Zur Theorie der geschlitzten Magnetfeldröhre

Autor(en): **Lüdi, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **16 (1943)**

Heft I

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-111393

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur Theorie der geschlitzten Magnetfeldröhre

von **F. Lüdi.**
(A.-G. Brown, Boveri Cie. Baden, Schweiz.)

(23. XI. 1942.)

Inhalt: Die Paketierung von Elektronen bildet die physikalische Grundlage der Laufzeitschwingungen.

Die Untersuchung des Elektronenmechanismus in der geschlitzten Magnetfeldröhre zeigt ebenfalls einen Paketierungseffekt durch Phasenfokussierung, womit eine Gleichwertigkeit zum Klystron erwiesen ist.

Einleitung.

Bei den Laufzeitgeneratoren, bekannt unter den Namen Bremsfeldröhre, Magnetron und Klystron ist die Bildung von Elektronenpaketen die Grundbedingung zur Schwingungserzeugung; denn das wesentliche ist die kapazitive Influenzierung einer Wechselspannung durch bewegte Elektronenverdichtungen. Die Bildung der Elektronenverdichtungen wird durch die Bewegungsgesetze der Elektronen bestimmt und ist abhängig vom Generatortyp. Man spricht von Aussortierung der falschphasigen oder von Phasenfokussierung aller Elektronen. In der Bremsfeldröhre und im Null- oder Zweischlitzmagnetron entstehen die Elektronenpakete durch Aussortierung der vom Wechselfeld beschleunigten Elektronen (Amplitudenvergrösserung der pendelnden Elektronen). Die vom Wechselfeld gebremsten Elektronen bleiben im Entladeraum zurück und wirken als Energiespender. Beim Klystrontyp (Verwendung eines Elektronenstrahls) werden die Elektronenpakete durch Beteiligung aller Elektronen mittels Geschwindigkeitsmodulierung und nachfolgendem Einholungseffekt gebildet. Durch Verwendung von Hohlraumresonatoren (grosse Wechselspannungsamplituden) gelingt die Paketierung durch Phasenfokussierung auch bei der Bremsfeldröhre[1]).

Noch nicht beantwortet ist die Frage, wie die Elektronenballung bei der geschlitzten Magnetfeldröhre zustande kommt. Dieser Generatortyp wurde im Entwicklungslaboratorium von Brown-Boveri & Cie. unter Verwendung eines speziellen Hohlraumresonators zu einem sehr stabilen Mikrowellengenerator („Turbator") auch für Wellen unterhalb 10 cm entwickelt. Der Aussteuer-

bereich ist praktisch 100% bei einer Wellenlängenänderung von wenigen $^0/_{00}$ [2]).

Zweck vorliegender Untersuchung ist eine genaue Analyse des Elektronenmechanismus und der Elektronenballungen. Das wesentliche Resultat ist die Paketierung durch Phasenfokussierung unter dem Einfluss des Wechselfeldes und die Anordnung der Verdichtungen in der bremsenden Phase entsprechend der Forderung für Energieabgabe. Die Analogie zum Klystron geht so weit, dass für den Kompressionsfaktor eine gleiche Formel erhalten wird.

Die Rechnung ist durchgeführt für den ebenen Fall: Elektronen unter gleichzeitiger Wirkung eines elektrischen Gleichfeldes mit überlagertem Wechselfeld und einem Magnetfeld. Die Ansätze werden einer früheren Arbeit entnommen [3]). Weil die Gleichungen nicht für beliebig grosse Wechselfelder und beliebige Verhältnisse von Segmentbreite zu Anodenabstand $\Lambda/2\, y_0$ lösbar sind, zerfällt die Rechnung in zwei Abschnitte. In I werden sie gelöst für grosse $\Lambda/2\, y_0$, aber beliebig starke Wechselfelder; in II kann die Lösung mit einer Störungsrechnung für kleine Wechselfelder, aber beliebigem $\Lambda/2\, y_0$ gefunden werden.

I entspricht der Erzeugung längerer Wellen ($>$ 20 cm), II der Erzeugung kürzerer Wellen ($\sim$ 10 cm und weniger). Hier finden die gebrochenen Ordnungszahlen bei hoher Segmentzahl und kurzer Wellenlänge ihre organische Einordnung in das physikalische Bild der Elektronenpaketierung. Ausserdem tritt in der Struktur der Elektronenverdichtung ein wesentlicher Unterschied gegen I auf. Er ist durch das Verhältnis Resonatorfrequenz zu Rollkreisfrequenz ω_R/ω_0 bedingt. Der kleine Durchgriff des Wechselfeldes in den Anodenraum erklärt den relativ geringen Wirkungsgrad im Vergleich zu I.

In einem Anhang wird von Herrn Käch in sehr eleganter Weise das komplizierte System der Störungsgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst und damit das bedeutend einfachere Mittelwertsverfahren des Verfassers legitimiert.

Abschnitt I.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen und ihre Lösung für $\Lambda/2\, y_0 > 1$.

Sie heissen:

$$\ddot{y} = \frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial y} - \omega_0 \dot{x} \qquad\qquad V = V_0 + V_1$$

$$\text{mit} \tag{1}$$

$$\ddot{x} = \frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial x} + \omega_0 \dot{y} \qquad\qquad \omega_0 = \frac{e}{m}\frac{H}{c}$$

Zur Orientierung diene Fig. 1, welche die prinzipiellen Grössen enthält. (Statt der Segmente ist die y-Komponente des Drehfeldes eingezeichnet.):

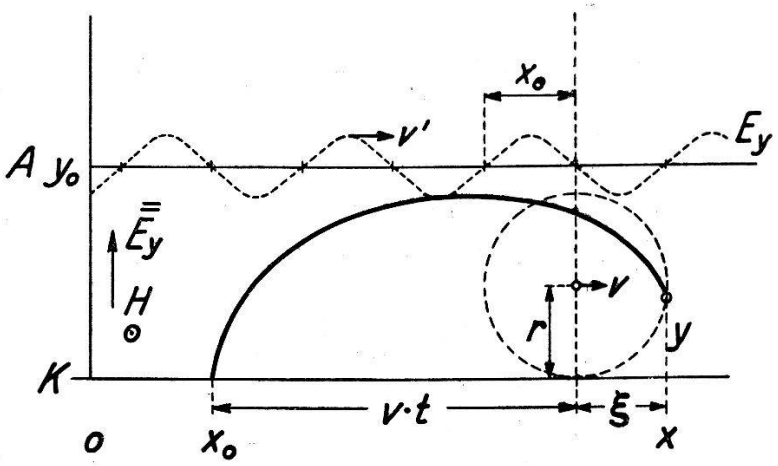

Fig. 1.

Das Wechselfeld zwischen den Segmenten werde in zwei gegenlaufende Drehfelder zerlegt und nur dasjenige in der positiven x-Richtung berücksichtigt. Die physikalische Bedeutung des gegenlaufenden Drehfeldes tritt nur für bestimmte Frequenzen in Erscheinung und wird später an entsprechender Stelle diskutiert. Das Gleichfeld $\frac{\partial V_0}{\partial y}$ zeige von Anode zur Kathode, und das Magnetfeld ist senkrecht zur Zeichenebene zu denken.

