Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 17 (1944)
Heft: I

Artikel: Un modèle de l'électron ponctuel II
Autor: Stueckelberg, E.C.G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111492

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Un modèle de l'électron ponctuel II *) [2])

par **E. C. G. Stueckelberg.**

(29. X. 1943.)

Résumé: Un modèle de l'électron ponctuel, plus général que celui proposé en I[2]), est discuté. L'électron n'interagit qu'avec le champ de Maxwell. En théorie classique, son mouvement ressemble beaucoup à celui de l'électron étendu de Lorentz. Par un principe de correspondance, le modèle peut être transcrit en théorie quantique, sans que des divergences apparaissent. Les formules ainsi obtenues montrent une très grande analogie avec celles obtenues par HEISENBERG[3]) dans sa récente théorie.

§ 1. Le modèle classique de l'électron.

Il est possible de donner une theorie classique de l'électron ponctuel[1])[2]) sans se servir d'une électrodynamique non linéaire. Le procédé essentiel pour éviter les infinités doit être considéré en détail; aussi allons-nous rapidement le décrire pour insister sur certaines de ses caractéristiques. Sur une particule (électron) placée à l'endroit $\vec{q}$ au temps t, l'expérience montre que d'autres particules peuvent agir. C'est l'arrangement dans le cone du passé de $q = (\vec{q}, t = q^4)$, qui détermine cette action. On la décrit par un champ $\varphi(x) = \varphi(\vec{x}, t)$ qui contiendra les particules comme des singularités. La théorie du champ qu'on désire établir doit fournir les équations permettant de calculer le champ $\varphi(x)$ et le mouvement de la particule (ou sa ligne d'univers $q = q(\lambda)$). On part alors des principes de conservation détaillée de l'énergie-impulsion. On suppose qu'il existe une densité d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}(x)$ qu'on exprime sous forme de $T^{\mu\nu}(\varphi(x))$ en fonction de $\varphi(x)$ et de ses premières dérivées de la façon la plus simple. Les principes de conservation sont alors la loi de continuité et les relations de symétrie

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0\,; \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{1,1}$$

Il est utile de définir la densité de force $F^\mu(x)$ et le quadrivecteur d'énergie-impulsion p^μ

$$F^\mu(\vec{x}, t) = \partial_\nu T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)\,; \quad p^\mu(t) = \int_{\vec{x}} (dx)^3\, T^{\mu 4}(\vec{x}, t) \tag{1,2}$$

*) Dédié à M. le prof. A. SOMMERFELD à l'occasion de son 75ème anniversaire.

INSTITUT DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHATEL

La force sur la particule est alors

$$f^{\mu}(t) = \int\limits_{v(\vec{q})} (dx)^3 \; F^{\mu}(\vec{x}, t) \tag{1,3*}$$

$v(\vec{q})$ étant alors un volume arbitrairement petit mais contenant la singularité $\vec{x} = \vec{q}(t)$. Pour que (1,2) et (1,3) aient un sens, on voit qu'il faut que les singularités contenues en $T^{\mu\nu}$ et F^{μ} soient intégrables.

Voyons maintenant comment ces singularités peuvent s'exprimer. Dans une théorie linéaire, il y a superposition et, par conséquent, le champ agissant sur une particule est dû aux actions individuelles de chaque particule et l'on peut donc décomposer φ en

$$\varphi = \varphi^{(\mathrm{ret})} + \varphi^{(\mathrm{inc})} \tag{1,4}$$

où $\varphi^{(\mathrm{ret})}$ est le champ retardé agissant sur la particule considérée dû au passé de cette particule et $\varphi^{(\mathrm{inc})}$ le champ incident sous forme d'onde dû aux autres particules. On peut toujours écrire

$$\begin{aligned} \varphi^{(\mathrm{ret})} = \varphi^{(\mathrm{sym})} + \varphi^{(\mathrm{rad})}\,; \quad \varphi^{(\mathrm{sym})} &= \tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(\mathrm{ret})} + \varphi^{(\mathrm{av})}\right); \\ \varphi^{(\mathrm{rad})} &= \tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(\mathrm{ret})} - \varphi^{(\mathrm{av})}\right) \end{aligned} \tag{1,5}$$

$\varphi^{(\mathrm{av})}$ étant le champ avancé de la particule considérée. On voit facilement que les singularités de $\varphi^{(\mathrm{ret})}$ sont toutes contenues en $\varphi^{(\mathrm{sym})}$ parce que $\varphi^{(\mathrm{rad})}$ est une solution de l'équation d'onde homogène. Quand on construit $T^{\mu\nu}$ à partir de φ de la façon la plus simple, les singularités de $T^{\mu\nu}$ et de F^{μ} ne sont pas intégrables. On arrive, avec ces suppositions simples, à la théorie classique munie de toutes ses difficultés. Pour éviter cela, on complique la dépendance de $T^{\mu\nu}$ de φ. Voici comment on procède:

On peut toujours décomposer $T^{\mu\nu}$ et F^{μ} en deux parties:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu(\ldots)} + T^{\mu\nu(\mathrm{sym})} \\ F^{\mu} &= F^{\mu(\ldots)} + F^{\mu(\mathrm{sym})} \end{aligned} \tag{1,6}$$

où la deuxième partie ne dépend plus de $\varphi^{(\mathrm{inc})} + \varphi^{(\mathrm{rad})}$. On peut alors montrer que les singularités non intégrables sont contenues dans $T^{\mu\nu(\mathrm{sym})}$ et $F^{\mu(\mathrm{sym})}$. Ces termes du reste, ne contenant plus $\varphi^{(\mathrm{inc})}$, ne peuvent être que des fonctionnelles de la fonction $q = q(\lambda)$. Alors on ajoutera, au $T^{\mu\nu}$ de la théorie simple, un $T^{\mu\nu(0)}(x)$ (donnant par (1,2) un $F^{\mu(0)}$) tel qu'il fasse disparaître les singularités non intégrables. Il est possible de montrer qu'une infinité de fonctionnelles peuvent être choisies pour avoir cet effet. Nous discuterons ci-dessous en détail le procédé que nous avons employé dans

*) f^{μ} n'est donc pas un quadrivecteur, mais seulement $f^{\mu}\,d\,t = f^{\mu}\,dq^4 = d\,p^{\mu}_{(v)}$.

I pour faire ressortir son arbitraire. Nous avons en effet ajouté au $T^{\mu\nu}$ du champ Maxwellien, le $T^{\mu\nu(0)}$ d'un *champ* scalaire (au lieu d'une simple fonctionnelle) de façon à ce que les parties singulières des termes $T^{\mu\nu(\mathrm{sym})}$ dues à ces deux champs se compensent. La partie $T^{\mu\nu(\ldots)}$ du tenseur du champ scalaire produisait des effets qui ne sont donc nullement nécessaires pour que la théorie converge, pas plus qu'il n'est nécessaire de se restreindre à des $T^{\mu\nu(0)}$ dont l'énergie est positive. Ces considérations empruntées à I nous donnent un moyen d'arriver simplement à des fonctionnelles $T^{\mu\nu(0)}$ nécessaires. Il suffira, comme on le voit, de prendre la partie $T^{\mu\nu(\mathrm{sym})}$ d'un $T^{\mu\nu}$ fonction d'un champ Φ choisi de façon à avoir les mêmes singularités (mais en signe opposé) que le $T^{\mu\nu}$ simple dont on était parti. Le champ Φ différera ainsi du champ φ par la fréquence minimale $\varkappa$ de son rayonnement (= masse de repos de ses quanta). Nous appellerons dorénavant Φ le champ fonctionnel $\Phi^{(\mathrm{sym})}$ et seul ce champ doit intervenir en $T^{\mu\nu(0)}$ pour qu'il ait conservation d'énergie pour particule et champ φ*).

Pour établir les équations de mouvement, on procède en principe comme suit pour un champ φ scalaire (électrodynamique longitudinale si $\varkappa = 0$): on définit le tenseur le plus simple

$$T^{\mu\nu}_{(\varkappa)}(\varphi) = \partial^\mu \varphi\, \partial^\nu \varphi - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\alpha \varphi\, \partial^\alpha \varphi + \varkappa^2 \varphi^2) \tag{1,7}$$

(avec $\varkappa=0$) et le tenseur $T^{\mu\nu(0)}$ avec la même forme (au signe près) en fonction de Φ, mais avec un $\varkappa_1 \neq \varkappa$ non nul. De là, on tire

$$F^\mu = F^\mu(\varphi) + F^\mu(\Phi) = \partial^\mu \varphi \cdot (\Box - \varkappa^2)\, \varphi - \partial^\mu \Phi \cdot (\Box - \varkappa_1^2)\, \Phi = 0 \tag{1,8}$$

S'il n'y a pas de singularité, cette équation est satisfaite, si φ et Φ satisfont chacune séparément à une équation d'onde homogène. S'il y a une singularité $(\Box - \varkappa^2)\, \varphi$ doit être intégrable. Nous exprimons ceci en posant

$$(\Box - \varkappa^2)\, \varphi = (\Box - \varkappa_1^2)\, \Phi = -\, \varrho(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varepsilon\, \delta\, (x - q(\lambda)) \tag{1,9}$$

où $\delta\,(x)$ est la fonction δ quadridimensionnelle d'espace-temps ($[\delta] = \mathrm{cm}^{-4}$). L'équation de mouvement de la singularité suit alors de

$$f^\mu(t) = \int (dx)^3 \left(F^\mu(\varphi) + F^\mu(\Phi)\right) = \\ -\, (\dot{q}^{\,4})^{-1} \left(\varepsilon\, \partial^\mu \varphi\, (\vec{q}, t) - \varepsilon\, \partial^\mu \Phi\, (\vec{q}, t)\right) = 0 \tag{1,10}$$

*) Le choix d'une autre fonctionnelle $\Phi \neq \Phi^{(\mathrm{sym})}$ mais ayant les mêmes singularités (par ex. $\Phi = \Phi^{(\mathrm{ret})}$) a pour conséquence qu'une partie de l'énergie totale sera diffusée sous forme d'ondes $\Phi^{(\mathrm{ret})}$ loin de la particule. Dans la fonctionnelle $\Phi^{(\mathrm{sym})}$, la contribution de ces *ondes* Φ se réduit à une constante ajoutée à l'énergie-impulsion totale.

où $\partial^\mu \varphi(\vec{q}, t)$ est la valeur limite de la dérivée à l'endroit $\vec{x} = \vec{q}$. Moyennant les développements exposés en I (éq. (3,12), (3,15) et (3,22) de I), on tire de (1,10) dans le système de repos $\dot{\vec{q}} = 0$, si les amplitudes sont petites par rapport à la longueur d'onde de $\varphi^{(\mathrm{inc})}$ et pour $\varkappa = 0$:

$$m\,(\ddot{\vec{q}} + \lambda_1^2 \dddot{\vec{q}} + \cdots) - \tfrac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\dddot{\vec{q}} = \varepsilon \operatorname{grad} \varphi(\vec{q}, t) \qquad (1{,}11)^{*)}$$

ou

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\Sigma\,\alpha_i\,\varkappa_i\,; \quad \Sigma\,\alpha_i = -1$$

$$m\,\lambda_1^2 = -\tfrac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\Sigma\alpha_i\varkappa_i^{-1}; \;\cdots\cdot;\; m\lambda_n^{2n} = (\cdots)\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\Sigma\,\alpha_i\,\varkappa_i^{1-2n} \qquad (1{,}14)^{**)}$$

car en effet il n'est pas nécessaire de se restreindre à un $T^{\mu\nu(0)}$ formé d'un seul Φ, mais on peut prendre une série quelconque

$$T^{\mu\nu(0)} = \Sigma\alpha_i\, T^{\mu\nu}_{(\varkappa_i)}(\Phi^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \Sigma\alpha_i = -1 \qquad (1{,}15)$$

Cette généralisation correspond à prendre la fonctionnelle symétrique $T^{\mu\nu(0)}$ la plus générale, compensant les singularités du $T^{\mu\nu}(\varphi)$.

