le facteur de structure du point h dans le reseau non perturbé. Remarquons qu'en faisant la somme des intensités des ondes associées au point $\boldsymbol{b}_h$, on trouve

$$F_h^2 \sum_n \sum_p J_p^2(x)\, J_{n-p}^2(x) = F_h^2$$

ce qui montre que l'intensité totale diffractée n'est pas influencée par la présence des ondes.

Nous avons représenté schématiquement, dans la figure (1), le réseau de Fourier correspondant à (4) et, dans la table 1, nous avons donné les valeurs de $F_{h,n}^2/F_h^2$ en fonction de x.

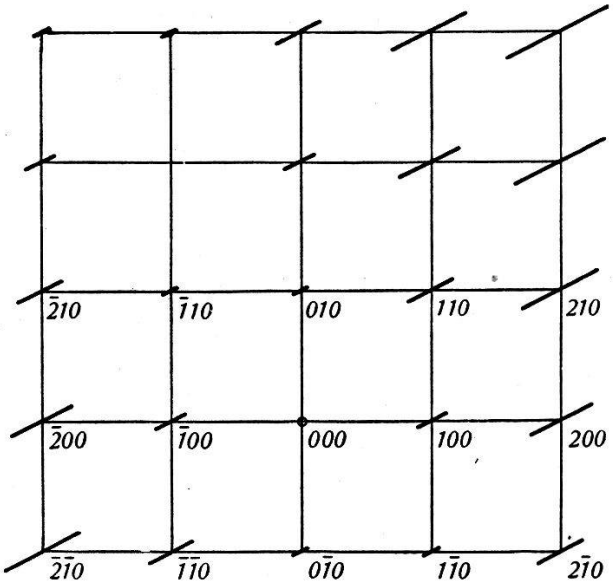

Fig. 1.

Réseau de Fourier d'un cristal cubique parcouru par une onde stationnaire longitudinale ayant la direction (210). Les points du réseau non perturbé se sont étalés et forment des droites sur lesquelles le facteur de structure est à peu près constant. (On remarquera que l'étalement est constant dans un plan perpendiculaire à la direction de vibration pour lequel $(b\xi)$ est constant.) L'étalement représenté dans la figure est fortement exagéré. En effet, si le cristal avait une constante réticulaire de $3{,}33 \cdot 10^{-8}$ cm., et était parcouru par des ondes élastiques de 0,1 mm. de longueur d'onde, il faudrait que celles-ci aient une amplitude de $2{,}57 \cdot 10^{-4}$ cm. pour obtenir l'étalement donné. Aucun cristal ne pourrait mécaniquement supporter les tensions qui résulteraient d'ondes d'amplitude aussi grande.

Table 1.

Valeurs de $F_{h,}{}^2{}_n/F_h{}^2$ en fonction de $x = 2\pi(\boldsymbol{b}_h\xi)$

x \ h	0	1	2	3
0,1	0,990	0,005	—	—
0,2	0,960	0,020	—	—
0,5	0,779	0,104	0,006	—
1	0,380	0,236	0,054	—
5	0,059	0,143	0,128	0,094

h	$x = 5$	h	$x = 5$
4	0,107	9	0,051
5	0,082	10	0,021
6	0,069	11	0,006
7	0,090	12	0,001
8	0,084	13	—

Pour des valeurs de x supérieures à l'unité, on trouve en première approximation que, pour $n > 2\,x$, les valeurs de $F^2_{h,n}/F^h_2$ sont négligeables et que, pour $-2\,x < n < +2\,x$

$$\frac{F^{\,2}_{h,n}}{F_h^{\,2}} \cong \frac{1}{8\,\pi\,(\boldsymbol{b}_h \boldsymbol{\xi})}$$