Für das Drehfeld gilt:

$$V_1 = s(y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\, x - \omega t)\right)$$

mit

$$s(y) = A\, \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\, y\right)$$

Es genügt der Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$. Mit den Randbedingungen

$$V_1 = 0 \quad \text{für} \quad y = 0$$
$$V_1 = \gamma V_0 \quad \text{für} \quad y = y_0$$

wird

$$A = \gamma \frac{V_0}{\mathfrak{Sin}\, \frac{2\pi}{\Lambda}\, y_0}$$

so dass

$$V_1 = \gamma \frac{V_0}{\mathfrak{Sin}\, \frac{2\pi}{\Lambda}\, y_0}\, \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\, y\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\, x - \omega t\right) \tag{2}$$

und also

$$E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_0}{y_0} + \gamma \frac{V_0}{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi}{\Lambda} y_0} \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} \mathfrak{Cos}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - \omega t\right)$$

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{V_0}{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi}{\Lambda} y_0} \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} y\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - \omega t\right) \tag{3}$$

Für $y < y_0 < \Lambda$ kann $\mathfrak{Sin}$, $\mathfrak{Cos}$ entwickelt werden, und man erhält in diesem Fall folgende Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{y} = \frac{e}{m}\frac{V_0}{y_0} + \gamma \frac{e}{m}\frac{V_0}{y_0} \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - \omega t\right) - \omega_0 \dot{x}$$

$$\ddot{x} = \gamma \frac{e}{m}\frac{V_0}{y_0}\frac{2\pi}{\Lambda} y \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - \omega t\right) + \omega_0 \dot{y} \tag{4}$$

Mit einem Translationssystem

$$x = x_0 + vt + \xi \tag{5}$$

wobei

$$v = \frac{e}{m}\frac{V_0}{y_0 \omega_0} = \frac{V_0}{y_0 \cdot H/c} \tag{6}$$

gewählt werde (Wegtransformation des Gleichfeldes) werden die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{y} = \gamma \frac{e}{m}\frac{V_0}{y_0} \sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda} x_0 + \left(\frac{2\pi}{\Lambda} v - \omega\right) t + \frac{2\pi}{\Lambda} \xi\right] - \omega_0 \dot{\xi}$$

$$\ddot{\xi} = \gamma \frac{e}{m}\frac{V_0}{y_0}\frac{2\pi}{\Lambda} y \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda} x_0 + \left(\frac{2\pi}{\Lambda} v - \omega\right) t + \frac{2\pi}{\Lambda} \xi\right] + \omega_0 \dot{y} \tag{7}$$

Für verschwindendes Wechselfeld ($\gamma = 0$) sind die Lösungen Kreisbewegungen im ξ-System.

Mit der weiteren Wahl

$$v = \frac{\omega}{2\pi/\Lambda} = v' \tag{8}$$

d. h. Synchronismus von Drehfeldgeschwindigkeit v' mit der mittleren Fortschreitungsgeschwindigkeit v (v = Geschwindigkeit des Rollkreismittelpunktes) tritt eine weitere Vereinfachung der Gleichungen ein

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda} x_0 + \frac{2\pi}{\Lambda} \xi\right] - \omega_0 \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{\Lambda} y \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda} x_0 + \frac{2\pi}{\Lambda} \xi\right] + \omega_0 \dot{y} \end{aligned} \tag{9}$$

Da y und $\xi < \Lambda$ sind, können die Gleichungen durch Entwicklung von sin, cos nach ξ linearisiert werden.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 + \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} \xi - \omega_0 \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{\Lambda} y \cdot \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \qquad\qquad + \omega_0 \dot{y} \end{aligned} \tag{10}$$

Die nochmalige Transformation

$$\xi = \varphi + K \tag{11}$$

homogenisiert das System bei Wahl der Konstanten

$$K = -\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right) \tag{12}$$

so dass das homogene lineare Gleichungssystem in ζ und y erhalten wird:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \varkappa \zeta - \omega_0 \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} &= \varkappa y + \omega_0 \dot{y} \end{aligned} \qquad \varkappa = \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \cdot \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \tag{13}$$

Die Lösung der Gleichungen erfolgt mit den Ansätzen:

$$y = Y e^{\varrho t} \qquad \zeta = Z e^{\varrho t}$$

Die Wurzeln ϱ der charakteristischen Gleichung werden:

$$\varrho_1 = -\varrho_2 = \omega_0 \beta \qquad \alpha = + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\varkappa^2}{\omega_0^4}}}{2}} \approx \frac{\varkappa}{\omega_0^2}$$

$$\varrho_3 = -\varrho_4 = j \omega_0 \alpha \qquad \beta = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{4 \frac{\varkappa^2}{\omega_0^4}}}{2}} \approx 1$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, wird hier die Voraussetzung beliebig grosser Wechselfelder fallen gelassen und die Rech-

nung für kleine Wechselfelder weitergeführt. Damit wird übrigens kein Verstoss gegen die physikalische Realität gemacht.

Es folgt weiter

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\varrho^2}{\varkappa^2 + \omega_0 \varrho} \qquad \text{d.h. } Y = A\varrho^2, \quad Z = A(\varkappa + \omega_0 \varrho)$$

Die Konstanten $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ entsprechen den Wurzeln $\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4$ und sind aus den vier Anfangsbedingungen zu bestimmen:
für

$$t = 0 \;:\; y = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \zeta = -K \quad \dot{\zeta} = -v$$

oder:

$$y = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \xi = 0 \quad \dot{\xi} = -v$$

und bedeuten, dass der Start des Elektrons im Ruhsystem an der Stelle x_0 ($\xi = 0$) mit der Geschwindigkeit 0 erfolgt.

Die etwas langwierige Rechnung sei weggelassen; als Lösung ergibt sich schliesslich im Ruhsystem (x, y)

$$\begin{aligned} y &= -K\frac{\varkappa}{\omega_0^2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{\varkappa}{\omega_0}t + \frac{v}{\omega_0}e^{-\frac{\varkappa}{\omega_0}t} + \frac{K\cdot\varkappa}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{v}{\omega_0}\cos\omega_0 t \\ x &= K\left(1 - e^{\frac{\varkappa}{\omega_0}t}\right) + vt + x_0 + \frac{K\varkappa}{\omega_0^2}\sin\omega_0 t - \frac{v}{\omega_0}\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{14}$$

§ 2. Diskussion der Lösungen.

Die Kontrolle ergibt leicht, dass bis auf Glieder höherer Ordnung die Anfangsbedingungen

$$x = x_0 \quad y = 0 \quad \dot{x} = 0 \quad \dot{y} = 0$$

für $t = 0$ erfüllt sind.

Aus der Lösung ist ersichtlich, dass für verschwindendes Wechselfeld ($\varkappa = 0$) eine gewöhnliche Zykloidenbewegung erfolgt. Das Wechselfeld erzeugt eine weitere kleine periodische Bewegung und was wesentlich ist: eine nicht periodische, monoton zunehmende Bewegung.

Weil das erste Glied in y klein gegen das zweite ist, gilt für den unperiodischen Teil im x-System:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v}{\omega_0}e^{-\frac{\varkappa}{\omega_0}t} \\ x &= K\left(1 - e^{\frac{\varkappa}{\omega_0}t}\right) + vt + x_0 \end{aligned} \tag{15}$$

Aus Gleichung (3) ist ersichtlich, dass $x = x_0$ für $t = 0$ der Abstand des Startpunktes vom Nulldurchgang der y-Komponente des Drehfeldes ist.

Der Effekt, welcher sich aus verschiedenen räumlichen Startphasen ergibt, kommt in der mehr anschaulichen Fig. 2 zur Geltung.

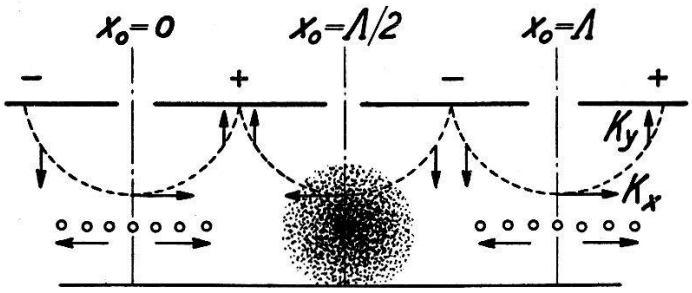

Fig. 2.

