Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 18 (1945)

Heft: V

Artikel: Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung und symmetrische Mesontheorie

Autor: Wentzel, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111615

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung und symmetrische Mesontheorie

von **G. Wentzel.**

(12. VII. 1945.)

Inhalt. § 1: Problemstellung. § 2: Überblick über den Gang der Rechnung. § 3: Diskussion. — Anhang.

§ 1. Problemstellung.

Nach Messungen von AMALDI u. a.[1]) ist die Proton-Neutron-Streuung bei höheren Energien ($\sim$ 15 MeV) stark anisotrop in dem Sinne, dass im Schwerpunktssystem grosse Streuwinkel ($\vartheta \sim \pi$) relativ selten auftreten (genaueres s. im § 3). Dies ist als Argument gegen die ladungssymmetrische Theorie der Kernkräfte angeführt worden, die nach RARITA und SCHWINGER[2]) eine Anisotropie im entgegengesetzten Sinne erwarten lässt; letzteres liegt daran, dass in den P-Zuständen — die P-Wellen bestimmen ja in erster Näherung die Anisotropie — die Kernkräfte nach dieser Theorie abstossend oder nur schwach anziehend sind. Dieser Einwand trifft aber nicht die modifizierte Form der ladungssymmetrischen Theorie, in welcher dem Nukleon eine Spinträgheit zugeschrieben wird. Für diese Theorie ist charakteristisch, dass das Nukleon „isobare Zustände" besitzen soll; die Isobaren-Energie hat die Form einer Kreiselenergie, und zwar ist der Kreisel in der ladungssymmetrischen Theorie speziell ein Kugelkreisel (die Hamiltonfunktion ist invariant gegenüber Drehungen im Raum des isotopen Spins). Die Anwendung dieser Theorie auf das Zwei-Nukleon-Problem liess voraussehen, dass die P-Kräfte bei geeigneter Parameterwahl systematisch anziehend werden[3]), und es erhebt sich die Frage, ob dieser

---

[1]) E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. FERRETTI, G. C. TRABACCHI, Naturwiss. **30**, 582, 1942, und Ric. Scient. **13**, 502, 1942. Vgl. auch die Angaben von F. C. CHAMPION und C. F. POWELL, Proc. Roy. Soc. **183**, 64, 1944, die im Rahmen ihrer — allerdings nicht grossen — Messgenauigkeit die Ergebnisse von AMALDI u. a. bestätigen.

[2]) W. RARITA und J. SCHWINGER, Phys. Rev. **59**, 556, 1941.

[3]) M. FIERZ und G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **17**, 215 und 252, 1944 (vgl. S. 228); K. BLEULER, Helv. Phys. Acta **17**, 405, 1944 (vgl. S. 407 und die dort folgende Diskussionsbemerkung) und **18**, 317, 1945.

Effekt quantitativ ausreichend ist, um als Erklärung für die beobachtete Streu-Anisotropie dienen zu können.

Wenden wir uns dieser Frage zu, so ist es — wie früher schon bemerkt wurde[4]) — unumgänglich, die sogenannten *Tensorkräfte* (Spin-Bahn-Kopplung) zu berücksichtigen, da durch diese der ^3P-Term stark aufgespalten wird. Wir werden dabei die allgemeinen Formeln verwenden können, die FIERZ für die Tensorkräfte in dieser Theorie angegeben hat[5]).

§ 2. Überblick über den Gang der Rechnung.

Die Hamiltonfunktion des Zwei-Nukleon-Systems werde, wie bei FIERZ[5]), als Matrix dargestellt bezüglich der folgenden Quantenzahlen:

j_1, j_2 = Spinquantenzahlen der beiden Nukleonen,
J, K = resultierender Spin und isotoper Spin,
L = Bahnimpulsmoment,
I = gesamtes Impulsmoment.