On a ainsi trouvé l'équation covariante la plus générale du mouvement d'une particule sous l'influence d'un champ $\varphi^{(\mathrm{inc})}$, satisfaisant aux principes de conservation. (1,11) est sa forme limite pour $\dot{\vec{q}} = 0$ et pour des petites amplitudes. Elle contient, comme on le voit, une série de constantes arbitraires et indépendantes les unes des autres, dont la première est ce qu'on a convenu à appeler

---

*) L'équation de mouvement qui suit de (1.10) n'admet pas la condition $\dot{q}_\alpha \dot{q}^\alpha < 0$ qu'on doit imposer à $q = q(\lambda)$ pour que les développements faits en I soient valables. Un terme

$$-\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varepsilon\, \dot{q}^\mu\, \dot{q}^\nu\, \delta(x - q(\lambda)) \qquad (1{,}12)$$

qu'on ajoute aux expressions (1.7) pour φ et pour Φ changera $F^\mu(\varphi)$ d'une telle manière que (1.10) devient

$$-f^\mu\, \dot{q}^4 = \varepsilon\,\partial^\mu\,\varphi + \varepsilon\,\dot{q}^\mu\,\dot{q}^\alpha\,\partial_\alpha\,\varphi + (\varepsilon\,\ddot{q}^\mu + \dot{\varepsilon}\,\dot{q}^\mu)\,\varphi - \text{termes en } \Phi = 0 \qquad (1{,}13)$$

(1,13) admet alors la solution $\dot{q}^\alpha\,\dot{q}_\alpha = -1$ pour autant que $\dot{\varepsilon} = 0$. ε doit donc être une constante. Les solutions où ε dépend de λ sont discutées au § 3.

**) Des équations (7,1) et (7,5) de I (corrigées en omettant le terme $-(1/3)(\omega^2 - \varkappa_1^2)^{3/2}$ en (7,5) dû au rayonnement Φ), il résulte que les séries en $\varkappa_i$, $\varkappa_i^{-1}$, $\varkappa_i^{-3}\ldots$ provenant de chaque $\Phi^{(i)}$ en (1,14) divergent à certains endroits. Il est alors plus exact de parler des *fonctions* η de $-(d/dt)^2$ au lieu des *séries* en $-(d/dt)^2$ en (1,11) et (1,17). Une discussion plus approfondi de $T^{\mu\nu(0)}$ paraîtra dans les C. R. Soc. Phys. Genève.

la masse de repos m et les autres définissent le « modèle » de l'électron. Le terme

$$\frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\dddot{\vec{q}} = m\lambda_0\dddot{\vec{q}} \tag{1,16}$$

est en général considéré comme une force à laquelle on donne le nom de *force de freinage**). En termes de m, elle introduit une constante λ_0 ($[\lambda] = \mathrm{cm}$) *indépendante du modèle.*

Voyons maintenant quelles relations il y a entre cette équation de mouvement (1,11) et les lois qui découlent de l'équation élémentaire de Newton. Pour cela, nous écrirons (1,11) dans la forme:

$$m\,\eta\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)\ddot{\vec{q}} - m\lambda_0\dddot{\vec{q}} = \vec{f}^{(\mathrm{inc})}(t) \tag{1,17}$$

On voit que la fonction $\eta(\omega^2)$ est une fonction paire de ω qu'on peut exprimer sous forme de série (cf. Note **), page 6) en ω^2, dont le premier terme est une constante égale à l'unité. $\vec{f}^{(\mathrm{inc})}$ peut être analysé par l'intégrale de Fourier

$$\vec{f}^{(\mathrm{inc})}(t) = \vec{f}^{(0)}\,\tau\,h(t) = \vec{f}^{(0)}\tau\int d\omega\, e^{-i\omega t}\,h(\omega) \tag{1,18}$$

En faisant la même analyse pour $\ddot{\vec{q}}$, on trouve

$$m\,\ddot{\vec{q}}(t) = \vec{f}^{(0)}\,\tau\int d\omega\, e^{-i\omega t}\frac{h(\omega)}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0\omega} \equiv \vec{f}^{(0)}\,\tau\,g(t) \tag{1,19}$$

comme solution particulière de l'équation de mouvement. En plus, en intégrant entre $t = -T$ et $t = +T$ ($\lim T \to \infty$), l'augmentation de la quantité de mouvement vaut

$$m\,\dot{\vec{q}}\,(+T) - m\,\dot{\vec{q}}\,(-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\,\vec{f}^{(\mathrm{inc})}(t) \tag{1,20}$$

car les intégrales (1,18) et (1,19) ont, dans cette limite, toutes les deux la valeur

$$\lim_{T=\infty} 2\int d\omega\,\frac{\sin\omega T}{\omega}\,\frac{h(\omega)}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0\omega}$$
$$= 2\pi\int d\omega\,\delta(\omega)\,\frac{h(\omega)}{\eta(\omega^2) + i\lambda_0\omega} = 2\pi\,h(0) \tag{1,21}$$

Si l'on normalise la fonction $h(t)$ à $\int dt\,h = 1$, la fonction $g(t)$ a la même propriété. $\vec{f}^{(0)}\,\tau\,g(t)$ est en somme une force fictive qu'il faudrait appliquer à la particule pour qu'avec la loi élémentaire

*) Dans la théorie de Maxwell, le facteur 1/3 est à remplacer par 2/3.

de Newton « force = masse fois accélération », on trouve le mouvement défini par (1,11). On voit alors que notre particule a une *prémonition* de ce qui va lui arriver à la suite de $h(t)$ et nous appellerons $g(t)$ la *fonction de prémonition* de l'électron. En effet, alors même que la vraie force $h(t)$ est encore nulle, la force fictive $g(t)$ ne l'est plus et l'accélération $\ddot{\vec{q}}(t)$ est par conséquent différente de zéro.

Comme nous venons de le voir, l'augmentation de la quantité de mouvement est indépendante de cette prémonition; elle est égale à celle qu'on calculerait si l'équation $m\ddot{\vec{q}} = \vec{f}^{(\mathrm{inc})}$ était juste. Par contre, le travail $A = \int_{-T}^{+T} dt\,(\vec{f}^{(\mathrm{inc})}, \dot{\vec{q}})$ fourni par la force incidente est toujours plus grand que l'énergie cinétique

$A^{(\mathrm{cin})} = \frac{1}{2} m\,(|\dot{\vec{q}}(+T)|^2 - |\dot{\vec{q}}(-T)|^2)$ acquise par l'électron. Ce qui est évident parce qu'une partie $A^{(\mathrm{rad})} = A - A^{(\mathrm{cin})}$ de l'énergie A est diffusée. Tandis que $A^{(\mathrm{cin})}$ est, à cause de (1,20), indépendant de $\eta(-d^2/dt^2)$, ce n'est pas le cas pour $A^{(\mathrm{rad})}$, qui dépend par conséquent du modèle.

Voyons encore comment la fonction de prémonition varie avec le modèle de l'électron dans le cas d'un choc $h(t) = \delta(t)$.

a) Le modèle de Dirac[1]: $\eta = 1$. On a alors

$$t < 0:\ g_0(t) = \lambda_0^{-1}\, e^{t/\lambda_0};\ t > 0:\ g_0(t) = 0 \tag{1,22}$$

b) Le modèle $\eta = 1 + \lambda_1^2\,\omega^2$: si $\lambda_1^2 > -\frac{1}{4}\lambda_0^2$, $g_0(t)$ est une exponentielle $e^{|\alpha|t}$ pour $t < 0$ et $e^{-|\beta|t}$ pour $t > 0$. Dans la limite $\lambda_1^2 \gg \lambda_0^2$ la fonction est symétrique, sinon la contribution majeure se fait pour des t négatives. Pour $\lambda_1^2 < -\frac{1}{4}\lambda_0^2$ le $g_0(t)$ de (1,22) montre des oscillations.

c) Le modèle quantique: Si l'on prend

$$\eta(\omega^2) = \tfrac{1}{2}\,(\lambda_0\,\omega \sin 2\,\lambda_0\,\omega)\,(\sin \lambda_0\,\omega)^{-2}$$

avec donc

$$2\,\pi\, g_0(\omega) = (\eta(\omega^2) + i\lambda_0\,\omega)^{-1} = \frac{e^{-2i\lambda_0\,\omega} - 1}{-2\,i\,\lambda_0\,\omega} \tag{1,23}$$

on a

$$-2\,\lambda_0 < t < 0:\ g_0 = (2\,\lambda_0)^{-1};\ t < -2\,\lambda_0 \text{ et } t > 0:\ g_0(t) = 0 \tag{1,24}$$

L'importance de ce dernier modèle (à fonction de prémonition différente de zéro et constante dans un intervalle fini $2\,\lambda_0$) se montrera surtout en théorie quantique. C'est pourquoi nous lui donnons le nom de *modèle quantique.*

§ 2. La diffusion du rayonnement.