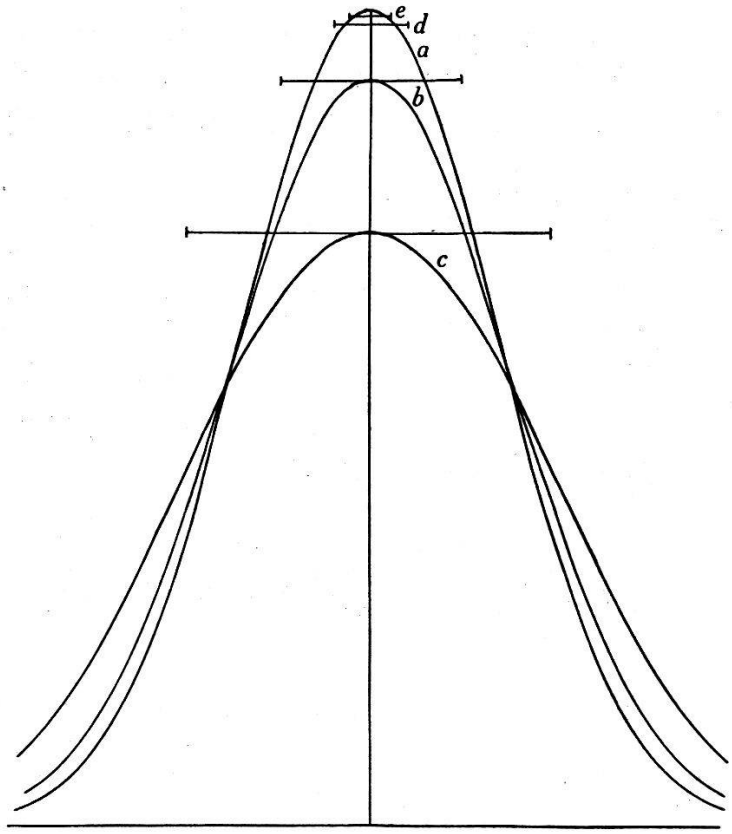

Fig. 2.

Influence de l'étalement des points du réseau de Fourier sur la largeur d'une raie spectrale.

La courbe a représente la raie dans le réseau non perturbé. Nous lui avons donné arbitrairement une forme e^{-x^2}. La raie b serait celle due à l'étalement marqué par la ligne horizontale tracée au sommet de la courbe. De même pour la raie c. Nous avons marqué en plus l'intensité maximum pour deux étalements plus petits e et d. On remarquera que l'effet n'est pas proportionnel à l'étalement, mais qu'il augmente plus rapidement que celui-ci. Si la raie représentée avait une longueur d'onde de $1 \cdot 10^{-8}$ cm. et une largeur de $5 \cdot 10^{-11}$ cm. et qu'elle soit réfléchie sur un plan dont la distance réticulaire soit de $2 \cdot 10^{-8}$ cm., la courbe b serait due à des ondes dont $\xi k = 4 \cdot 10^{-5}$. C'est-à-dire que, pour des ondes élastiques de 0,1 mm. de longueur d'onde, il faudrait que l'amplitude ξ soit de $4 \cdot 10^{-7}$ cm.

Par conséquent, les points du réseau de Fourier s'étendent autour du point non perturbé sur une longueur comprise entre

$$-\,4\,\pi\,(\boldsymbol{b}_h\,\boldsymbol{\xi})\,k \quad \text{et} \quad +\,4\,\pi\,(\boldsymbol{b}_h\,\boldsymbol{\xi})\,k$$

et, dans cette région, ils ont une amplitude à peu près constante, égale à F_h^2 divisé par le nombre des points supplémentaires. On voit que si deux ondes de même direction mais de différentes longueurs d'onde $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{k}_2$ ont des amplitudes ξ_1 et ξ_2 telles que

$$\xi_1 k_1 = \xi_2 k_2 \tag{5}$$

leur effet sur le réseau de Fourier sera approximativement le même: l'étalement du point non perturbé aura la même valeur, bien qu'il soit réalisé dans les deux cas par un nombre de points supplémentaires différent. Ainsi deux ondes ayant la même énergie, c'est-à-dire vérifiant la relation (5), donnent le même effet dans le réseau de Fourier.

APPENDICE

Nous nous proposons de montrer tout d'abord que

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ \lim N \to \infty}}^{+N} e^{-2\pi i n x} f(x)\, dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \qquad (m \text{ et } n \text{ entiers})$$

pour toute fonction $f(x)$ développable en intégrale de Fourier et dont la somme $f(m)$ existe. Pour cela, nous utiliserons la relation fondamentale[2])

$$(2) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sin \lambda\, x}{x} f(x)\, dx = f(0) \qquad (\text{pour } a > 0)$$
$$\lim \lambda \to \infty$$

Prouvons tout d'abord que

$$(3) \qquad \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n=-N \\ \lim N \to \infty}}^{+N} e^{-2\pi i n x} f(x)\, dx = f(m)$$

car, si cela est vrai, (1) est évidemment vérifiée.