(Beispiel: Für $x_0 > \Lambda/4$ ist $K > 0$, $\varkappa < 0$, d. h. im mitbewegten Bezugssystem schreiten diese Elektronen nach rechts.) Die Betrachtung der verschiedenen K und $\varkappa$ für verschiedene Startphasen ergibt das Bild einer Elektronenballung im mitbewegten Bezugssystem an der Stelle, wo das Drehfeld eine bremsende Komponente hat (die kleinen Kreise sind die Rollkreismittelpunkte). Die Stellen, wo die Elektronen Energie aus dem Drehfeld aufnehmen würden, werden entvölkert. Diese mit der Geschwindigkeit v bewegten Verdichtungen sind es, welche die Wechselspannung induzieren und welche rückwirkend den Elektronen die Energie entzieht. An den Häufungsstellen ist $\varkappa < 0$, $K = 0$ (Gl. (12), (13)), so dass nur eine positive y-Bewegung der Elektronen erfolgt. Eine Schrägstellung des Magnetfeldes ist also in diesem Fall wie bekannt nicht erforderlich, um die Elektronen auf die Anode laufen zu lassen.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Bedingung für Synchronismus Gleichung (8) nichts anderes als die Posthumusformel für die Frequenz darstellt. Man setze für v den Wert aus Gleichung (6) ein. Für Λ gilt im zylindrischen Fall

$$p\,\Lambda = 2\,\pi\,\frac{r_a}{2}$$

(p Polpaare, r_a Anodenradius, $2\,\pi\,\frac{r_a}{2}$ ist der Weg des Rollkreismittelpunktes um die Kathode). Wird noch $y_0 = r_a$ gesetzt, so folgt die bekannte Gleichung

$$\omega = \frac{2\,p\,V_0}{r_a{}^2 \cdot H/c}$$

oder für die Wellenlänge λ in praktischen Einheiten

$$\lambda = 942 \frac{r_a^2 H}{p \cdot V_0} \tag{6a}$$

Die Posthumusformel bedeutet nach dieser Darstellung Synchronismus von Drehfeld und Rollkreismittelpunktsbewegung, die Bedingung, welche für die Phasenfokussierung erforderlich ist. Wir werden in Abschnitt II sehen, wie diese Bedingung und damit die Posthumusformel für kleine Wellenlängen zu erweitern ist.

§ 3. Der Kompressionsfaktor.

Nach der mehr anschaulichen Diskussion werde die Phasenfokussierung rechnerisch verfolgt. Sie ist bestimmt durch die zeitliche Veränderung von

$$\Delta x_0 = x_0^* - x_0$$

wobei x_0^* und x_0 zwei räumlich auseinanderliegende Startpunkte bedeuten.

Nach Gleichung (15) gilt dann für die Differenz der x-Koordinaten zur Zeit t:

$$x^* - x = \Delta x_0 - K \left(e^{\frac{\varkappa^*}{\omega_0} t} - e^{\frac{\varkappa}{\omega_0} t} \right) \tag{16}$$

Hierbei ist für die beiden Startphasen derselbe K-Wert gesetzt, während $\varkappa^*$ und $\varkappa$ den verschiedenen x_0-Werten entsprechen. Sie seien über die betrachtete Zeit konstant, d. h. es werden nur benachbarte Elektronen über kürzere Laufwege betrachtet. Entwickelt man

$$\varkappa^* = \varkappa(x_0 + \Delta x_0)$$

nach Δx_0, setzt den Wert in die Klammer (15) ein und entwickelt die e-Funktionen nach kleinen Grössen, so folgt mit dem Wert von K

$$x^* - x = \Delta x_0 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varkappa}{d x_0} \cdot t \right)$$

Die Kompression der Elektronendichte wird damit unter Berücksichtigung des Wertes für $\varkappa$ und der Setzung $t = l/v$, wobei l der Laufweg ist, den das Elektron in der Zeit t bei der mittleren Geschwindigkeit v zurücklegt:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\Delta x_0}{\Delta x} = 1 + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{\Lambda} x_0}{\cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0} \frac{l}{v}$$

oder wenn $\tilde{\varrho} = \varrho - \varrho_0$ der reine Wechselanteil bedeutet und die Werte:

$$\frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{v} \qquad \omega_0 = \frac{e}{m}\frac{H}{c} \qquad v = \frac{V_0}{y_0 H/c}$$

benützt werden:

$$\tilde{\varrho} = \varrho_0 \gamma \omega \frac{l}{v} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{\Lambda} x_0}{\cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0}$$

Dies ist die Kompression der an verschiedenen Stellen zur selben Zeit startenden Elektronen.

Wir müssen noch die an derselben Stelle zu verschiedenen Zeiten startenden Elektronen betrachten. Nach der Form des Drehfeldes

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - \omega t\right)$$

kann

$$\frac{2\pi}{\Lambda} x_0 = \omega t_s$$

gesetzt werden, wobei

$$t_s = t - \frac{l}{v}$$

die Startzeit ist. Damit wird

$$\tilde{I} = I_0 \gamma \omega \frac{l}{v} \frac{\sin^2 \omega\left(t - \frac{l}{v}\right)}{\cos \omega\left(t - \frac{l}{v}\right)} \tag{17}$$

wenn statt der Ladungsdichte die Stromdichte $\tilde{I} = \tilde{\varrho} \cdot v$ gesetzt ist.

Dieser Ausdruck entspricht nun dem entsprechenden bekannten Ausdruck für das Klystron, wobei der Kompressionsfaktor

$$\gamma \omega \frac{l}{v}$$

genau derselbe ist (γ das Verhältnis von Wechselspannung zu Be-Beschleunigungsspannung). Für v geht hier entsprechend der Wirkung von gekreuzten Feldern die Geschwindigkeit des Rollkreismittelpunktes ein.

Als wesentlicher Unterschied zum Klystron ist festzustellen, dass der Laufraum l nicht begrenzt ist (zirkulare Elektronenströmung) und dementsprechend keine endliche Anschwingbedingung wie dort aufgestellt werden kann. Tatsächlich wurden bei genauer Konstruktion Anschwingströme unterhalb 1 mA beobachtet!

§ 4. Der Wirkungsgrad.

Wir behaupten, dass der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{y_0 - 2r}{y_0}$$

ist, wobei y_0 der Abstand Anode/Kathode und $2r$ der Rollkreisdurchmesser ist. Dazu muss bewiesen werden, dass die kinetische Energie der Elektronen beim Anlaufen gegen die Anode nicht zunimmt und den Maximalwert entsprechend der Zykloidenhöhe beibehält. Für die Häufungsstellen ($K = 0$, $\varkappa < 0$, maximale y-Bewegung) ist

$$y = \frac{v}{\omega_0} e^{-\frac{\varkappa}{\omega_0} t} - \frac{v}{\omega_0} \cos \omega_0 t$$

$$x = vt - \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Die kinetische Energie im Scheitel der Zykloide

$$\left(\sin \omega_0 t = 0 \quad \cos \omega_0 t = 1 \quad t = n \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{x}^2) = \frac{m}{2} \frac{V_0^2}{y_0^2 H^2/c^2} \frac{\varkappa^2}{\omega_0^4} e^{-\varkappa \cdot 2n\pi}$$

und die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{e V_0}{y_0} y = m \frac{V_0^2}{y_0^2 H^2/c^2} [e^{-\varkappa 2n\pi} - 1]$$

wobei wieder für v und ω_0 die Werte nach Gl. 6 und 1 eingesetzt sind. Es wird also für grosse Zeiten (grosses n)

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{\frac{\varkappa^2}{\omega_0^4} e^{-\varkappa 2n\pi}}{2 [e^{-\varkappa 2n\pi} - 1]} \approx \frac{\varkappa^2}{2 \omega_0^4}$$

Da $\varkappa$ ein kleine Grösse ist, so ist obige Behauptung bewiesen; d. h. die potentielle Energie von Zykloidenhöhe bis Anode wird in Schwingenergie umgewandelt.