Pour calculer $A^{(\mathrm{rad})}$ diffusé par un électron sur lequel tombe une onde plane périodique $\varphi^{(\mathrm{inc})}$, on procède normalement par la méthode suivante: 1⁰ détermination du mouvement $\vec{q}(t)$ et 2⁰ détermination du champ émis $\varphi^{(\mathrm{ret})}(\vec{x}, t)$. Nous exécuterons ces calculs dans l'espace de Fourier, ce qui facilitera la comparaison des résultats avec ceux de la théorie des quanta. Soit V un volume de périodicité spatiale. Alors, toute fonction $\varphi(\vec{x}, t)$ peut être décomposée en

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi(x) = \sum_{\vec{\mu}} (2\, V \mu^4)^{-1/2} \left(c_{\vec{\mu}}(t)\, e^{i(\mu, x)} + c^*_{\vec{\mu}}(t)\, e^{-i(\mu, x)}\right) \tag{2,1}$$

avec

$$(\mu, x) = \mu_\alpha x^\alpha = (\vec{\mu}, \vec{x}) - \mu^4 t; \quad \mu^4 = +\sqrt{\varkappa^2 + |\vec{\mu}|^2} \tag{2,2}^{*)}$$

Le *champ incident* $\varphi^{(\mathrm{inc})}$, étant une solution de l'équation homogène, détermine $c^{(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}} = \mathrm{const.}$ (une deuxième solution $c^{(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}} = \mathrm{const}\; e^{2i\mu^4 t}$ ne fait qu'intervertir c et c^*). Le mouvement de l'électron est alors représenté par la somme de Fourier ($\omega = \mu^4$):

$$m\, \ddot{\vec{q}}(t) = \sum_{\vec{\mu}} \left(\frac{i\, \varepsilon\, \vec{\mu}}{\sqrt{2\, V\, \omega}} \frac{1}{\eta(\omega^2) + i \lambda_0 \omega}\, c^{(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}}\, e^{-i\omega t} + \mathrm{conj.} \right) \tag{2,3}$$

Le deuxième pas se fait en écrivant pour (1,16) la série

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{x}, t) &= \varepsilon\, \delta(\vec{x} - \vec{q}(t)) = \varepsilon\, \delta(\vec{x}) - \varepsilon\, (\vec{q}, \operatorname{grad} \delta(\vec{x})) + \ldots \\ &= \varepsilon \sum_{\vec{k}} \frac{1}{V} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} - \varepsilon \sum_{\vec{k}} \frac{i\, (\vec{k}, \vec{q}(t))}{V} e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + \ldots \end{aligned} \tag{2,4}$$

que l'on peut substituer en (1,9) pour calculer $\varphi^{(\mathrm{ret})}$. L'équation pour les coefficients $c^{(\mathrm{ret})}_{\vec{\mu}}, (t)$ est alors dans l'approximation linéaire

$$\ddot{c}^{(\mathrm{ret})}_{\vec{\mu}'} - 2\, i\, \omega'\, \dot{c}^{(\mathrm{ret})}_{\vec{\mu}'} = - \sum_{\vec{\mu}} \frac{\varepsilon^2\, (\vec{\mu}', \vec{\mu})}{m\, \omega^2\, V} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \frac{e^{i(\omega' - \omega) t}}{\eta(\omega^2) + i\, \lambda_0\, \omega}\, c^{(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}} \tag{2.5}$$

Nous intégrons (2,5) avec la limite $c^{(\mathrm{ret})}_{\vec{\mu}}(-T) = 0$, et substituons pour $\eta(\omega^2)$ la fonction de pressentiment $g_0(\omega)$. Le résultat est

$$c^{(\mathrm{ret})}_{\vec{\mu}'}(+T) = - i \sum_{\vec{\mu}} \frac{2\, \varepsilon^2\, (\vec{\mu}', \vec{\mu})}{m\, \omega^2 (\omega + \omega')\, V} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\, 2\, \pi\, g_0(\omega) \frac{\sin(\omega' - \omega)\, T}{\omega' - \omega}\, c^{(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}} \tag{2,6}^{**)}$$

---

*) Nous ne discuterons que le cas $\varkappa = 0$, mais il sera avantageux de garder un $\varkappa \neq 0$ dans les formules générales.

**) (2,6) ne contient pas le champ statique dû au 1er terme de (2,4). Ce champ statique est donc à ajouter partout.

Si l'onde incidente ne contenait qu'une seule fréquence ω, on s'aperçoit qu'il en est de même pour l'onde diffusée et pour $T = \infty$. En particulier, si l'onde incidente est une onde plane ne contenant qu'une seule fréquence, son courant d'énergie est représenté par T^{i4}

$$\vec{T}\cdot{}^4 = \vec{\mu}\,\frac{c^{*\,(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}}\,c^{(\mathrm{inc})}_{\vec{\mu}}}{V} = \vec{\mu}\,\frac{N_{\vec{\mu}}\,(-T)}{V}\,. \tag{2,7}$$

L'énergie rayonnée dans une direction $\vec{\mu}'$ contenue dans un élément d'angle spatial $d\,\Omega' = d\,\varphi'\,d\,(\cos\vartheta')$ est

$$dA^{(\mathrm{rad})}\,(+T) = \sum_{\vec{\mu}'\,(d\,\Omega')} \mu'^4\,c^{(\mathrm{ret})*}_{\vec{\mu}'}\,c^{(\mathrm{ret})}_{\vec{\mu}'}$$

$$= \frac{V}{8\,\pi^3}\,d\Omega' \int_0^\infty d\,\omega'\,\omega'^3\,N_{\vec{\mu}'}\,(+T) \tag{2,8}$$

avec $N_{\vec{\mu}} = c^*_{\vec{\mu}}\,c_{\vec{\mu}}$. La section d'efficacité est définie par le rapport entre $dA^{(\mathrm{rad})}$ et $|\,\vec{T}\cdot{}^4\,|$ divisé par la durée $2\,T$ entre $t = -T$ et $t = +\mathrm{T}$, soit

$$dQ' = \frac{dA^{(\mathrm{rad})}}{2\,T\,|\,T\cdot{}^4\,|} = d\Omega'\,(3\,\lambda_0)^2\,\frac{(\cos\vartheta')^2}{\eta\,(\omega^2)^2 + \lambda_0^2\,\omega^2} \tag{2.9}$$

Elle vaut donc $d\Omega'\,(3\,\lambda_0)^2\,(\cos\vartheta')^2$ pour des fréquences $\omega \ll \lambda_i^{-1}$. Pour des fréquences comparables aux λ_i son comportement dépend du modèle $\eta\,(\omega^2)$.

Nous écrirons le résultat pour les deux modèles suivants:

a) Modèle de Dirac:

$$dQ' = d\Omega'\,9\,(\cos\vartheta)^2\,\omega^{-2}\,\left(\lambda_0\,\omega/\sqrt{1+\lambda_0^2\,\omega^2}\right)^2 \tag{2,10}$$

b) Modèle quantique:

$$dQ' = d\Omega'\,9\,(\cos\vartheta')^2\,\omega^{-2}(\sin\lambda_0\,\omega)^2 \tag{2,11}$$

Dans les deux cas, la section disparaît pour des hautes fréquences proportionnellement à ω^{-2}. Mais, alors qu'avec le modèle de Dirac le décroissement est monotone, avec le « modèle quantique », cette diminution est multiplée par un facteur périodique. Cependant, la théorie des quanta nous montre qu'avant d'atteindre les fréquences où ces formules deviennent très différentes ($\lambda_0\,\omega \sim 1$), il devrait se produire des gerbes, ce qui change évidemment totalement les sections d'efficacité. En effet, cette théorie pour des fréquences suffisamment hautes ne permet plus des amplitudes suffisamment petites pour réaliser la condition

$$|\omega\,\vec{q}\,|^2 \cong |\,\dot{\vec{q}}\,|^2 \cong |\,\omega^{-1}\,\ddot{\vec{q}}\,|^2 \ll 1 \tag{2,12}$$

dont nous nous sommes servis pour rendre linéaires les équations du mouvement. Dans ce cas, en essayant de résoudre rigoureusement le problème sans la restriction (2,12) des petites amplitudes, on voit apparaître dans le rayonnement diffusé des fréquences $\omega', \omega'', \ldots$ sous multiples de ω. Du point de vue des quanta, ces fréquences correspondent à la décomposition du quantum incident $h\omega$ en une série de quanta $h\omega' + h\omega'' + \ldots = h\omega$. Calculons pour quelles fréquences ces effets commencent à ne plus être négligeables. Substituons dans (2,12) l'équation (2,3); on trouve

$$| \omega^{-1} \ddot{\vec{q}} |^2 \cong 6\pi \lambda_0 \omega^{-1} m^{-1} (N_{\vec{\mu}}/V) \tag{2,13}$$

Cherchons alors pour quelles valeurs de ω cette expression est de l'ordre de l'unité. L'équation (2,7) montre que, pour les quanta, $N_{\vec{\mu}}/V$ est le nombre de quanta incidents par unité de volume*). Le quantum $h\omega$, au moment où il réagit avec l'électron ponctuel, est localisé par conséquent avec le maximum de précision et par conséquent son Δq est de l'ordre de grandeur de ω^{-1} et donc $N_{\vec{\mu}}/V \sim \omega^{-3}$. Introduisant la longueur d'onde de Compton de l'électron $\lambda_c = h/mc = m^{-1}$ (avec nos unités) (2,12) devient $6\pi \lambda_0 \lambda_c \omega^2 \ll 1$.

Si nous avons pour λ_c une valeur 3×137 fois plus grande que λ_0, on voit qu'il faudra tenir compte des équations quadratiques pour $\lambda_0 \omega \sim 1/100$, alors que les deux formules (2,10) (2,11) ne commencent à différer (effet du modèle et du freinage) que lorsque $\lambda_0 \omega \cong 1$. Remarquons enfin, que la fonction $\eta(\omega^2)$ détermine d'une manière invariante les termes non linéaires omis en (1,11).

§ 3. Dispersion et largeur de raie.