Or, on a

$$(4) \qquad \sum_{-N}^{N-1} e^{-2\pi i n x} = 2\, \frac{\sin 2\pi N x}{2\pi x}\, h(x)$$

avec $\qquad h(x) = \dfrac{2\pi i x}{1 - e^{-2\pi i x}} \qquad$ et donc $h(0) = 1$.

---

[2]) par ex. TITCHMARSH, Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937, p. 25.

En introduisant (4) dans (3), on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{-N}^{+N} e^{-2\pi i n x} f(x+m)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi i N x} f(x+m)\, dx$$
$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 2 \frac{\sin 2\pi N x}{2\pi x} h(x) f(x+m)\, dx$$

La première intégrale est nulle pour $N \to \infty$ (elle a en effet la forme d'un coefficient de Fourier); la seconde intégrale donne, avec la substitution $x' = 2\pi x$ et en employant (2)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\pi} \frac{\sin N x'}{x'} h\left(\frac{x'}{2\pi}\right) f\left(\frac{x'}{2\pi} + m\right) dx = h(0) f(0+m) = f(m)$$

C'est bien là ce que nous désirions montrer.

Généralisons maintenant ce résultat pour trois dimensions avec des axes non orthogonaux. Les trois vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ définissent les axes en direction et les unités de longueurs sur ceux-ci.

Les vecteurs

$$\boldsymbol{a}_l = l_1 \boldsymbol{a}_1 + l_2 \boldsymbol{a}_2 + l_3 \boldsymbol{a}_3 \qquad (l_1, l_2, l_3 \text{ entiers})$$

définissent un réseau de points. A ces vecteurs on peut faire correspondre des vecteurs réciproques $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ choisis de façon à satisfaire

$$(\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

Sur les vecteurs $\boldsymbol{b}_i$ on peut aussi construire un réseau (le réseau de Fourier) avec

$$\boldsymbol{b}_h = h_1 \boldsymbol{b}_1 + h_2 \boldsymbol{b}_2 + h_3 \boldsymbol{b}_3 \qquad (h_1, h_2, h_3 \text{ entiers}).$$

Nous désirons calculer l'intégrale triple prise sur tout l'espace b

$$I = \iiint_{\infty} \sum_{\substack{l_1=-N_1 \\ \lim N_i \to \infty}}^{N_1} \sum_{l=-N_2}^{N_2} \sum_{l_3=-N_3}^{N_3} e^{-2\pi i (\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a}_l)} f(\boldsymbol{b})\, dv_b \tag{5}$$

En posant

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \beta_3 \boldsymbol{b}_3$$

on a

$$dv_b = (\boldsymbol{b}_1 [\boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3])\, d\beta_1\, d\beta_2\, d\beta_3 = v_b\, d\beta_1\, d\beta_2\, d\beta_3$$

et l'on peut écrire

$$I = v_b \iiint\limits_{\infty} \sum_{l_1} \sum_{l_2} \sum_{l_3} e^{-2\pi i (l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + l_3 \beta_3)} f(\boldsymbol{b})\, d\beta_1\, d\beta_2\, d\beta_3$$

En intégrant tout d'abord sur β_1, en laissant les paramètres β_2 et β_3 constants, on peut appliquer (1) et l'on trouve

$$\sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} v_b \iint\limits_{\infty} \sum_{l_2} \sum_{l_3} e^{-2\pi i (l_2 \beta_2 + l_3 \beta_3)} f(h_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \beta_3 \boldsymbol{b}_3)\, d\beta_2\, d\beta_3$$

et, procédant de même pour β_1, puis pour β_3, la valeur de (5) devient

$$I = v_b \sum_{h_1} \sum_{h_2} \sum_{h_3} f(h_1 \boldsymbol{b}_1 + h_2 \boldsymbol{b}_2 + h_3 \boldsymbol{b}_3) \tag{6}$$

Cette formule est la généralisation de (1).

Institut de Physique, Université de Genève.