Abschnitt II.

§ 5. Die Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine Wechselspannungen aber beliebige A/y_0.

Hier ist die Entwicklung von Sin, Cos nach y nicht mehr erlaubt und für E_x, E_y sind die vollständigen Ausdrücke (Gl. (3))

zu nehmen. Bei Wahl derselben Transformation wie in I, Gleichungen (5), (8) resultiert für die Bewegungsgleichungen im mitbewegten Bezugssystem

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_0 \dot{\xi} &= \gamma' \,\mathfrak{Cof}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\, y\right) \cdot \sin \frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 + \xi) \\ \ddot{\xi} - \omega_0 \dot{y} &= \gamma' \,\mathfrak{Sin}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\, y\right) \cdot \cos \frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 + \xi) \end{aligned} \tag{18}$$

mit

$$\gamma' = \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0\, 2\pi/\Lambda}{\mathfrak{Sin}\, \frac{2\pi}{\Lambda}\, y_0}$$

Auch die Entwicklung nach ξ ist hier nicht erlaubt, wie aus Fig. 1 für kleine Segmentbreite ersichtlich ist. Hingegen führt für kleine Wechselfelder ($\gamma < 1$) eine Störungsrechnung zum Ziel. Wir setzen:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 \end{aligned}$$

wo $y_2 \xi_2$ die Störungsglieder hervorgerufen durch das Drehfeld sind und $y_1 \xi_1$ Lösungen der ungestörten Bewegung darstellen (rechte Seite = 0 in (18))

$$\begin{aligned} y_1 &= r(1 - \cos \omega_0 t) \\ \xi_1 &= -\, r \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Sie genügen den Anfangsbedingungen $\left(r = \dfrac{v}{\omega_0}\right)$

$$y_1 = \xi_1 = 0 \qquad \dot{y}_1 = 0 \qquad \dot{\xi}_1 = -\, v \qquad \text{für } t = 0$$

Die Störungsgleichungen lauten bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \omega_0\, \dot{\xi}_2 &= \gamma' \,\mathfrak{Cof}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\, r(1 - \cos \omega_0 t)\right] \cdot \sin \frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r \sin \omega_0 t) \\ \ddot{\xi}_2 - \omega_0 \dot{y}_2 &= \gamma' \,\mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\, r(1 - \cos \omega_0 t)\right] \cos \frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r \sin \omega_0 t) \end{aligned} \tag{19}$$

Auf der rechten Seite sind für y und ξ die ungestörten Werte eingesetzt.

Die Lösung dieses Systems ist nicht einfach und gelingt nur mit besonderen mathematischen Methoden (siehe Anhang). Um das Physikalische hervortreten zu lassen, beschreiten wir einen andern Weg. Die rechte Seite ist die Störkraft auf die Bahnkurve

im mitbewegten System als Funktion der Zeit. Weil das Drehfeld bei Synchronismus im mitbewegten System zeitlich konstant ist und nur eine räumliche sin- resp. cos-Funktion darstellt, so ist zeitliche Mittelwertsbildung der Störkraft gleichbedeutend mit räumlicher Mittelwertsbildung. Das Drehfeld kann also im ξ-System durch ein räumlich konstantes Gleichfeld ersetzt werden, dessen Richtung und Grösse nur von der relativen Lage des Rollkreises, d. h. vom Startpunkt x_0 für $t = 0$ abhängt. Die Bewegungsgleichungen für die Störungswerte heissen dann

$$\ddot{y}_2 + \omega_0 \dot{\xi}_2 = \overline{K_y}$$

$$\dot{\xi}_2 - \omega_0 \dot{y}_2 = \overline{K_x}$$

wobei jetzt $\ddot{y}_2$ und $\ddot{\xi}_2$ nicht mehr die ursprünglichen Beschleunigungen, sondern als mittlere Beschleunigungen aufzufassen sind, denen das Elektron im gemittelten Kraftfeld unterworfen ist. Der feinere periodische Charakter geht hierbei verloren, aber für die Phasenfokussierung interessiert nur die mittlere Bewegungsrichtung über viele Perioden.

Werden $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cos}$ durch die Exponentialfunktionen ausgedrückt und sin resp. cos nach den trigonometrischen Additionstheoremen zerlegt, so treten Integrale von der Form

$$\gamma' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right) \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{\pm \frac{2\pi}{\Lambda} r (1 - \cos \omega_0 t)} \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} r \sin \omega_0 t\right) dt$$

auf; dieselben sind noch für vertauschte sin, cos vor dem Integralzeichen zu nehmen. Das Integral mit der (ungeraden) sin-Funktion ergibt den Wert null, dasjenige mit cos den Wert

$$T_0 \cdot e^{\pm \frac{2\pi}{\Lambda} r} \text{ *)}$$

Man erhält somit für die gemittelten rechten Seiten von (19):

$$\overline{K}_y = \gamma \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{e}{m} \frac{V_0}{\mathfrak{Sin} \frac{2\pi}{\Lambda} y_0} \mathfrak{Cos} \frac{2\pi}{\Lambda} r \cdot \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x_0$$

$$\overline{K}_x = \gamma \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{e}{m} \frac{V_0}{\mathfrak{Sin} \frac{2\pi}{\Lambda} y_0} \mathfrak{Sin} \frac{2\pi}{\Lambda} r \cdot \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0$$

*) Die Lösung der Integrale verdanke ich ebenfalls Herrn Käch: Man schreibe sin, cos in Exponentialform und entwickle die entstehenden e-Funktionen. Die gliedweise Integration über eine Periode T_0 gibt bis auf das erste Glied überall die Werte null.

Für $y_0 > r > \Lambda$ (hohe Segmentzahl) können $\mathfrak{Sin}$, $\mathfrak{Cos}$ durch einfache Exponentialfunktionen ersetzt werden, so dass für die gemittelten Störkräfte folgt:

$$\overline{K}_y = \gamma'' \, e^{-\frac{r\pi}{\Lambda}(y_0 - r)} \cdot \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x_0$$

$$\overline{K}_x = \gamma'' \, e^{-\frac{2\pi}{\Lambda}(y_0 - r)} \cdot \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \qquad \gamma'' = \gamma \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{e}{m} V_0$$

Die Bewegungsgleichungen mit den zeitlich konstanten Störkräften bilden ein einfaches, inhomogenes Gleichungssystem. Die Lösungen lauten:

$$\xi_2 = \frac{\overline{K}_x}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) - \frac{\overline{K}_y}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t + \frac{\overline{K}_y}{\omega_0} t$$

$$y_2 = \frac{\overline{K}_y}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) + \frac{\overline{K}_x}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{\overline{K}_x}{\omega_0} t$$

Sie genügen den Anfangsbedingungen

$$\begin{matrix} \xi_2 \\ y_2 \end{matrix} = 0 \qquad \begin{matrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{y}_2 \end{matrix} = 0 \quad \text{für } t = 0$$

Die letzten Glieder sind die interessanten, welche eine zeitlich fortschreitende Bewegung liefern, deren Richtungssinn von der Startphase x_0 in $\overline{K}_y, \overline{K}_x$ abhängt (z. B. für $\sin \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 = 0$ eine Bewegung nur in der $+ y$-Richtung, also immer senkrecht zum elektrischen Feld). In $\overline{K}_y$ erkennt man die fokussierende Kraft: alle Elektronen, die zur Zeit $t = 0$ zwischen $0 \leqq x_0 \leqq \Lambda/2$ starten, bewegen sich in der positiven x-Richtung und häufen sich an der Stelle $x_0 = \Lambda/2$ bzw. $3/2\,\Lambda$, $5/2\,\Lambda$ usw. Dort erfahren sie eine Bewegung in der $+ y$-Richtung auf die Anode, also genau dasselbe Bild wie in I.