Pour étudier la diffusion d'une onde par un électron lié, par exemple, à un noyau, on ne peut pas employer le procédé des paragraphes précédents, car, comme on le sait, la théorie classique ne donne pas de solution stable pour ce problème. Il nous faut donc construire un modèle d'atome correspondant au modèle des oscillateurs en théorie classique de la dispersion. L'atome sera une singularité du champ $x = q(\lambda)$ qui aura un degré de liberté de plus que l'électron. En électrodynamique, ce degré de liberté supplémentaire est le moment électrique $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(t)$ resp. dans une théorie covariante, les six composantes d'un tenseur $\sigma^{\mu\nu}(\lambda) = -\sigma^{\nu\mu}(\lambda)$ associé à cette singularité. En électrodynamique longitudinale, il nous est possible

*) Il convient alors de choisir les unités de telle manière que la constante de Planck soit l'unité de l'action ($h = h_{\text{Planck}}/2\pi = 1$; $[\varphi] = [m] = [\omega] = \text{cm}^{-1}$).

d'introduire un degré de liberté scalaire $\sigma = \sigma(\lambda)$ dans (1,9) et de l'écrire

$$\varrho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varepsilon\sigma(\lambda)\, \delta(x - q(\lambda)) \tag{3,1}$$

Un raisonnement semblable à celui du paragraphe 1 nous donnera les équations de mouvement pour $\vec{q} = \vec{q}(t)$ et pour la variable intérieure. Dans le cas où l'atome est très lourd ($\ddot{\vec{q}} \cong \dddot{\vec{q}} \cong \ldots \cong 0$) et dans son système de repos ($\dot{\vec{q}} = 0$), cette équation s'écrit pour des petites amplitudes

$$\eta\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)\ddot{\sigma} + \omega_0^2\,\sigma + \lambda_0\,\omega_0^2\,\dot{\sigma} = f^{(\mathrm{inc})}(t) \tag{3,2}$$ *)

Les constantes λ_i qui interviennent sont encore une fois arbitraires et déterminent le modèle de l'atome. (3,2) est l'équation linéaire la plus générale qui satisfait au conditions de covariance et de

---

*) L'équation (1,13) (de la note *) p. 6) montre que la condition $\dot{q}_\alpha \dot{q}^\alpha = -1$ admet en plus de la solution $\dot{\varepsilon} = 0$ une solution

$$\dot{\varepsilon}(\varphi(\vec{q},t) + \Sigma\,\alpha_i\,\Phi^{(i)}(\vec{q},t)) = 0 \tag{3,3}$$

si $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon\sigma(\lambda)$ est une variable intérieure. Développant encore une fois le champ $\varphi(\vec{x},t)$ et les fonctionnelles $\Phi^{(i)}(\vec{x},t)$ suivant le procédé indiqué en I pour $\vec{x} = \vec{q}$, (3,3) prend la forme

$$\mu_0\sigma + \mu_1^{-1}(\ddot{\sigma} + \lambda_1^2\,\dddot{\sigma} + \ldots) + \frac{\varepsilon^2}{4\pi}\,\dot{\sigma} = \varepsilon\,\varphi^{(\mathrm{inc})}(\vec{q},t) \tag{3,4}$$

avec

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon^2}{4\pi}\,\Sigma\alpha_i\,\varkappa_i\,;\ \mu_1^{-1} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\,\Sigma\,\alpha_i\,\varkappa_i^{-1};\ \mu_{\overset{-1}{1}}\lambda_{\overset{2n}{n}} = \ldots \tag{3,5}$$

dans le système $\dot{\vec{q}} = 0$. Pour imposer cette dernière condition, il faut définir le terme de masse ($m\ddot{\vec{q}}$) dans l'équation de mouvement pour $\vec{q}(t)$ en introduisant une autre série de champs fonctionnels $\Psi^{(k)}(x)$ satisfaisant à (1,9) avec $\varepsilon = \mathrm{const} = \varepsilon_0$ dont les coefficients sont soumis à $\Sigma\,\beta_k = 0$. $m, m\,\lambda_1^2, \ldots$ sont alors définis par

$$m = \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\,\Sigma\,\beta_k\,\varkappa_k \ \text{etc.} \tag{3,6}$$

pour autant que $\sigma(t) \sim 0$. L'étude de $p^\alpha = \int (dx)^3\, T^{\alpha 4}(\varphi, \Psi^{(k)}, \Phi^{(i)})$ montre alors que le facteur $m'(\sigma, \dot{\sigma}, \ldots)$ en $p^\alpha = m'\,\dot{q}^\alpha$ diffère du $m'(0, 0, \ldots) = m$ en (3,6) par l'adjonction de termes proportionnels à σ^2 et $\dot{\sigma}^2$ (pour autant que $\eta \sim 1$). Pour qu'à une excitation du degré de liberté intérieure corresponde une augmentation de l'énergie portée par la particule, il faut que μ_0 et μ_1 soient des constantes positives. (3,2) dérive alors de (3,4) si l'on pose

$$\omega_0^2 = \mu_0\mu_1\,;\ \lambda_0 = \frac{\varepsilon^2}{4\pi\mu_0}\,;\ f^{(\mathrm{inc})}(t) = \varepsilon\,\mu_1\,\varphi^{(\mathrm{inc})}(0,t) \tag{3,7}$$

conservation*). Comme précédemment, la fonction $\eta(\omega^2)$ permet de calculer comment l'atome est excité sous l'influence de la force $f^{(\mathrm{inc})}(t)$. Au lieu d'une prémonition, on trouve ici, à cause du terme $\omega_0^2\,\sigma$, une *fonction de mémoire*: l'atome continue à vibrer alors que la force a cessé d'agir. Calculons ce qui arrive dans quelques cas simples: Une force $f^{(\mathrm{inc})}(t) = f^{(0)}\,\tau\,h(t)$ produira un mouvement $\sigma(t) = f^{(0)}\,g(t)$ dont la transformée de Fourier est

$$g(\omega) = \frac{h(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2\,\eta(\omega^2) - i\,\omega_0^2\,\omega\,\lambda_0} \tag{3,12}$$

Considérons la fonction de mémoire $g_0(t)$ lorsque la force est un choc.

a) Le modèle simple: $\eta = 1$.

$$t < 0:\ g_0(t) = 0\,;\ t > 0:\ g_0(t) = \omega_0'^{-1}\,e^{-t/2\lambda}\sin\omega_0' t \tag{3,13}$$

avec

$$\lambda^{-1} = \omega_0^2\lambda_0\,;\quad \omega_0' = \omega_0\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}(\lambda_0\,\omega_0)^2} \sim \omega_0 \tag{3,14}$$

et avec une transformée

$$2\,\pi\,g_0(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 - i\,\omega_0^2\,\omega\,\lambda_0)^{-1} \xrightarrow[\omega\sim\omega_0]{} (2\,\omega_0)^{-1}(\omega_0 - \omega - i\,(2\,\lambda)^{-1})^{-1} \tag{3,15}$$

Le choc a ainsi produit un rayonnement monochromatique ($\omega \cong \omega_0$), qui s'amortit exponentiellement avec une vie moyenne de λ^{-1}. L'analyse spectrale montre une largeur de raie spectrale (Dämpfungsbreite) de $\Delta\,\omega = (2\,\lambda)^{-1}$ et une énergie totale proportionnelle à

$$2\,\pi\int d\omega\,|\,g(\omega)\,|^2 \cong (4\,\pi\,\omega_0^2)^{-1}\int dz\,(z^2 + (2\,\lambda)^{-2})^{-1} = \lambda/2\,\omega_0^2 \tag{3.16}$$

Mais il est évident qu'en plus de ce modèle simple, d'autres modèles peuvent être conçus, qui seront caractérisés par d'autres lois d'amortissement et d'autres formes de raies spectrales.

---

*) Dans la théorie Maxwellienne $\dot q_\alpha\,\dot q^\alpha = -1$ est satisfait automatiquement. Les équations (1,10) pour f^μ ont la forme

$$-f^\mu(\varphi^{\alpha\beta}) = \int (dx)^3\,\varphi^{\mu\nu}\,\varrho_\nu \tag{3,8}$$

où $\varphi^{\mu\nu} = -\varphi^{\nu\mu}$ est le tenseur antisymétrique du champ et où

$$\varrho^\alpha(x) = \int d\lambda\,\varepsilon_0\,\dot q^\alpha\,\delta(x - q(\lambda)) + \int d\lambda\,\varepsilon\,\sigma^{\alpha\beta}(\lambda)\,\partial_\beta\,\delta(x - q(\lambda)) \tag{3,9}$$

est le courant. Pour un atome à charge nulle ($\varepsilon_0 = 0$) et une masse grande, (1,10) peut être satisfait en posant

$$\varphi^{\alpha\beta}(\vec q, t) + \Sigma\,\alpha_i\,\Phi^{(i)\,\alpha\beta}(\vec q, t) = 0 \tag{3,10}$$

($\Phi^{(i)\,\alpha\beta}$ sont des fonctionnelles d'un champ de Yukawa tensoriel). Le développement suivant *I* fournit six équations du type (3,2), une pour chaque composante de $\sigma^{\alpha\beta}$, mais où le dernier terme est à remplacer par

$$\lambda_0\,\omega_0^2\,\dot\sigma^{\alpha\beta} \to -\lambda_0\,\dddot\sigma^{\alpha\beta} \tag{3,11}$$

Nous définissons en particulier:

b) *Le modèle quantique*, par la forme analogue à (1,23):

$$\eta(\omega^2) = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega_0}{\omega}\,\frac{\omega_0\lambda_0 \sin\left(2\,\omega_0^2\,\omega\lambda_0/\omega_0^2 - \omega^2\right)}{2\left(\sin\left(\omega_0^2\,\omega\lambda_0/\omega_0^2 - \omega^2\right)\right)^2} \tag{3,17}$$

donnant lieu à un

$$2\pi\, g_0(\omega) = (2\,i\,\omega_0^2\,\omega\,\lambda_0)^{-1}\,\left(e^{2\,i\,\omega_0^2\,\omega\,\lambda_0\,(\omega_0^2-\omega^2)^{-1}} - 1\right) \tag{3,18}$$

Loin du centre de la raie, les deux premiers termes de la transformée (3,18)

$$2\,\pi g_0(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} + i\,\omega\,\lambda^{-1}\,(\omega_0^2 - \omega^2)^{-2} + \ldots \tag{3,19}$$

sont identiques à ceux du développement de (3,15). De même, l'intensité totale $2\,\pi \int d\omega\,|\,g(\omega)\,|^2 \cong \lambda^2\,\pi^{-1}\omega_0^{-2} \int dz\,(\sin(1/2\,\lambda z))^2 = \lambda/2\,\omega_0$ est égale à celle du modèle simple (3,16). Mais la fonction $g_0(t)$ elle-même montre maintenant un amortissement Besselien

$t < 0 : g_0(t) = 0\,;$

$$t > 0 : g_0(t) \cong (2\,\omega_0\,\sqrt{\lambda^{-1}t})^{-1}\,J_1\,(2\,\sqrt{\lambda^{-1}t})\sin\omega_0 t \tag{3,20}$$

Que le modèle général, en particulier le modèle considéré, ait des battements superposés à son amortissement et diffère ainsi fortement de l'amortissement exponentiel, ne doit guère nous étonner: En regardant de près notre $\eta(\omega^2)$, on s'aperçoit que, pour $\omega \sim \omega_0$, η diffère fortement de l'unité. Ceci équivaut au modèle non relativiste d'un atome, qui s'étend sur une région très grande. Ainsi il peut réabsorber même des ondes émises dans un passé lointin.

§ 4. Propriétés générales du modèle.