Die Hamiltonfunktion H, die in I und K diagonal ist (diese Variablen werden deshalb als konstante Parameter behandelt), setzt sich aus folgenden Termen zusammen:
kinetische Energie der Relativbewegung:

$$H^K = \frac{1}{M}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{L(L+1)}{r^2}\right) \cdot (j_1 j_2 J L \mid 1 \mid j_1' j_2' J' L'),$$

Isobaren-Energie der beiden Nukleonen:

$$H^I = \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(j_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(j_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\right] \cdot (j_1 j_2 J L \mid 1 \mid j_1' j_2' J' L'),$$

potentielle Energie der skalaren Kraft:

$$H^S = V(r) \cdot (j_1 j_2 J \mid \Omega \mid j_1' j_2' J) \cdot (J L \mid 1 \mid J' L'),$$

potentielle Energie der Tensorkraft:

$$H^T = U(r) \cdot (j_1 j_2 J L \mid T' \mid j_1' j_2' J' L').$$

(Hierbei ist $T' = T - \frac{1}{3}\Omega$ in der Bezeichnung von FIERZ.)

Die Tensorkraft koppelt Zustände mit $J' - J = 0, \pm 2$ und $L' - L = 0, \pm 2$ miteinander (wobei $|J - L| \leqq I \leqq J + L$). So enthält die Schrödingerfunktion des hier zu betrachtenden „^3P-

[4]) Vgl. die unter [3]) zitierte Diskussionsbemerkung.
[5]) M. FIERZ, Helv. Phys. Acta **18**, 158, 1945.

*

Terms" ($K = 1$) ausser der Hauptkomponente $J = L = 1$ noch „Beimischungen" mit höheren (ungeraden) J- und L-Werten. Eine P-Beimischung ($L = 1$) kann — wegen $|J - L| \leqq I$ — nur im Falle $I = 2$ auftreten; diese Beimischung ($J = 3$, $L = 1$) soll im folgenden soweit als möglich berücksichtigt werden. Alle übrigen Beimischungen haben $L \geqq 3$ und dürften wegen der starken Zentrifugalkraft nur schwach mit der Hauptkomponente $J = L = 1$ gekoppelt sein; sie werden hier vernachlässigt. Übrigens würde ihre Berücksichtigung die Potentialkurven nur noch stärker herabdrücken und damit die Streu-Anisotropie eher noch begünstigen.

Von der Wechselwirkungsmatrix kommen also in erster Linie die „Diagonalelemente"

$$J = J' = 1, \quad L = L' = 1 \qquad (K = 1)$$

in Betracht. Wenn man für diese Quantenzahl-Werte die FIERZsche T-Matrix (l. c.[5]), Gl. (9), (10)) berechnet, so zeigt sich, dass $T' = T - \frac{1}{3}\,\Omega$ (als Matrix bezüglich $j_1 j_2$) folgendermassen durch die Ω-Matrix[6]) darstellbar ist:

$$(jj\,|T'|\,jj) = c_I \cdot \left\{-1 - \frac{1}{3}\,(jj\,|\,\Omega\,|\,jj) + \frac{1}{j^2(j+1)^2}\right\}$$

$$(j-1, j-1\,|T'|\,jj) = c_I \cdot \frac{2}{3}\,(j-1, j-1\,|\,\Omega\,|\,jj)$$

$$(j-1, j\,|T'|\,jj) = c_I \cdot \left(j + \frac{2}{3}\right) \cdot (j-1, j\,|\,\Omega\,|\,jj)$$

$$(j+1, j\,|T'|\,jj) = c_I \cdot \left(-j - \frac{1}{3}\right) \cdot (j+1, j\,|\,\Omega\,|\,jj)$$

$$(j, j+1\,|T'|\,j, j+1) = c_I \cdot \frac{2}{3}\,(j, j+1\,|\,\Omega\,|\,j, j+1)$$

$$(j, j+1\,|T'|\,j-1, j) = c_I \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(j, j+1\,|\,\Omega\,|\,j-1, j)$$

$$(j, j-1\,|T'|\,j-1, j) = c_I \cdot \left(-4\,j^2 + \frac{2}{3}\right) \cdot (j, j-1\,|\,\Omega\,|\,j-1, j)\,.$$