Man erkennt hier, wie der Wirkungsgrad, für den der gleiche Audruck wie in I gilt, meit abnehmendem Verhältnis Λ/y_0 kleiner wird. Die fokussierenden Kräfte nehmen ab wie $e^{-\frac{2\pi}{\Lambda}(y_0 - r)}$. Der Rollkreisradius r darf gegen y_0 nicht zu klein werden, d. h. die Elektronen müssen in der Nähe der Segmente vorbeikreisen.

In Fig. 3 ist für ein masstäbliches Modell der Potentialverlauf zwischen den Segmenten im Elektrolyttrog aufgenommen (0 Messpunkte)*). Darüberliegend sind die daraus ermittelten Punkte des

*) Die Messungen wurden von Herrn Milz in unserem Labor ausgeführt.

radialen Potentialverlaufs in Richtung Segmentmitte eingezeichnet. Der nach Gleichung (2) berechnete Potentialverlauf für $t = 0$; $x = \Lambda/4$ deckt sich gut mit dem experimentellen, so dass die theoretischen Voraussetzungen (ebener Fall) weitgehend gerechtfertigt sind.

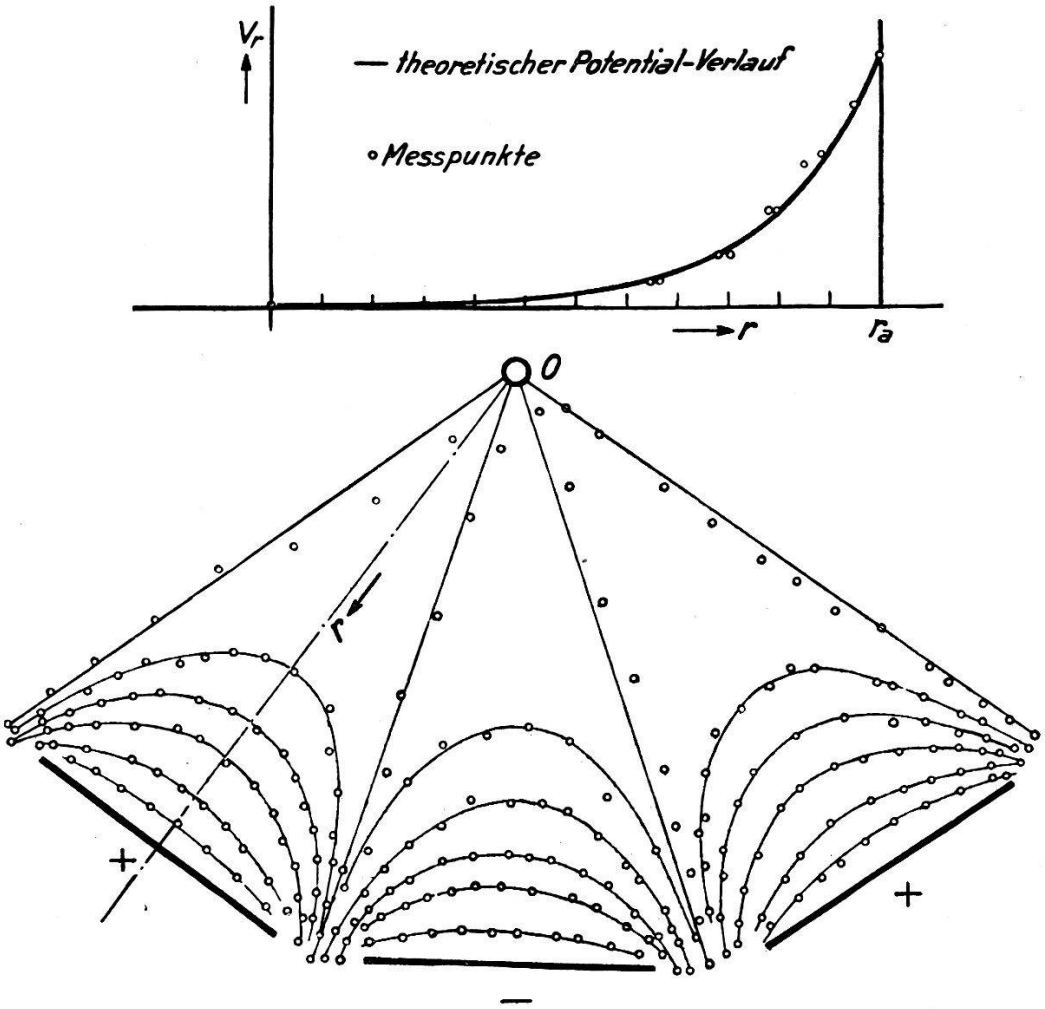

Fig. 3.
Niveaulinien gemessen im Elektrolyttrog.

Aus dem radialen Potentialverlauf lässt sich der Wirkungsgrad abschätzen. Durch einfache Differentiation erhält man daraus die fokussierende, radiale Feldkomponente, deren Radialverlauf mit dem Potentialverlauf (aber um $\Lambda/4$ verdreht) übereinstimmt. Der Halbwert des Feldes ergibt dann ungefähr ein Mass für den Wirkungsgrad; denn so weit müssen die Elektronen auf den Rollkreisbahnen in die Randzone eintauchen, um von der fokussierenden Kraft erfasst zu werden. Diese Stelle ist im untersuchten Modell bei ca. 85% des Anodenradius, so dass nach § 4 15% Wirkungsgrad resultieren würde. Optimale Messungen ergaben bei diesem Konstruktionstyp 12—14% bei ca. 12 Watt Hochfrequenzenergie und 20 cm Wellenlänge.

§ 6. Die Feinstruktur der Elektronenverdichtungen.

Um diese zu erfassen, muss die Betrachtung auf verschiedene Zeitphasen am selben Startpunkt erweitert werden. Man setze statt der bisherigen Transformation

$$x = x_0 + vt' + \xi = x_0 + v(t - \tau) + \xi$$

Dies ändert an den Gleichungen nur insofern etwas, als in den Kräften $\overline{K}_y, \overline{K}_x$ an Stelle x_0 die Startphase

$$x_0 - v\tau$$

auftritt. Die Rollkreisbewegung 0-ter Näherung im mitbewegten Bezugssystem wird durch

$$y_1 = r\,(1 - \cos\omega_0(t - \tau))$$
$$\xi_1 = -\,r \sin\omega_0(t - \tau)$$

dargestellt, d. h. die Anfangsbedingungen sind jetzt für $t = \tau$ erfüllt. Es gilt also

$$\overline{K}_y(x_0, \tau) = \overline{K}_y(x_0 - v\tau, 0)$$

Die sich ergebenden Verhältnisse sind in Fig. 4 wiedergegeben, in welcher Rollkreise verschiedener Raumphasen und Zeitphasen eingezeichnet sind. Zum leichteren Verständnis hat man sich vorzustellen, dass sich das Drehfeld über die Raumphase x_0 hinweg-

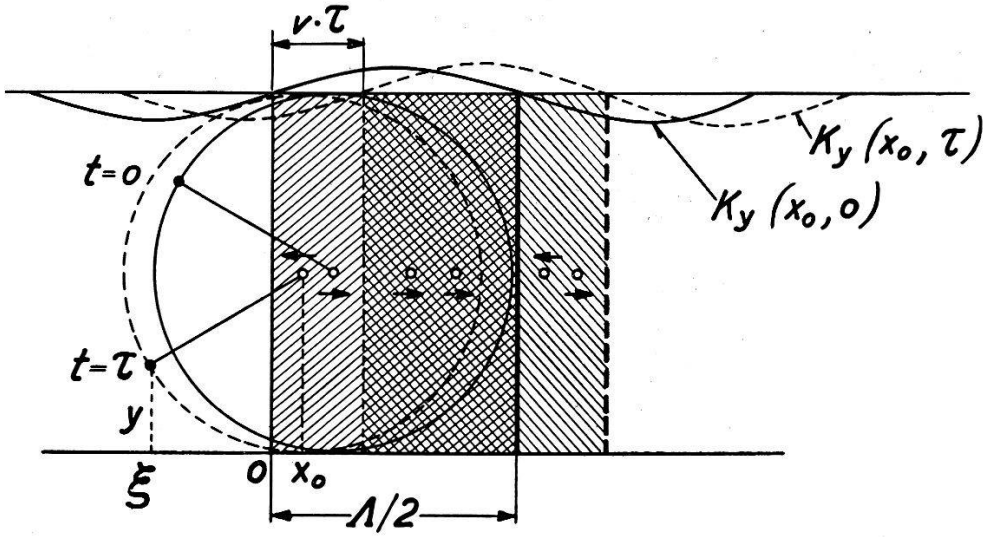

Fig. 4.

schiebt bis zur Zeitphase τ und dann das startende Elektron mitnimmt. Daraus können die Häufungsstellen im ξ-System abgelesen werden.