Nous voulons démontrer que nos modèles peuvent être caractérisés par une relation

$$\Psi(T) = S(T)\,\Psi(-\,T) \tag{4.1}$$

où $\Psi(t)$ est un vecteur hermitien dont les composantes sont définies par

$$\Psi(\vec{\mu}, t) = c_{\vec{\mu}}(t)\,;\;\; \Psi(\vec{\mu}, t) - \Psi(\vec{\mu}, -\,T) = c_{\vec{\mu}}^{(\mathrm{ret})}(t) \tag{4.2}$$

et où $S(t)$ est un opérateur défini par une matrice $S(t)\,(\vec{\mu}'/\vec{\mu})$ opérant sur $\Psi(-\,T)$. La comparaison entre (4,1), (4,2), et (2,6) montre que les éléments de $S(T) - 1$ sont, dans la limite $T \to \infty$

$$(S(T)-1)\,(\vec{\mu}'/\vec{\mu}) = -\,i\,12\pi\lambda_0\,\omega^{-1}\,2\pi g_0(\omega)\cos\vartheta'\cdot\pi\,V^{-1}\,\delta(\omega'-\omega) \tag{4,3}$$

Nous voulons démontrer que $S(T)$ est un opérateur unitaire. Cette condition s'exprime par

$$S^* S = (S^* - 1)(S - 1) + (S^* - 1) + (S - 1) + 1 = 1 \quad (4.4)$$

Or, pour deux matrices de la forme (4,3)

$$\alpha(\vec{\mu}'/\vec{\mu}) = \alpha(\omega) \cos \vartheta' \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' - \omega)$$

et $\beta(\vec{\mu}'/\vec{\mu}) = b(\omega) \cos \vartheta' \ldots$ la relation opératorielle est valable

$$\alpha\beta = \alpha' \cdot \beta = \beta' \cdot \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha' = \tfrac{1}{3}\, \alpha(\omega)\, \omega^2 (2\pi)^{-1} \quad (4,5)$$

où α' et β' sont des nombres. En vertu de (4,5), la relation (4,4) devient une condition à imposer à la fonction de prémonition

$$2\lambda_0 \omega \mid 2\pi g_0(\omega) \mid^2 - i(2\pi g_0(\omega) - 2\pi g_0(\omega)^*) = 0 \quad (4,6)$$

Or la première équation (1,23) qui définit $2\pi g_0(\omega)$ en termes de la fonction du modèle général $\eta(\omega^2)$ montre que (4,6) est toujours satisfaite.

La forme explicite de l'opérateur S peut être donnée sous la forme $S = S(\alpha(T))$ en termes d'un opérateur

$$\alpha(T)(\vec{\mu}'/\vec{\mu}) = \varepsilon^2 \cos \vartheta' (m\omega)^{-1} \pi \cdot V^{-1} \delta(\omega' - \omega);$$
$$\alpha' = \tfrac{1}{3}\, \varepsilon^2 \omega (2\pi m)^{-1} = 2\lambda_0 \omega \quad (4,7)$$

$S(\alpha)$ est une série*) qui a les formes suivantes: 1° modèle de Dirac:

$$S(\alpha(T)) = (1 - \tfrac{1}{2} i\alpha(T))(1 + \tfrac{1}{2} i\alpha(T)^{-1} = 1 - i\alpha(T) + \ldots \quad (4,8)$$

2° modèle quantique:

$$S(\alpha(T)) = e^{-i\alpha(T)} = 1 - i\alpha(T) + \ldots \quad (4,9)$$

Le même procédé peut être appliqué à la théorie de l'atome. L'opérateur α est alors donné par*)

$$\alpha(T)(\vec{\mu}'/\vec{\mu}) = -\varepsilon^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \omega_0 \omega^{-1} \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' - \omega)$$
$$\alpha' = -\varepsilon^2 \omega \omega_0 (2\pi(\omega_0^2 - \omega^2))^{-1} = -2\omega\omega_0^2 \lambda_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \quad (4,10)$$

La relation unitaire entre $\Psi(T)$ et $\Psi(-T)$ permet déjà à ce point d'envisager l'interprétation quantique de la théorie: Par la normalisation

$$(\Psi(-T), \Psi(-T)) = \sum_{\vec{\mu}} \Psi(\vec{\mu}, -T)^* \Psi(\vec{\mu}, -T) = 1 \quad (4,11)$$

---

*) Pour calculer les séries $S - 1$ on utilise la relation $\alpha^n = \alpha'^{n-1} \cdot \alpha$. Pour calculer α' dans le cas (4,10), équation (4,5) doit être appliquée sans le facteur 1/3. (4,10) n'est valable que si on choisit $\mu_1 = \mu_0$ en (3,7).

nous interprétons $\Psi(\vec{\mu}, \pm T)$ comme l'amplitude de probabilité que le quantum incident soit à l'instant $\pm T$ dans un état caractérisé par l'onde plane $\vec{\mu}$. Ceci nous permet de préciser la notion de correspondance. Nous appellerons une théorie quantifiée de l'électron une théorie correspondant à une théorie classique si, dans la limite où l'impulsion $h\omega = \omega$ peut être négligée par rapport à m, les formules (4,8) resp. (4,9) et (4,7) sont valables.

De même, une théorie de l'atome quantifié correspond à une théorie classique si, sans le changement de fréquence dû à l'effet Raman, les formules classiques (4,10) et (4,8) resp. (4,9) sont vérifiées.

§ 5. La notion de causalité dans le « modèle quantique ».

Du fait que notre « modèle quantique » de l'électron éprouve une prémonition de ce qui va lui arriver, une certaine révision de notre conception de causalité s'impose. Prenons un exemple: Dans la théorie ordinaire, l'état du champ et de l'électron, à un instant $t = -T$ (caractérisé par φ, $\partial_t \varphi$, $\vec{q}$ et $\dot{\vec{q}}$) détermine l'état du système « champ plus particule » pour toute autre époque t antérieure ou postérieure à $-T$. Si nous considérons symboliquement cet ensemble de nos connaissances par $\Psi(t)$ (où $\Psi(t)$ est une grandeur ayant en plus des $2 \times \infty^3$ composantes du vecteur hermitien $\Psi(\vec{\mu}, t)$, six composantes indiquant les valeurs de $\vec{q}(t)$ et de $\dot{\vec{q}}(t)$), ce déterminisme s'écrit sous la forme

$$\Psi(t) = S(t)\, \Psi(-T); \; S(-T) = 1 \tag{5,1}$$

$S(t)\Psi(-T)$ est une fonctionnelle de $\Psi(Q, -T)$, dont la variable Q représente les $2 \times \infty^3 + 6$ points.

Dans n'importe quelle théorie évitant les divergences, le problème est beaucoup plus complexe: Il faut décomposer $\varphi(-T)$ en $\varphi^{(\mathrm{inc})}(-T) + \varphi^{(\mathrm{ret})}(-T)$, ce qui n'est possible que si le mouvement $\vec{q} = \vec{q}(t)$ pour toute époque antérieure à $-T$ est connu. Si par exemple $\vec{q} = \dot{\vec{q}} = 0$ pour $t = 0$, et qu'on suppose que cela est vrai pour $t < -T$, $\varphi^{(\mathrm{ret})}$ est alors le potentiel statique. Une analyse de φ et de $\partial_t \varphi$ pour $t = -T$ permet de calculer $\varphi^{(\mathrm{inc})}$. Une fois $\varphi^{(\mathrm{inc})}(-T)$ et $\partial_t \varphi^{(\mathrm{inc})}(-T)$ connu, les équations de § 1 déterminent $\varphi(\vec{x}, t)$ et $\vec{q}(t)$ pour n'importe quelle époque *postérieure*. Mais elles permettent aussi de calculer le mouvement $\vec{q}(t)$ pour la période *antérieure* à $-T$. Or on s'apercevra que, en général, cette trajectoire calculée différera de l'orbite $\dot{\vec{q}} = 0$ supposée connue. Il faudra donc employer une méthode « self consistante » pour trouver la solution du problème.

Un exemple particulièrement simple de ce procédé est celui dans lequel $\varphi(-T)$ se décompose en une partie statique et un paquet d'onde $\varphi^{(\mathrm{inc})}$ tel que pour tout t antérieur à $-T$, il a toujours une amplitude nulle dans le volume d'une sphère de rayon $2\lambda_0$ autour du point $\vec{x} = \vec{q} = 0$. La solution est alors « self consistante » pour le modèle quantique. Il est bien évident que, si les conditions étaient données pour $-T = -\infty$, le problème ne se poserait pas.

§ 6. La quantification.

En théorie des quanta, l'ensemble de nos connaissances $\Psi(t)$ n'est plus représenté par les $2 \times \infty^3 + 6$ nombres $c_{\vec{\mu}}(t)$, $\vec{q}(t)$ et $\dot{\vec{q}}(t)$, mais par une amplitude de probabilité, *fonction* de $\frac{1}{2}(2 \times \infty^3 + 6)$ variables, par exemple des nombres des quanta $N_{\vec{\mu}} = c_{\vec{\mu}}{}^* c_{\vec{\mu}}$ et des composantes de l'impulsion $m\dot{\vec{q}} = \vec{k}$. La quantification relativiste montre en outre qu'il n'est pas possible de n'avoir qu'une seule particule. Il convient donc d'introduire comme variables les $N_{\vec{k}}$ indiquant le nombre de particules à impulsion $\vec{k}$. $\Psi(t)$ est maintenant un vecteur dont les composantes $\Psi(\ldots, N_{\vec{\mu}}, \ldots; \ldots, N_{\vec{k}}, \ldots; t)$ sont les amplitudes de probabilité qu'à l'époque t, $N_{\vec{\mu}}$ quanta du champ $\varphi(x)$ soient présents dans l'onde plane $\vec{\mu}$ (ayant chacun une impulsion $\vec{\mu}$) et $N_{\vec{k}}$ particules soient présentes ayant une impulsion $\vec{k}$. Les considérations du § 5 nous montrent en outre que les conditions initiales ne peuvent être posées que pour $t = -T = -\infty$. La covariance de la théorie par rapport à toute transformation unitaire dans l'espace de Hilbert demande que $S(t)$ en (5,1) soit un opérateur linéaire et unitaire. Alors (5,1) devient

$$\Psi(t) = S(t)\Psi(-T) = e^{-i\alpha(t)}\Psi(-T)\,; \quad \alpha(-T) = 0\,; \quad \alpha = \alpha^* \tag{6,1}$$

qui est la généralisation de (4,1) pour des époques t finies.

