**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta
**Band:** 16 (1943)
**Heft:** III

**Artikel:** Über den Begriff des Atoms. III
**Autor:** Scherrer, Willy
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-111400

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Über den Begriff des Atoms. III.

von **Willy Scherrer.**

(22. IV. 1943.)

---

Teil II[1]) war fast ausschliesslich einer Analyse der kräftefreien Wellengleichung

$$\Box u \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -a^2 u \tag{1}$$

mit

$$a = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{2}$$

im Sinne der in § 1 und 2 von Teil I[2]) geschilderten Weltpunktdynamik gewidmet. Es handelte sich also um eine Beschreibung der Trägheitsbewegung eines Elementarteilchens im Rahmen der relativistischen Wellenmechanik. Diese Beschreibung weicht aber insofern prinzipiell von der üblichen Behandlung ab, als das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit in Gestalt einer Randbedingung in die Prämissen aufgenommen wurde.

In präziser Fassung lag folgende Aufgabe vor, die wir inskünftig als *Einpunktproblem* bezeichnen wollen: Von einem Elementarteilchen sei bekannt, dass es an der Weltstelle

$$Q_1 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$$

in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen an irgend einer mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle $Q$, also irgendwo im Nachkegel (Zukunftskegel) oder Vorkegel (Vergangenheitskegel) von $Q_1$ anzutreffen?

Bei Zugrundelegung der Gleichung (1) besteht die sinngemässe Behandlung der Aufgabe darin, dass man Vor- und Nachkegel als Grundgebiet erklärt und die in diesem Gebiet eindeutigen und so-

---

[1]) Helv. Phys. Acta, XV, **5**, 476 (1942).

[2]) Helv. Phys. Acta, XV, **1**, 53 (1942).

weit als möglich stetigen und beschränkten Lösungen von (1) ermittelt. Als Mass der Wahrscheinlichkeit wählen wir das Integral

$$W = \iiint\limits_{\mathfrak{G}} u^2 \, d(ct) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, . \tag{3}$$

Dasselbe soll uns im Mittel die Zahl derjenigen Weltstellen liefern, welche von unserem Teilchen innerhalb des Weltgebietes $\mathfrak{G}$ eingenommen werden. Es handelt sich also nicht um die Definition einer Wahrscheinlichkeit a priori, sondern um einen Versuch, das Integral (3) als empirische Wahrscheinlichkeit zu deuten. Die Funktion $u$ stellt daher nicht einen konkreten Einzelfall dar, sondern das mittlere Verhalten sehr vieler und voneinander vollständig unabhängiger Teilchen, die denselben Konkurrenzbedingungen unterliegen.

Ersetzen wir nun in (3) das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch dasjenige Teilgebiet $\mathfrak{G}(T)$ des Grundgebietes, welches zwischen den Ebenen $t = 0$ und $t = T$ enthalten ist, so liefert

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \iiint\limits_{t=T} u^2 c \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \nu(T) \tag{4}$$

die mittlere Zahl der von unseren Teilchen zur Zeit $t = T$ pro Sekunde eingenommenen Weltstellen. Wenn also der Grenzwert

$$\lim_{T \to \infty} \nu(T) = \nu^* \tag{5}$$

existiert, so kann man von einer asymptotischen Erhaltung des Teilchens sprechen. Ein genauer mikrokosmischer Erhaltungssatz wird im Rahmen der in Teil I geschilderten Weltpunktdynamik nicht angestrebt.

Die in den Tafeln (56) und (70) von Teil II mitgeteilten Lösungen erfüllen nun tatsächlich die Bedingung (5). Hingegen sind sie alle entweder auf dem Nullkegel oder auf der Ruhachse singulär. Die einzige im abgeschlossenen Grundgebiet eindeutige, stetige und beschränkte Lösung

$$u = C \cdot \frac{I_1(ar)}{r} \; ; \quad r = \sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{6}$$

liefert dagegen keinen eigentlichen Grenzwert (5).

Die erwähnten Anomalien verschwinden nun vollständig, wenn man das eben geschilderte Einpunktproblem ersetzt durch folgen-

des *Zweipunktproblem:* Von einem Teilchen sei bekannt, dass es an zwei zueinander zeitartig gelegenen Weltstellen

$$Q_1 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (-A, 0, 0, 0)$$

und

$$Q_2 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (A, 0, 0, 0)$$

in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dieses Teilchen an irgend einer mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle $Q$ anzutreffen?

Das Grundgebiet besteht nun aus dem Vorkegel von $Q_1$, dem Nachkegel von $Q_2$ und dem Durchschnitt des Nachkegels von $Q_1$ mit dem Vorkegel von $Q_2$. Den letzteren endlichen Bereich wollen wir kurz *Doppelkegel* nennen.