Die Rollkreismittelpunkte bewegen sich im ξ-System nicht über den $\Lambda/2$-Bereich hinaus; deshalb genügt es, einen solchen für zwei verschiedene Zeitphasen $0, \tau$ zu betrachten. Es gilt dann

$$\Lambda/2 - x_0 \leqq \Lambda/2$$

d. h. die Elektronen, die gleichzeitig ($t = 0$) an verschiedenen Raumphasen x_0 starten und dieser Bedingung genügen, häufen sich an derselben Stelle $x_0 = \Lambda/_2$ (dicker, ausgezogener Strich). Für die Elektronen zu verschiedenen Zeitphasen $t = \tau$ gilt bei Ersetzen von x_0 durch $x_0 - v\tau$

$$\Lambda/2 - x_0 \leqq \Lambda/2 - v\tau$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Raum- und Zeitphasen.

$$v\tau_{\max} = \Lambda/2$$

ist die obere Grenze für die Startzeit bei gleichsinniger Bewegungsrichtung; für noch spätere Zeiten kehrt sich die Bewegungsrichtung um. Mit $v = \frac{\omega \Lambda}{2\pi}$ wird

$$\tau_{\max} = \pi/\omega = T/2$$

und ferner ist

$$\frac{\tau_{\max}}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\,\omega}$$

der Bruchteil aller über einer Periode T_0 des Rollkreises startenden Elektronen, die sich in derselben Richtung häufen.

In der Fig. 5 ist die Struktur der Elektronenverdichtungen im ξ-System gezeichnet, die sich bei Berücksichtigung der verschiede-

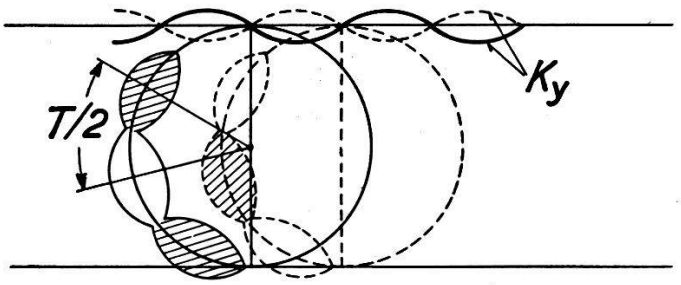

Fig. 5.

nen Vorgänge einstellt, und zwar vornehmlich für kleine Segmentbreite und $\omega > \omega_0$, d. h. für Wellenlängen, die kleiner als 0-ter Ordnung sind.

Der Umstand $\omega > \omega_0$ verursacht die Feinstruktur der Elektronenverdichtungen. In I ist $\omega < \omega_0$, und dementsprechend tritt

diese Feinstruktur nicht auf, sondern nur eine gleichmässige Elektronenverdichtung über grössere Raumgebiete.

Man erkennt ferner, dass für $\omega_0 = 2\,\omega$, d. h. $\tau_{\max} = T/2 = T_0$ eine einseitige Elektronenhäufung auf dem Rollkreis eintritt. Diese Beziehung zwischen ω_0 und ω entspricht bekannterweise grösstem Wirkungsgrad, weil dann die Frequenz des Rollkreises und die des gegenlaufenden Drehfeldes gleich sind und ein weiterer Energieaustausch hinzutritt. Die Analyse hat also ergeben, dass sowohl für das mitlaufende wie für das gegenlaufende Drehfeld die Raumladeverdichtungen in solcher Weise entstehen, dass die Energiebilanz für das Wechselfeld positiv wird. Für möglichst hohen Wirkungsgrad ist auch bei kürzeren Wellen die Verwendung von grossen Magnetfeldern wünschenswert.

§ 7. Die Erweiterung der Posthumusformel (gebrochene Ordnungszahlen)

Bis jetzt wurde stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die Synchronisierung von Rollkreisbewegung und Drehfeld durch entsprechende Einstellung der Betriebsdaten nach (6) möglich ist. Dies ist aber für die kurzen Wellen nicht der Fall. Eine Schwingungserregung tritt bei viel kleineren Spannungen und schwächeren Magnetfeldern ein. Nach Gleichung (6) (6a) wären einige Male grössere Felder erforderlich.

Die Erklärung dieser Tatsache liegt in folgendem: Der relativ kleine Durchgriff des Wechselfeldes in den Anodenraum gestattet das Abweichen vom Synchronismus. Erforderlich ist, dass die Elektronen in der Randzone gleichsinnige Impulserteilung erfahren. Das Drehfeld kann also im mitbewegten Bezugssystem noch eine Geschwindigkeit $(v' - v)$ haben. Die für diesen Fall erweiterten ungemittelten Störkräfte lauten dann:

$$\begin{matrix} K_y \\ K_x \end{matrix} = \gamma' \begin{matrix} \mathfrak{Cof} \\ \mathfrak{Sin} \end{matrix} \left[\frac{2\pi}{\Lambda} r (1 - \cos \omega_0 t)\right] \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \omega \left[\frac{x_0}{v'} - \frac{r}{v'} \sin \omega_0 t - \left(1 - \frac{v}{v'}\right) t\right]$$

wo v die Geschwindigkeit des Rollkreismittelpunktes und v' die Geschwindigkeit des Drehfeldes ist.

Die Bedingung für gleichsinnige Impulse in der Randzone der Segmente lautet

$$\omega \left(1 - \frac{v}{v'}\right) m T_0 = 2\, n\pi \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, 3 \cdots \\ n = 0, 1, 2 \cdots \end{matrix}$$

d. h. auf m Rollkreisperioden müssen n Schwingungsperioden des Resonators entfallen. Mit

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ist

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{n}{m} \frac{1}{1 - \frac{v}{v'}}$$

Diese Betrachtung gilt so lange, als das Drehfeld im ξ-System keinen zu grossen Schlupf hat, so dass es während des Elektronendurchganges in der Randzone als zeitlich konstant aufgefasst werden kann. Setzt man für

$$v = \frac{V_0}{y_0 H/c}$$

und für

$$v' = \frac{\omega}{2\pi/\Lambda} = \frac{\omega}{2\,p/r_a}$$

($\pi r_a = p\Lambda$ gleich mittlerer Umfang für den Rollkreismittelpunkt im zylindrischen Fall, p Anzahl der Segmentpaare) so wird:

$$\omega = \frac{n}{m}\,\omega_0 + \frac{2\,p\,V_0}{r_a^2 \cdot H/c} \tag{20}$$

Diese Gleichung ist als erweiterte Posthumusformel zu bezeichnen. Sie geht für $n = 0$ (Synchronismus) in diese über. Die gebrochenen Ordnungszahlen wurden zuerst von W. Engbert und K. Fritz[4]) auf Grund unmittelbar anschaulicher Überlegungen eingeführt. Sie erscheinen hier in etwas anderem Zusammenhang, wobei jedoch ihre Bedeutung grundsätzlich dieselbe ist. Allerdings haben ganze Ordnungszahlen nach der vorliegenden Darstellung nur im Fall $n = 2$, wie in § 6 ausgeführt, eine physikalische Bedeutung (Ausnützung der Rollkreisenergie im gegenlaufenden Drehfeld). Für längere Wellen ist bei Synchronismus $n = 0$, und eine Messung der Rollkreisfrequenz in Eigenfrequenzen des Resonators bleibt willkürlich.