Pour établir une théorie quantifiée, on se sert du principe de correspondance. Rappelons ce principe pour le cas de la théorie ordinaire: La théorie classique relie des quantités $a, b, \ldots, H, \ldots$ de façon à ce que des relations du type

$$\dot{a}(t) = f(a(t), b(t), \ldots) \tag{6,2}$$

existent. A tout $a(t)$ la théorie des quanta fait correspondre un opérateur $a(t)$ (par exemple $\varphi(\vec{x}, t) = \ldots c_{\vec{\mu}} \exp(i((\vec{\mu}, \vec{x}) - \mu^4 t)) \ldots$) dépendant *explicitement du temps*. Soit $\partial_t a(t)$ (par exemple $\partial_t \varphi = \ldots\ldots - i\mu^4 c_{\vec{\mu}} \exp(i(\ldots)) \ldots$) la *dérivée explicite* de cet opérateur. Alors, pour son espérance mathématique, définie par $\overline{a(t)} = (\Psi(t), a(t)\Psi(t))$, on a la relation

$$\dot{\overline{a(t)}} = \overline{\partial_t a(t)} + i\,\overline{[H(t), a(t)]} \equiv \overline{f(a(t), b(t), \ldots)} \tag{6,3}$$

à cause de (5,1) ou (6,1), si l'opérateur H est défini par

$$H(t) = i\partial_t S(t) \cdot S(t)^{-1} = \frac{1}{1!}\,\partial_t \alpha(t) - \frac{1}{2!}\, i\,[\alpha(t),\, \partial_t \alpha(t)] + \frac{1}{3!}\, i\,[\alpha(t),\, i\,[\alpha(t),\, \partial_t \alpha(t)]] - \ldots \tag{6,4}$$

Pour qu'il y ait correspondance, l'opérateur H doit être tel que $\overline{f(a, b, \ldots)}$ soit l'espérance mathématique de la fonction $f(a, b, \ldots)$ de la théorie classique. Or l'indépendance de f de $-T$ a pour conséquence l'indépendance de $H(t)$ du temps initial $-T$. Ainsi (5,1) et (6,1) dégénèrent en une équation de Schrödinger

$$\partial_t \Psi(t) = -iH(t)\Psi(t) \tag{6,5}$$

ce qui n'est vrai que pour la théorie ordinaire.

Pour aller plus loin, nous décrirons le champ de matière par $u(\vec{x}, t)_A$, opérateurs dont la dépendance temporelle explicite est réglée par

$$(\Box - m_A^2)\, u_A = 0 \tag{6,6}$$

On le décompose de façon analogue à $\varphi(x)$ en

$$u(x)_A = \sum_{\vec{k}} (2\,V k^4)^{-1/2} (a_{\vec{k}A}\, e^{i(k,x)} + a^*_{\vec{k}A}\, e^{-i(k,x)}) \tag{6,7}$$

avec $k^4 = +\sqrt{m_A^2 + |\vec{k}|^2}$. Puis, on vérifie alors que les paquets d'ondes d'un champ classique u_A satisfaisant à

$$\Delta u_A - m_A^2 u_A - \ddot{u}_A = -\sum_B \big(2\,\varepsilon\,\varphi\,(m\sigma)_{AB} - \varepsilon^2 \varphi^2 (\sigma)^2{}_{AB}\big)\, u_B \equiv -\varrho_A \tag{6,8}$$

suivent les lignes d'univers des particules de masse m_A et de charge $\varepsilon\,\sigma_A$ dans un champ φ, si $\sigma_{AB} = \sigma_A \delta_{AB}$ est une matrice diagonale. Dans le cas où σ_{AB} est une matrice symétrique quelconque, on étudie la variation de «l'espérance mathématique» $\sigma(t) = \Sigma\Sigma u_A^* \sigma_{AB} u_B$ si le paquet d'onde complexe $u_A = a'_A(t) \exp(-i m_A t)$ représente la particule au repos. De l'« équation de Schrödinger »

$$\partial_t a'(t)_A = i\,\varepsilon\,\varphi(t) \sum_B \sigma_{AB} e^{i\,\omega_{AB} t} a'(t)_B \tag{6,9}$$

valable dans la limite $\omega_{AB} = m_A - m_B \ll m_A$, la relation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum\sum (u_A^* \sigma_{AB}\, u_B) - \sum\sum (\omega_{AB})^2 (u_A^* \sigma_{AB} u_B) = +\,\varepsilon \sum\sum\sum (u_A^* (\omega_{CA} + \omega_{CB})\, \sigma_{AC} \sigma_{CB} u_B)\, \varphi \tag{6,10}$$

résulte. Dans le cas particulier, où les fréquences $\omega_{10} = \omega_{21} = \omega_{32} = \cdots = \omega_0$ sont toutes égales et où seulement les $\sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \ldots$ etc. diffèrent de zéro, la relation (6,10) correspond aux équations classiques pour $\sigma(t)$ ((3,2) et (3,4) avec $\mu_0 = \mu_1 = \omega_0$ et sans le terme de freinage) parce que l'identité $\sum (\omega_{CA} + \omega_{CB})\, \sigma_{AC}\, \sigma_{CB} = \omega_0 \delta_{AB}$ résulte.

(6,8) repésente ainsi la première étape de la quantification de la théorie ordinaire. Il faut, en plus, la compléter par une équation d'onde pour φ. Celle-ci doit être telle que les lois de conservation soient satisfaites. On vérifie que c'est l'équation

$$\Delta \varphi - \varkappa^2 \varphi - \ddot{\varphi} = \\ - \sum \sum (\varepsilon u_A (m\sigma)_{AB} u_B - \varepsilon^2 \varphi\, u_A (\sigma)^2{}_{AB}\, u_B) \equiv - \varrho \qquad (6,11)$$

qui a pour effet que le tenseur

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{(\varkappa)}(\varphi) + \sum T^{\mu\nu}_{(m_A)}(u_A) + g^{\mu\nu} L \qquad (6,12)$$

$$L(\vec{x}, t) = \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} = \varepsilon\varphi \sum\sum u_A (m\sigma)_{AB} u_B - \varepsilon^2 \tfrac{1}{2} \varphi^2 \sum\sum u_A (\sigma)^2_{AB} u_B$$

satisfasse à (1,1). Les inhomogénéités de (6,10) et de (6,12) sont $-\partial L/\partial u_A$ resp. $-\partial L/\partial \varphi$.

La deuxième étape introduit les $a_{\vec{k}A}$, $a_{\vec{k}A}{}^*$, $c_{\vec{\mu}}$ et $c_{\vec{\mu}}{}^*$ dans (2,1) et (6,7) comme des opérateurs qui commutent tous entre eux sauf

$$[a_{\vec{k}A}{}^*, a_{\vec{k}A}] = [c_{\vec{\mu}}{}^*, c_{\vec{\mu}}] = -1 \qquad (6,13)$$

Opérant sur une fonctionnelle $\psi(t)$, ils ont les effets suivants

$$a_{\vec{k}A}\, \psi(\ldots N_{\vec{\mu}} \ldots; \ldots N_{\vec{k}A} \ldots; t) = \sqrt{N_{kA}+1}\, \Psi(\ldots N_{\vec{\mu}} \ldots; \ldots N_{\vec{k}A}+1 \ldots; t)$$
$$c_{\vec{\mu}}{}^* \Psi(\ldots N_{\vec{\mu}} \ldots; \ldots N_{\vec{k}A} \ldots; t) = \sqrt{N_{\vec{\mu}}}\, \Psi(\ldots N_{\vec{\mu}} - 1 \ldots; \ldots N_{\vec{k}A} \ldots; t) \qquad (6,14)$$

Opérant en particulier sur $\Psi(\ldots N_{\vec{\mu}} \ldots) = \ldots \delta_{z N_{\vec{\mu}}} \ldots$, on voit que $c_{\vec{\mu}}$ correspond à l'annihilation d'un quantum dans l'état $\vec{\mu}$ et $c_{\vec{\mu}}{}^*$ à sa création. Les relations (6,13) ont pour conséquence:

$$i[u_A(x), u_{A'}(x')] = \delta_{AA'} D_A(x, x'); \quad i[\varphi(x), \varphi(x')] = D(x, x') \qquad (6,15)$$

les fonctions $D_A(x, x')$ ont les propriétés suivantes: Elles disparaissent pour $t = t'$ et satisfont à

$$\lim_{t=t'} \partial_t D(x, x') = \lim_{t=t'} \partial_t D_A(x, x') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \qquad (6,16)$$

Ainsi elles servent à définir les potentiels retardés $\mathrm{ret}_A\, \varrho_A$ resp. $\mathrm{ret}\, \varrho$ des inhomogénéités de (6,8) et (6,11) dans la limite $-T = -\infty$

$$\mathrm{ret}_A\, \varrho_A(\vec{x}, t) = \int_{-T}^{t} dt' \int (dx')^3\, D_A(\vec{x}, t; \vec{x}', t')\, \varrho_A(\vec{x}', t') \qquad (6,17)$$

On vérifie alors que l'opérateur

$$H(t) = -\int (dx)^3 L(\vec{x}, t) = \varepsilon H^{(1)}(t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(t) \tag{6,18}$$

et les opérateurs $u(\vec{x}, t)$ et $\partial_t u(\vec{x}, t)$ (6,7) (resp. $\varphi(\vec{x}, t)$ et $\partial_t \varphi(\vec{x}, t)$ de (2,1)) substitués en (6,3) définissent des espérances mathématiques $\overline{u}$ et $\overline{\varphi}$ qui satisfont à (6,8) et (6,11). Soit alors $\Psi(-T)$ un état initial quelconque. L'équation de SCHROEDINGER peut être résolue de la manière suivante. On développe l'opérateur α suivant

$$\alpha(t) = \varepsilon \alpha^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \alpha^{(2)}(t) + \varepsilon^3 \alpha^{(3)}(t) + \ldots \tag{6,19}$$

et on compare (6,4) à (6,18). Le résultat est

$$\begin{aligned}
\varepsilon \alpha^{(1)}(t) &= \varepsilon \int_{-T}^{t} dt' H^{(1)}(t') \\
\varepsilon^2 \alpha^{(2)}(t) &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2!} \int_{-T}^{t} dt' \int_{-T}^{t'} dt'' \, i \left[H^{(1)}(t'), H^{(1)}(t'') \right] + \varepsilon^2 \int_{-T}^{t} dt' H^{(2)}(t') \\
\varepsilon^3 \alpha^{(3)}(t) &= \ldots
\end{aligned} \tag{6,20}$$