Die hier eingehende Konstante c_I hat für $I = 0, 1, 2$ die folgenden Werte:

$$c_0 = -\frac{1}{5}, \qquad c_1 = \frac{1}{10}, \qquad c_2 = -\frac{1}{50} \qquad \left(\sum_I (2\,I + 1)\,c_I = 0\right). \tag{1}$$

Wir verwenden wie früher[3]) die Adiabaten-Näherung: Indem r zunächst als Parameter behandelt wird, haben wir von der Energie $H^I + H^S + H^T$ die Eigenwerte $W(r)$ zu bestimmen, welche

[6]) Diese findet man bei FIERZ, Helv. Phys. Acta **17**, 181, 1944: Gl. IV, S. 193.

dann die adiabatischen Potentialkurven für das wellenmechanische Streuproblem liefern:

$$\left\{-E+\frac{1}{M}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\right)+W(r)\right\} f(r)=0\,.$$

Die Berechnung der Eigenwerte W lässt sich durchführen, wenn die Isobaren-Energie ε sehr gross oder sehr klein ist im Vergleich zu den Wechselwirkungsenergien $V(r)$, $U(r)$; für mittlere ε-Werte sind wir auf eine Interpolation angewiesen.

Der Grenzfall „*ε gross*" ist mindestens bei grossen r-Werten realisiert. Hier können H^S und H^T als kleine Störungen zum Hauptterm H^I aufgefasst werden, und das übliche Störungsverfahren gestattet die Eigenwerte als Entwicklungen nach Potenzen von V/ε und U/ε anzuschreiben. Hier interessieren nur die Zustände, denen in nullter Näherung (V/ε, $U/\varepsilon \to 0$, $r \to \infty$) die Quantenzahlen $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ zugeordnet sind; denn dies entspricht der Streuung zweier unangeregten Nukleonen. In der zweiten störungsmässigen Näherung müssen noch die Beimischungen $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{3}{2}$ und $j_1 = \frac{3}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$, sowie $j_1 = j_2 = \frac{3}{2}$ berücksichtigt werden. Das Ergebnis lautet:

$$W=\frac{1}{27}(3\,V+20\,c_I\,U)-\frac{32\,(6\,V-5\,c_I\,U)^2+25\,(3\,V+2\,c_I\,U)^2}{2187\,\varepsilon}$$
$$-\,\delta_{I2}\cdot\frac{14\,U^2}{675\,\varepsilon}+\cdots \tag{2}$$

Der letzte Term, der nur für $I = 2$ auftritt, rührt von der Beimischung $J = 3$, $L = 1$ $\left(j_1 = j_2 = \frac{3}{2}\right)$ her.

Die Hauptaufgabe betrifft nun den Grenzfall „*ε klein*". Hier werden wir, wegen zu grosser mathematischer Komplikationen, auf die Berücksichtigung der Beimischung $J = 3$, $L = 1$ verzichten. Die folgenden Rechnungen gelten also ohne weiteres nur für $I = 0$ und $I = 1$; auf den $^3P_2$-Zustand angewendet, liefern sie zu hohe W-Werte.

Für verschwindende Tensorkraft ist der Grenzfall „*ε klein*" schon von BLEULER[7]) behandelt worden und wir werden seinem Vorgehen folgen. Sei

$$j_1 - j_2 = \delta, \quad j_1 + j_2 + 1 = \sigma \qquad (\delta + \sigma \text{ gerade}).$$

δ kann die Werte 0, $\pm$ 1 annehmen ($|\,\delta\,| \leqq J, K$). Für $\delta = 0$ durch-

[7]) K. BLEULER, Helv. Phys. Acta **18**, 317, 1945. Bezüglich der folgenden Transformationen vgl. die Formeln (4), (5), (6) und (9) bis (13) bei BLEULER.