Die Gleichung (20) werde noch in Wellenlängen ausgedrückt:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{\frac{n}{m}\lambda + \lambda_0}$$

wobei λ_R die erregte Eigenwelle des Resonators

$\lambda_0 = \frac{10\,700}{H}$ die Wellenlänge der Rollkreisschwingung

und $\lambda = 942 \frac{r_a^2 H}{p V^0}$ die Wellenlänge nach Posthumus bedeutet.

Diese Wellenlängen sind eindeutig bestimmbare Grössen; zur Kontrolle werde nach n/m aufgelöst und die Ganzzahligkeit nachgeprüft.

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung für verschiedene Beispiele, wobei die Segmentzahlen von 4—16, der Anodenradius von 4–13 mm variiert und Anodenspannung sowie Magnetfeld von 650—2000 Volt bzw. von 350—1300 Gauss variieren. λ_R ist jeweils die gemessene erregte Eigenwelle des Resonators.

λ_R	λ_0	λ	$\frac{n}{m} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\lambda - \lambda_R}{\lambda_R}$
10	30	15,8	$1{,}1 \approx 1/1$
20	18	40	$18/40 \approx 1/2$
12	13	38	$0{,}68 \approx 2/3$
10	9	30	$20/30 \approx 2/3$
8,6	19	15,4	$0{,}98 \approx 1/1$
16	21,5	16,5	$0/1$
10	21,5	13	$0{,}5 \approx 1/2$
12,3	16,4	24	$0{,}65 \approx 2/3$
20	8,5	20	$0/1$
9,3	15	22	$1{,}9 \approx 2/1$
9,3	15	22	$0{,}92 \approx 1/1$

Man erkennt, dass die Übereinstimmung von Experiment und Theorie ohne besondere Korrekturen (wie abgeänderter Anodenradius für grössere virtuelle Kathoden) relativ gut ist.

Damit findet auch die Bemerkung von GUTTON und BERLIN[5]), es könne sich bei den kurzen Wellen der hochgeteilten Magnetfeldröhre nicht um Laufzeitschwingungen handeln, weil die gemessenen Wellenlängen nicht der Posthumusformel genügen, ihre Erklärung.

Zu bemerken ist noch, dass nach Gleichung (20) dieselbe Frequenz ω beim gleichen Resonator für verschiedene diskrete Spannungen und Magnetfelder bei verschiedenen ganzzahligen Verhältnissen n/m auftreten sollte. Dies wurde auch experimentell bei mehreren Röhren verifiziert; z. B. wurden bei 750, 1250 und 2000 Volt mit entsprechenden Magnetfeldern ausgesprochene Schwingungsoptima festgestellt.

Zum Schluss noch eine vergleichende Bemerkung. Der optimale Wirkungsgrad von 58% wird beim Klystron für Wellenlängen unter 10 cm nur schwer zu erreichen sein; denn die hohen Frequenzen verlangen kleine Durchtrittszeiten der Elektronen durch

den Auskoppler (gleich einer halben Schwingungsdauer), was nur mit grossen Strahlgeschwindigkeiten und kleinen Auskopplerdicken möglich ist[6]). Damit die Energieabgabe beim einmaligen Durchgang der Elektronen vollständig ist, müssen Wechselspannungen von derselben Grösse wie die Gleichspannung entstehen, was grösste Gütefaktoren der verwendeten Resonatoren voraussetzt. Bei der Magnetfeldröhre spielt der Gütefaktor nicht diese Rolle, da ja die Elektronen in beliebig vielen Stufen ihre Energie abgeben

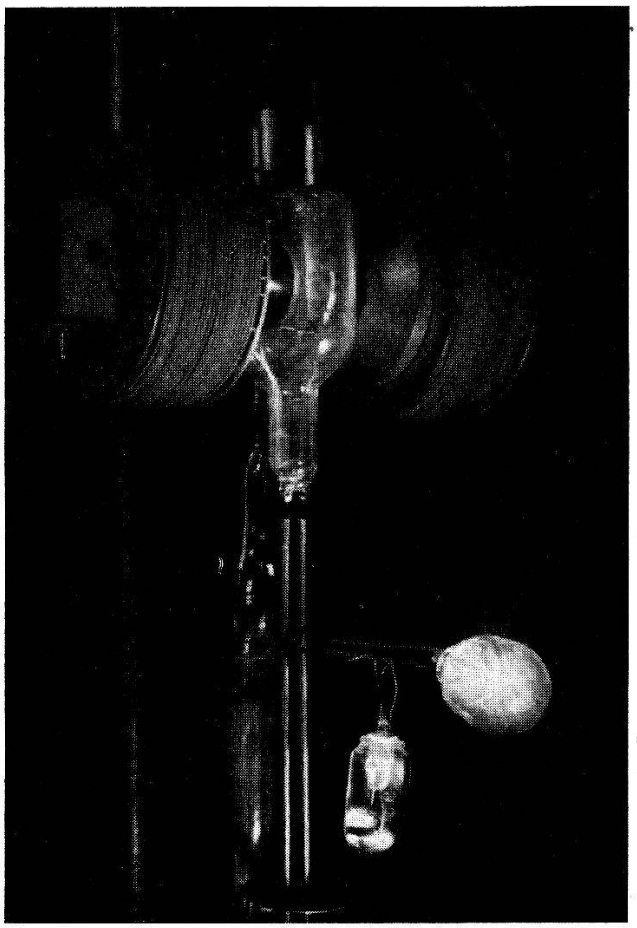

Photo: Turbator auf dem Pumpstand vor dem Abschmelzen. Ca. 10 Watt Hochfrequenzleistung.

können. Der Synchronismus wird automatisch aufrechterhalten, weil sich die Elektronenballungen an den Stellen anhäufen, wo das Gleichfeld plus die y-Komponente des Drehfeldes gerade die richtige Rollkreisgeschwindigkeit ergeben.

Endlich danke ich den Herren W. Frey, O. Lardelli und Käch in unserer Firma für ihre Unterstützung bei der Diskussion des Grundsätzlichen und der mathematischen Lösung aufs beste.

Anhang.

Zur Lösung der im Abschnitt II aufgeführten simultanen Störungsgleichungen (19) gehen wir aus von der vereinfachten Darstellung:

$$\ddot{y}_2 + \omega_0 \xi_2 = \gamma' \varphi(t)) \tag{1}$$

$$\ddot{\xi}_2 - \omega_0 \dot{y}_2 = \gamma' \psi(t) \tag{2}$$

worin

$$\varphi(t) = \mathfrak{Cof}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 t)\right] \sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r \sin \omega_0 t)\right]$$

$$\psi(t) = \mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 t)\right] \cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r \sin \omega_0 t)\right]$$