On s'aperçoit alors que l'opérateur $\varepsilon^n \alpha^{(n)}(t)$ est une fonction du $(n+2)^{\text{ème}}$ ordre des opérateurs a, a^*, c, c^* et correspond ainsi à une réaction (dans le sens chimique) entre $n+2$ particules ou quanta. En particulier, le terme $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ contient une expression tétralinéaire en a, a^*. Dans la limite $-T = -\infty$, le commutateur $i[\varphi, \varphi']$ s'exprime par (6,15) et (6,17) et cette partie de l'opérateur $\alpha^{(2)}$ devient (dans le cas d'un seul u et avec $\sigma = 1$)

$$\varepsilon^2 \alpha_R^{(2)}(t) = -\tfrac{1}{2} \int_{-T}^{t} dt' \int (dx)^3 \, \varepsilon m u^2(\vec{x}, t') \operatorname{ret} \left(\varepsilon m u^2(\vec{x}, t') \right)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \alpha_R^{(2)}(T) = &-\varepsilon^2 \tfrac{1}{4} m^2 \sum_{\vec{k}}^{*} \sum_{\vec{k}'}^{*} \sum_{\vec{k}''}^{*} \sum_{\vec{k}'''}^{*} a_{\vec{k}}^{(*)} a_{\vec{k}'}^{(*)} a_{\vec{k}''}^{(*)} a_{\vec{k}'''}^{(*)} (k^4 k'^4 k''^4 k'''^4)^{-1/2} \\
&\left((\underset{(-)}{+} k'' \underset{(-)}{+} k''', \underset{(-)}{+} k'' \underset{(-)}{+} k''') + \varkappa^2 \right)^{-1} \delta_{\underset{(-)}{+} \vec{k} \underset{(-)}{+} \vec{k}' \underset{(-)}{+} \vec{k}'' \underset{(-)}{+} \vec{k}'''} \pi \, V^{-1} \\
&\delta \left(\underset{(-)}{+} k^4 \underset{(-)}{+} k'^4 \underset{(-)}{+} k''^4 \underset{(-)}{+} k'''^4 \right)
\end{aligned} \tag{6,21*}$$

Après une longue période $(t - (-T) = 2T)$, cet opérateur et tout autre opérateur $\varepsilon^n \alpha^{(n)}$ n'admet ainsi que des transitions compatibles avec les lois de conservation $\underset{(-)}{+} k \underset{(-)}{+} k' \underset{(-)}{+} k'' \underset{(-)}{+} k''' = 0$. Ainsi que le montre la première équation (6,21) $\varepsilon^2 \alpha^{(2)}$ contient l'influence du champ retardé d'une densité de charge $\varepsilon m u^2$ sur elle-même.

*) La relation ret $ei(l, x) = ((l, l) + \varkappa^2)^{-1} ei(l, x)$ a été utilisée. Σ^* exprime que la somme est à effectuer sur a et a^* avec $+k$ et $-k$.

(6,21) contient ainsi des transitions où deux particules ayant des impulsions $\vec{k}''$ et $\vec{k}'''$ disparaissent et deux autres sont créées dans les états $\vec{k}$ et $\vec{k}'$. Un telle transition est la diffusion de RUTHERFORD d'une particule chargée $\vec{k}''$ par une autre $\vec{k}'''$ (tenant compte des effets d'échange et de l'annihilation mutuelle*). Mais des termes du type $\sum(\vec{k})' \, a_{\vec{k}}^* \, a_{\vec{k}'} \, a_{\vec{k}'}^* \, a_{\vec{k}} \, (\ldots) = N_{\vec{k}} \sum (\vec{k}') \, (\ldots)$ contribuent à une somme sur les $\vec{k}'$ qui diverge (prop. à $r^{-1} \to \infty$ si l'annihilation mutuelle est exclue et prop. à $-m \log mr \to m \log \infty$ si l'annihilation mutuelle est admise). Des divergences semblables apparaissent dans les termes supérieurs $\alpha^{(n)}$. Ces divergences sont l'analogue quantique des divergences en théorie classique.

Pour remédier à ce défaut, on peut, en principe, procéder comme en théorie classique. Introduisons des champs $\Phi^{(i)}$, commutant entre eux et avec φ, et soumis à $i\,[\Phi^{(i)}, \Phi^{(i)\prime}] = \alpha_i \, D_{(i)}(x, x')$ avec $\Sigma \alpha_i = -1$. Alors le terme divergent prend la forme $\varepsilon^2 \, \alpha^{(2)}(T) \sim 2\, T \lambda_1^{-1}$ où λ_1 est une constante. Ce procédé a le grand défaut qu'il n'introduit pas seulement des quanta nouveaux, mais qu'une partie d'entre eux possèdent des énergies négatives**).

Mais une autre méthode, beaucoup plus simple, se présente. Il suffit de redéfinir α par la série (6,19), mais où, dans chaque terme $\varepsilon^n \, \alpha^{(n)}(t)$ (calculé d'après (6,20)) tous les opérateurs $a_{\vec{k}A}^*$ et $c_{\vec{\mu}}^*$ sont *placés à gauche* de tous les $a_{\vec{k}A}$ et $c_{\vec{\mu}}$. A ceci correspond une soustraction covariante de la forme $\alpha_{(\text{corrig})} = \alpha_{(\text{habituel})} - \infty$, où les termes ∞ ont la même covariance que le $\alpha_{(\text{habituel})}$ de la théorie habituelle. Les intégrales en $\varepsilon^n \, \alpha^{(n)}(t)$ dépendent maintenant explicitement de $-T$ et, pour avoir une théorie définie, nous devons fixer une fois pour toutes $-T = -\infty$. Dans cette théorie corrigée, il n'existe plus d'opérateur $H(t)$ indépendant de $-T$. Elle est entièrement définie par son $\alpha(t)$, soit par la *série corrigée* (6,20). Chaque terme $\varepsilon^n \, \alpha^{(n)}$ ne fait alors intervenir que des réactions entre $n+2$ particules (tandis que, dans la théorie habituelle, un tel terme contenait toujours encore des réactions d'un ordre inférieur, par ex. le terme divergent de $\alpha^{(2)}$ avec une seule particule initiale et une seule particule finale).

Nous allons démontrer que cette théorie corrigée correspond

---

*) cf. à ce sujet la thèse de J. PIRENNE, Université de Lyon, 1943[7]).

**) Cette critique s'applique en particulier à la théorie de Bopp[6]). Mais on peut se demander, si, dans l'électrodynamique quantique de l'électron de Dirac, le procédé étudié en *I* (la compensation des divergences du champ électromagnétique et d'un champ scalaire à énergie positive) n'a pas son analogue quantique.

à nos modèles quantiques introduits en théorie classique. Nous développons d'abord

$$\psi(-T) = \sum_{\vec{\mu}} \sum_{A} \psi(\vec{\mu}, A; -T)\, \delta_{0\,N_1} \ldots \delta_{1\,N_{\vec{\mu}}} \ldots \delta_{1\,N_{\vec{k}(\vec{\mu})A}} \ldots$$

$$\text{avec } \vec{k}(\vec{\mu}) = \vec{p} - \vec{\mu} \qquad (6{,}22)$$

pour le cas où un seul quantum et un seul atome ou électron est présent. Le seul $\Psi(-T)$ qui représente un état physiquement possible pour $-T = -\infty$ est celui où l'atome est dans son état fondamental ($m_A = m_0$). Dans tout autre état, il existe une histoire antérieure à $-T = -\infty$ qui décrit comment cet atome a été excité. Calculons $\Psi(+T)$. Les lois de conservation nous montrent que, pour tout paquet d'onde $\Psi(\vec{\mu}, 0, -T)$ ($= c_{\vec{\mu}}^{(\mathrm{inc})}$ du § 2), la contribution de $\varepsilon\alpha^{(1)}(T)$ est négligeable. En effet, notre atome ne peut se trouver dans un état excité $m_A = m_0 + \omega_{A0}$ que si la fréquence du quantum incident $\omega = \mu^4$ est exactement égale à ω_{A0}. Cette probabilité est proportionnelle à V^{-1} et peut être négligée. Ces mêmes lois nous montrent que, pour $t = +T$, $\psi(\ldots N \ldots; t)$ ne peut avoir des amplitudes de probabilité non nulles que pour des états où un seul atome ou électron est présent, pour autant que $\mu^4 = \omega < 2\,m_0 = 2\,m$. Les éléments de matrice de $\varepsilon^2\,\alpha^{(2)}$ peuvent alors s'exprimer dans un espace hermitien $\Psi(\vec{\mu}, A)$. Dans le cas de l'électron, un calcul analogue à celui qui aboutissait à (6,21) (mais où le terme $H^{(2)}$ contribue) donne pour $\vec{k} = 0$, $k^4 = m$ et $(\mu, \mu) = -\varkappa = 0$ le résultat

$$\varepsilon^2\,\alpha^{(2)}(T)\,(\vec{\mu}'/\vec{\mu}) =$$

$$\varepsilon^2 \cos\vartheta'\,(m k'^4 \omega\omega')^{-1/2} \cdot \pi V^{-1} \delta(\omega' + k'^4 - \omega - m) \qquad (6{,}23)$$

et, pour l'atome, si $\vec{k} = 0$ et $m_0 \gg m_A - m_B = \omega_{AB}$

$$\varepsilon^2\,\alpha^{(2)}(T)\,(\vec{\mu}', A'/\vec{\mu}, A) = -\varepsilon^2\,(\omega\omega')^{-\frac{1}{2}} \sum_{C} (\omega_{CA'} + \omega_{CA})\,\sigma_{A'C}\,\sigma_{CA}$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{(\omega_{CA} - \omega)^{-1}(\omega_{CA'} + \omega)^{-1} + (\omega_{CA} - \omega')^{-1}(\omega_{CA'} + \omega')^{-1}\right\}$$

$$\cdot\, \pi V^{-1} \delta(\omega' - (\omega - \omega_{A'A})) \qquad (6{,}24)$$

Dans le cas de l'électron et pour des fréquences où les gerbes peuvent être négligées (cf. § 2), on peut donc poser $\alpha(T) = \varepsilon^2\,\alpha^{(2)}$ parce que les $\alpha^{(n>2)}$ ne contiennent que de ces effets d'ordre supérieur. Alors le calcul de $\Psi(+T)$ se réduit à (4,1) et (4,9) où α est la matrice (6,23). Elle n'est autre chose que la matrice de la théorie classique (4,7) corrigée pour l'impulsion du photon (effet Compton).

Pour l'atome, cette approximation n'est justifiée que si $\omega < \omega_{20}$. On vérifie qu'alors seul $\alpha^{(2)}$ contient un facteur de résonance. En

particulier, si la correspondance classique exprimée en (6,10) est valable et rend $\sum (\omega_{CA'} + \omega_{CA})\, \sigma_{A'C}\, \sigma_{AC} = \omega_0\, \delta_{A'A}$, l'élément (6,24) est égal à l'élément classique (4,10): La dispersion d'une onde incidente monochromatique ($\psi(\vec{\mu}, 0; -T) = 1$ pour un seul $\vec{\mu}$) est égale à celle produite par le modèle quantique en théorie classique. L'excitation de l'atome par un choc ($\Psi(\vec{\mu}, 0; -T) = \text{const}$ pour tout $\vec{\mu} // \vec{\mu}_{(0)}$ et $\omega_{\max} < \omega_{20}$ et $\Psi = 0$ pour tout autre $\vec{\mu}$), donne une probabilité prop. à $|2\pi g_0(\omega')|^2$ qu'on trouve un quantum de fréquence ω' ($\sim \omega_{10}$) émis.