Das bezeichnete Problem ist separierbar in den durch die Transformation

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{\tau\sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(A^2-\tau^2)(A^2-\sigma^2)}}{A} \\ x_1 &= \varrho\cos\vartheta \\ x_2 &= \varrho\sin\vartheta\cos\varphi \\ x_3 &= \varrho\sin\vartheta\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

definierten Lamé'schen Koordinaten $\tau, \sigma, \vartheta, \varphi$. Der Separationsansatz

$$u = T(\tau)\, S(\sigma)\, P(\vartheta)\, \Phi(\varphi) \tag{9}$$

führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\,\Phi = 0, \quad (\Phi)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]P = 0, \quad (P)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-\sigma^2}}\frac{d}{d\sigma}\left[(\sqrt{A^2-\sigma^2})^3\frac{dS}{d\sigma}\right] + \left[a^2(A^2-\sigma^2) - E - \frac{l(l+1)A^2}{A^2-\sigma^2}\right]S = 0, \quad (S)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-\tau^2}}\frac{d}{d\tau}\left[(\sqrt{A^2-\tau^2})^3\frac{dT}{d\tau}\right] + \left[a^2(A^2-\tau^2) - E - \frac{l(l+1)A^2}{A^2-\tau^2}\right]T = 0. \quad (T)$$

Hier sind in den beiden wohlbekannten Gleichungen ($\Phi$) und ($P$) die Eigenwerte schon durch die geläufigen Quantenzahlen $m$ und $l$ ausgedrückt. Neu und für das Zweipunktproblem charakteristisch sind die beiden gleichlautenden Gleichungen ($S$) und ($T$). Ihre Quantisierung beruht ausschliesslich auf den Schrödinger'schen Forderungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit im abgeschlossenen Doppelkegel und liefert ein diskontinuierliches Spektrum von Eigenwerten $E$. Führt man an Stelle von $\sigma$ und $\tau$ vermittels

$$\sigma = A \cos \alpha, \qquad \tau = A \cos \beta \tag{10}$$

die Winkelvariabeln $\alpha$ und $\beta$ ein, so ergeben sich für die einem bestimmten Eigenwert $E$ entsprechenden Eigenfunktionen $S_E[x]$ und $T_E[x]$ die Beziehungen

$$T_E[x] \equiv C S_E[x] \tag{11a}$$

$$S_E[-x] \equiv \pm S_E[x] \tag{11b}$$

$$S_E[x + \pi] \equiv \pm S_E[x] \tag{11c}$$

woraus ihre enge Verwandtschaft mit den Mathieu'schen (resp. Lamé'schen) Eigenfunktionen ersichtlich ist. Ihre Fortsetzung in den Nachkegel von $Q_2$ oder den Vorkegel von $Q_1$ geschieht durch Substitutionen

$$\begin{aligned} \alpha &\to k\pi + i\alpha \\ \beta &\to l\pi + i\beta, \end{aligned} \tag{12}$$

wo $k$ und $l$ ganze Zahlen sind und liefert die sogenannten zugeordneten Eigenfunktionen.

Eine erste approximative Analyse der gewonnenen Lösungen zeitigte folgende Ergebnisse:

1. Sämtliche Eigenlösungen sind im abgeschlossenen Grundgebiet eindeutig, stetig und beschränkt und besitzen einen endlichen Grenzwert (5).

2. Die Struktur der Wellenfunktion hängt in dem Sinne von der Grunddistanz $2A$ ab, dass mit wachsendem $A$ in der Umgebung der „Gewissheitsstellen" $Q_1$ und $Q_2$ die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von der Ruhachse $Q_1 Q_2$ klein wird. Im Grenzfall $A = \infty$ wird diese Wahrscheinlichkeit Null. Liegt also $Q_1$ im Unendlichen, $Q_2$ aber im Endlichen, so beschreibt der Partikel im Endlichen genau eine Trägheitsbahn.

3. In genügendem Abstand von den Gewissheitsstellen entsprechen die auftretenden Frequenzen und Wellenlängen den bekannten de Broglie'schen Gesetzmässigkeiten.

Die hier entwickelte Auffassung der wellenmechanischen Trägheit ist vielleicht geeignet, die rätselhafte Doppelnatur der Materie dem anschaulichen Verständnis näher zu bringen. Sie vermeidet strikte jede Überlichtgeschwindigkeit und gestattet einen kontinuierlichen Anschluss an das klassische Trägheitsgesetz. Die mathematischen Einzelausführungen zu den hier mitgeteilten Resultaten werden an anderer Stelle erscheinen[1]).

Zum Schluss sei im Anschluss an die Feststellung 2. noch folgende Konfiguration erwähnt: Fallen die beiden Weltpunkte $Q_1$ und $Q_2$ in *verschiedene* Raumpunkte derart, dass ihr Verbindungsrektor die Geschwindigkeit $v$ repräsentiert, so gehören sämtliche Weltpunkte des Doppelkegels *räumlich* zu einem gestreckten Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $A$ und $A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, dessen Brennpunkte die Raumorte von $Q_1$ und $Q_2$ sind. Der von unserem Teilchen in der Zeit von $Q_1$ bis $Q_2$ „gestörte" Raum wird also mit $v \to c$ beliebig schmal. Dieses Beispiel illustriert die Unmöglichkeit, auf Grund der relativistischen Metrik eine kleinste Raumdistanz auszuzeichnen.

Bern, Mathematisches Institut der Universität.

---

[1]) Als Teil IV in den „Commentarii Mathematici Helvetici", Anfang 1944.