Durch Laplace'sche Transformation erhält dieses Gleichungssystem mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen, wonach gemäss vorstehender Problemstellung

$$\begin{matrix} \xi_2 = 0 & \dot{\xi}_2 = 0 \\ y_2 = 0 & \dot{y}_2 = 0 \end{matrix} \qquad \text{für } t = 0\,, \tag{3}$$

die Form

$$p^2 \mathfrak{L}(y_2) + \omega_0 p \mathfrak{L}(\xi_2) = \gamma' \mathfrak{L}[\varphi(t)]$$

$$p^2 \mathfrak{L}(\xi_2) - \omega_0 p \mathfrak{L}(y_2) = \gamma' \mathfrak{L}[\psi(t)]$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach den unbekannten Bildfunktionen $\mathfrak{L}(\xi_2)$ und $\mathfrak{L}(y_2)$ liefert die gesuchten Lösungen im Bildbereich zu

$$\mathfrak{L}(\xi_2) = \gamma' \frac{\mathfrak{L}[\psi(t)]}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0 \gamma'}{p} \frac{\mathfrak{L}[\varphi(t)]}{p_2 + \omega_0^2}$$

$$\mathfrak{L}(y_2) = \gamma' \frac{\mathfrak{L}[\varphi(t)]}{p_2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0 \gamma'}{p} \frac{\mathfrak{L}[\psi(t)]}{p^2 + \omega_0^2}$$

Eine kleine Umstellung lässt hierin leicht die Originalfunktionen von $\sin \omega_0 t$ und $\cos \omega_0 t$ erkennen. Ihre Einsetzung ergibt die Gleichungen

$$\mathfrak{L}(\xi_2) = \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(\sin \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\psi(t)] + \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(1 - \cos \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] \tag{4}$$

$$\mathfrak{L}(y_2) = \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(\sin \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] - \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(1 - \cos \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\psi(t)] \tag{5}$$

Für Gleichung (4) folgt weiter mit Hilfe des Faltungssatzes

$$\mathfrak{L}(\xi_2) = \frac{\gamma'}{\omega_0}\,\mathfrak{L}\left\{\int_0^t \sin\left[\omega_0(t-\tau)\right]\left[\psi(\tau)\right]d\tau\right\}$$
$$+\frac{\gamma'}{\omega_0}\,\mathfrak{L}\left\{\int_0^t \left(1-\cos\left[\omega_0(t-\tau)\right]\right)\left[\varphi(\tau)\right]d\tau\right\}$$

und daraus die gesuchte Originalfunktion

$$\xi_2 = \frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^t \sin\left[\omega_0(t-\tau)\right]\left[\psi(\tau)\right]d\tau + \frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^t \left(1-\cos\left[\omega_0(t-\tau)\right]\right)\left[\varphi(\tau)\right]d\tau$$

Analog findet sich aus Gleichung (5) die Lösung im Originalbereich zu

$$y_2 = \frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^t \sin\left[\omega_0(t-\tau)\right]\left[\varphi(\tau)\right]d\tau - \frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^t \left(1-\cos\left[\omega_0(t-\tau)\right]\right)\left[\psi(\tau)\right]d\tau$$

Mit diesen Resultaten ist damit das vorliegende Problem grundsätzlich gelöst. Die sehr unpraktische Form der Gleichungen kann aber noch bedeutend verbessert werden. Zerlegt man die trigonometrischen Faktoren und macht die eingangs gemachte Relation, wonach

$$\varphi(\tau) = \mathfrak{Cof}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,r(1-\cos\omega_0\tau)\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r\sin\omega_0\tau)\right]$$

$$\psi(\tau) = \mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,r(1-\cos\omega_0\tau)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r\sin\omega_0\tau)\right]$$

wieder rückgängig, so zeigt sich, dass einzelne Glieder paarweise integriert werden können. Mit dieser Auswertung ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2 = {} & \frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^t \mathfrak{Cof}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,r(1-\cos\omega_0\tau)\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r\sin\omega_0\tau)\right]d\tau \\
& - \frac{\gamma'\lambda}{2\pi r\omega_0^2}\,\mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,r(1-\cos\omega_0 t)\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r\sin\omega_0 t)\right]\sin\omega_0 t \\
& - \frac{\gamma'\lambda}{2\pi r\omega_0^2}\,\mathfrak{Cof}\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,r(1-\cos\omega_0 t)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}\,(x_0 - r\sin\omega_0 t)\right]\cos\omega_0 t \\
& + \frac{\gamma'\lambda}{2\pi r\omega_0^2}\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\,x_0\right)\cos\omega_0 t
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} y_2 = &-\frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^t \mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1-\cos\omega_0\tau)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r\sin\omega_0\tau)\right]d\tau \\ &+\frac{\gamma'\lambda}{2\pi r\omega_0^2}\mathfrak{Cos}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1-\cos\omega_0 t)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r\sin\omega_0 t)\right]\sin\omega_0 t \\ &-\frac{\gamma'\lambda}{2\pi r\omega_0^2}\mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1-\cos\omega_0 t)\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r\sin\omega_0 t)\right]\cos\omega_0 t \\ &-\frac{\gamma'\lambda}{2\pi r\omega_0^2}\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x_0\right)\sin\omega_0 t. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Dies sind die gesuchten Lösungen von (1) und (2), wie sich mit Rücksicht auf (3) leicht verfizieren lässt.

Nachstehend werden noch kurz die Funktionswerte und deren Ableitungen für die besonders interessierenden Zeiten $t = 0$ und $t = T_0$ berechnet.

Für $t = 0$ verschwindet in Gleichung (6) voraussetzungsgemäss der ganze Ausdruck, während er für $t = T_0$ übergeht in

$$\xi_2/_{t=T_0} = \frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^{T_0} \mathfrak{Cos}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1-\cos\omega_0\tau)\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r\sin\omega_0\tau)\right]d\tau$$

Das Integral ist geschlossen lösbar und hat den Wert

$$T_0\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} r\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right);$$

damit wird

$$\xi_2/_{t=T_0} = 2\pi\frac{\gamma'}{\omega_0^2}\mathfrak{Cos}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} r\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right)$$

Für Geschwindigkeit und Beschleunigung lässt sich leicht errechnen, dass

$$\begin{matrix}\dot{\xi}_2 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 = 0\end{matrix} \qquad \text{für } t = \begin{matrix}0 \\ T_0\end{matrix}$$

In analoger Weise ergibt sich aus Gleichung (7) $y_2/_{t=0} = 0$, während für $t = T_0$

$$y_2/_{t=T_0} = -\frac{\gamma'}{\omega_0}\int_0^{T_0} \mathfrak{Sin}\left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1-\cos\omega_0\tau)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}(x_0 - r\sin\omega_0\tau)\right]d\tau$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$T_0\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} r\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right)$$

mithin

$$y_2\Big/_{t=T_0} = -2\pi \frac{\gamma'}{\omega_0^2} \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} r\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right)$$

Ebenso findet man für die Geschwindigkeit

$$\dot{y}_2 = 0 \qquad \text{für } t = \begin{matrix} 0 \\ T_0 \end{matrix},$$

während die Beschleunigung den Wert

$$\ddot{y}_2 = \gamma' \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0\right) \qquad \text{für } t = \begin{matrix} 0 \\ T_0 \end{matrix}$$

aufweist.

Die Überprüfung der gefundenen Werte mit denjenigen in § 5 zeigt eine vollständige Übereinstimmung, womit die Zuverlässigkeit der verwendeten Mittelwertsmethode einwandfrei erwiesen ist.

---

[1]) A. Allerding, W. Dällenbach und W. Kleinsteuber, Hochfr. u. El. Ak. **51**, S. 96 und weitere Publikationen.

[2]) F. Lüdi, Bullt. S.E.V. XXXIII. Jahrg., S. 310 (1942). — F. Lüdi, 6. Hochfreq. Tagung des S.E.V., 6. Juni 1942, i/Druck.

[3]) F. Fischer und F. Lüdi, Bullt. S.E.V., Bd. 28 (1937).

[4]) K. Fritz und W. Engbert, Telefunken Mitteilungen Nr. 84 (1940).

[5]) H. Gutton und S. Berline, Bullt. S.F.R., 12° Année, N° 2 (1938).

[6]) F. Lüdi, H.P.A., Vol. XIII, Fasc. Sec. 1940, S. 122 und Vol. XIII Fasc. Sext. 1940, S. 498.