Si le choc est très exactement défini, ($\omega_{\max} \gg \omega_{C0}$) un quantum avec tout $\omega' \sim \omega_{A'A}$ peut être présent en $\psi(+T)$. Mais les termes $\varepsilon^3\, \alpha^{(3)}(T)$ contiennent maintenant des facteurs de résonnance. Ceci signifie que, dans le cas de l'irradiation monochromatique, une probabilité finie existe, que l'atome émette deux quanta $\omega' \cong \omega - \omega_{A'A}$ (quantum de Raman) et $\omega'' \cong \omega_{A'A}$ (émission de l'énergie absorbée dans l'effet de Raman). Les termes $\varepsilon^3\, \alpha^{(1)}\, \alpha^{(2)}$ provenant du développement de $e^{-i\alpha}$ donnent lieu au même effet. En plus un tel choc aura pour conséquence que $\varepsilon^3\, \alpha^{(3)}$ produira deux quanta $\omega' \cong \omega_{CA'}$ et $\omega'' = \omega_{A'A}$ correspondant à l'émission successive de deux quanta par l'atome exité dans un état $m_C > m_1$. On observera ainsi un spectre de ligne.

§ 7. La généralisation du modèle en théorie quantifiée.

Au premier abord, il semble que notre manière de soustraire les infinités en théorie quantifiée ne nous amène qu'aux modèles quantiques introduits en § 1 et § 3. Mais on peut démontrer (analogie parfaite avec la théorie classique) que la soustraction des singularités peut être faite de plusieurs manières, dont chacune définit un modèle caractérisée par une fonction $\alpha(\beta)$. Nous exprimons l'opérateur unitaire S en (6,1) en termes d'un opérateur hermitien β

$$S(t) = S(\beta(t)) = e^{-i\alpha(\beta(t))} \tag{7,1}$$

où α est une série définie par des constantes réelles α_n

$$\alpha(\beta) = \beta + \alpha_2 \beta^2 + \alpha_3 \beta^3 + \ldots \tag{7,2}$$

Pour β, nous écrivons son développement en termes de ε (6,19)

$$\beta = \varepsilon\, \beta^{(1)} + \varepsilon^2\, \beta^{(2)} + \varepsilon^3\, \beta^{(3)} + \ldots;$$

$$\beta^2 = \varepsilon^2\, \beta^{(1)\,2} + \varepsilon^3\, (\beta^{(1)}\, \beta^{(2)} + \beta^{(2)}\, \beta^{(1)}) + \ldots \tag{7,3}$$

et égalisons les coefficients de ε^n en (6,4). On trouve ainsi la série

$$\varepsilon\ \beta^{(1)}(t) = \varepsilon \int_{-T}^{t} d\,t'\, H^{(1)}(t')$$

$$\varepsilon^2\, \beta^{(2)}(t) = -\varepsilon^2 \frac{1}{2!} \int_{-T}^{t} d\,t' \int_{-T}^{t'} d\,t''\ i\,[H^{(1)}(t'), H^{(1)}(t'')] + \varepsilon^2 \int_{-T}^{t} d\,t'\, H^{(2)}(t') - \varepsilon^2\, \alpha_2\, \beta^{(1)}(t)^2 \qquad (7,4)$$

$$\varepsilon^3\, \beta^{(3)}(t) = \ldots$$

qui se distingue de (6.20) par les termes contenant les coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Une substitution ultérieure de (7,4) en (7,3) et (7,2) donne naturellement la même série pour α en termes de $H^{(i)}$, que celle obtenue par le procédé simple du § 6. Mais nous sommes libres en (7,4) de redéfinir l'opérateur $-\varepsilon^2 \alpha^2 \beta^{(1)\,2}$ et les autres opérateurs (par ex. $-\varepsilon^4 \alpha_2 \beta^{(2)\,2}$ en $\varepsilon^4\, \beta^{(4)}$) de la série, sans porter atteinte ni à la covariance ni à l'unitarité de S, en transposant dans ces termes aussi tous les $a^*_{\vec{k}A}$ et $c^*_{\vec{\mu}}$ à gauche des $a_{\vec{k}A}$ et $c_{\vec{\mu}}$ (sans changer rien aux intégrales spatiotemporelles!). De cette manière, $\varepsilon^2\, \beta^{(1)\,2}{}_{\text{corrig}}$ en (7,4) est une matrice correspondant à une réaction entre 6 particules et quanta et le terme $(\varepsilon^4\, \beta^{(2)\,2})_{\text{corrig}}$ à ajouter à $\varepsilon^4\, \beta^{(4)}$ représente une réaction entre 8 quanta, etc. Opérant sur les fonctions $\Psi(-T)$ considérées au § 6, où le nombre de particules est limité à deux particules initiales et deux particules finales, ces termes supplémentaires ne contribuent en rien à l'approximation qui néglige les gerbes. Par contre, dans la série (7,2), où les puissances de l'opérateur β apparaissent explicitement, la série $S(\beta)$ changera. On trouvera ainsi, pour $S(\beta)$, une série unitaire plus générale $S(\beta) = 1 + S_1\, \beta + S_2\, \beta^2 + \ldots$. Si seuls les processus de 2ème ordre interviennent, on a évidemment $\varepsilon^2\, \beta^{(2)} = \varepsilon^2\, \alpha^{(2)}$ et $S(\beta) = S(\varepsilon^2\, \alpha^{(2)}(T))$ sera la fonction unitaire la plus générale dont les deux premiers termes sont $1 - i\, \varepsilon^2\, \alpha^{(2)}(T)$. La relation entre la fonction $\eta(\omega^2)$ caractérisant un modèle classique et la série $S(\beta)$ caractérisant le modèle correspondant, est

$$S(\beta) = (\eta\,((2\,\lambda_0)^{-2}\, \beta^2) - \tfrac{1}{2}\, i\, \beta)\,(\eta\,((2\,\lambda_0)^{-2}\, \beta^2) + \tfrac{1}{2}\, i\, \beta)^{-1} \qquad (7,5)$$

On l'établit en comparant (4,3) avec (1,23) (1ère équation). Cette relation avec $\eta = 1$ (modèle de Dirac) correspond aux formules. trouvées par Gora[8]) et Heitler[9]) (cf. (4.8)).

§ 8. Conclusions.

Nous avons démontré que la théorie classique de l'électron ponctuel proposée en I peut être modifiée d'une telle manière que seul le champ Maxwellien interagit avec la particule. Un nombre infini de modèles possibles existent, qui se distinguent physiquement entre eux par l'effet du champ propre. Ceci a pour conséquence que tout résultat qui, en théorie de l'électron étendu (LORENTZ[4])), dépend de la structure de la particule, ne peut être calculé dans notre théorie que si une certaine fonction invariante (fonction du modèle $\eta = \eta(\omega^2)$) est donnée.

La théorie peut être quantifiée sans que des divergences apparaissent. Une équation de SCHRÖDINGER n'existe plus. Par contre, une matrice unitaire S envisagée par HEISENBERG[3]) caractérise chaque modèle quantifié. Une relation est établie (7,5) entre cette matrice de HEISENBERG $S(\alpha)$ exprimée comme fonction d'un invariant α et de la fonction de modèle $\eta(\omega^2)$.

Les effets suivants sont indépendants du modèle (pour autant que l'action de freinage de l'effet considéré n'intervient pas):

1⁰ Termes en ε^2: La diffusion de RUTHERFORD*), l'effet COMPTON et la production de paires;

2⁰ Termes en ε^3: Le rayonnement de freinage et la production d'une gerbe simple constituée de deux quanta $(h\omega + m c^2 = h\omega' + h\omega'' + \sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2})$.

Un modèle de l'atome est discuté, où celui-ci est considéré comme une particule élémentaire possédant un degré de liberté intérieure. Mais cette théorie est insuffisante en ce qu'elle ne permet pas encore de comprendre comment un proton et un électron peuvent se combiner pour former un atome d'hydrogène et un photon. Dans l'état actuel, il faut introduire chaque atome comme un nouvel être élémentaire, caractérisé par ses niveaux d'énergie $m_A - m_B = \omega_{AB}$ et par ses matrices de transitions ($\sigma_{AB}, \tau_{AB} \ldots =$ moments dipole, quadrupole, etc.).

Cette difficulté nous semble être due à l'impossibilité de distinguer entre « quantum lié » et « quantum libre », qui a été introduite par PAULI et FIERZ[5]). En théorie classique, c'est la décomposition du champ φ en $\varphi^{(\mathrm{ret})} + \varphi^{(\mathrm{inc})}$ qui correspond à cette distinction.

Pour des raisons de simplicité, nous avons exposé la théorie d'un électron sans spin dans une électrodynamique longitudinale.

---

*) Dans le cas ou $\varkappa$ est rigoureusement nul des difficultés se manifestent par le fait que l'opérateur $(\alpha_{\mathrm{R}}^{(2)})^2$ formé de (6,21) diverge.

L'étude d'un électron à spin 1/2 dans l'électrodynamique de MAXWELL est l'objet d'une thèse en préparation.

Ce travail est dû en grande partie à des discussions avec MM. G. WENTZEL et M. FIERZ, au Séminaire de physique théorique de Zurich. Je remercie tout particulièrement le président du conseil de l'E. P. F., M. le Professeur ROHN, et le directeur de l'Institut de Physique de l'E. P. F., Monsieur le Professeur P. SCHERRER, de l'aide qu'ils m'ont accordée en me permettant d'assister régulièrement à ce séminaire.

La mise au point de la théorie classique, ainsi que la rédaction de cette publication ont été faites en collaboration avec mon ami et collègue, Monsieur J. WEIGLE, auquel je tiens à exprimer ma sincère gratitude.

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.

Bibliographie.

[1]) DIRAC, Proc. Roy. Soc. **167**, 148 (1938). — WENTZEL, Zs. f. Phys. **86**, 479 et 635 (1934).

[2]) STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **14**, 51 (1941), cité comme *I*.

[3]) HEISENBERG, Zs. f. Phys. **120**, 513 et 673 (1943).

[4]) LORENTZ, Theory of electrons, Teubner (1909).

[5]) PAULI et FIERZ, Nuov. Cim. **15**, 1 (1938).

[6]) BOPP, Ann. d. Phys. **38**, 345 (1940) et **42**, 573 (1943).

[7]) PIRENNE, Thèse Université de Lyon (1943).

[8]) GORA, Zs. f. Phys. **120**, 121 (1943) (éq. (13′), p. 130).

[9]) HEITLER, Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 291 (1941) (éq. (g), p. 295).