läuft σ die Werte 2, 4, 6, ..., andernfalls die Werte 3, 5, 7, ... Von σ transformiert man auf eine neue kontinuierliche Variable ξ:

$$(\delta,\xi\,|\,H\,|\,\delta',\xi') =$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{\sigma\sigma'} \sin\frac{\sigma(\pi+\xi)}{2}\cdot[\gamma_\delta(\sigma)]^{-1/2}(\delta,\sigma\,|\,H\,|\,\delta',\sigma')[\gamma_{\delta'}(\sigma')]^{1/2}\cdot\sin\frac{\sigma'(\pi+\xi')}{2},$$

wo

$$\gamma_\delta(\sigma) = \frac{\sigma^2(\sigma^2-1)^2}{\sigma^2-\delta^2}.$$

Dabei wird:

$$(\delta,\xi\,|\,H^I\,|\,\delta',\xi') = \varepsilon\cdot(\delta\,|\,1\,|\,\delta')\cdot(\xi\,|\,1\,|\,\xi')\cdot\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}+\frac{\delta^2}{4}-1\right),$$
$$(\delta,\xi\,|\,H^S\,|\,\delta',\xi') = V(r)\cdot D_{\delta\delta'}(\xi,\xi')\ ^{8)},$$
$$(\delta,\xi\,|\,H^T\,|\,\delta',\xi') = U(r)\cdot C_{\delta\delta'}(\xi,\xi').$$

Die Schrödingergleichung des Operators $H^I + H^S + H^T$ ist also von der Form:

$$\left\{-W+\varepsilon\left[-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\delta^2}{4}-1\right]\right\}\varphi_\delta(\xi)$$
$$+\sum_{\delta'}\int_{-\pi}^{+\pi}[V\cdot D_{\delta\delta'}(\xi,\xi')+U\cdot C_{\delta\delta'}(\xi,\xi')]\,\varphi_{\delta'}(\xi')\,d\xi' = 0. \qquad (3)$$

Dabei gelten (wegen „$\delta+\sigma$ *gerade*") die Paritätsbedingungen:

$$\varphi_\delta(-\xi) = (-1)^{\delta+1}\varphi_\delta(\ ). \qquad (4)$$

Die Kerne $D_{\delta\delta'}$ in (3) sind bei BLEULER[7]) berechnet, und die $C_{\delta\delta'}$ sind mit den gleichen Formeln berechenbar[9]).

Bei Entwicklung nach Potenzen von ξ und ξ' zeigte sich im Falle verschwindender Tensorkraft, dass die Gleichungen (3) durch zweimalige (allgemein $(J+K)$-malige) Differentiation in erster Näherung in Oszillatorgleichungen übergehen:

$$\varphi_\delta''''(\xi)+(\alpha-\beta^2\xi^2)\,\varphi_\delta''(\xi) = 0 \qquad (\delta = 0, \pm 1)$$

(für $U = 0$; $\beta = \sqrt{V/\varepsilon} \gg 1$, so dass $\varphi_\delta'' \neq 0$ nur für $|\xi| \ll 1$).

---

[8]) Wir schreiben $D(\xi,\xi')$ an Stelle von BLEULER's $D(\pi+\xi,\pi+\xi')$.

[9]) Bei diesen Rechnungen war mir Herr Dr. BLEULER behilflich, wofür ich ihm auch an dieser Stelle besten Dank sagen möchte. In den Bezeichnungen der BLEULERschen Arbeit[7]) ist z. B.

$$C_{11}(\xi,\xi') = c_I\left\{\Delta_1(\xi\xi')-\frac{1}{3}D_{11}(\pi+\xi,\pi+\xi')-\frac{1}{4}[F(\xi-\xi')+F(\xi+\xi')]\right\}.$$

Bei Mitnahme der Terme $U \cdot C_{\delta\delta'}$ kommt in entsprechender Näherung:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0'''' + (\alpha_0 - \beta_0^2 \xi^2)\,\varphi_0'' + \lambda_0 \varphi_0 + \mu(\varphi_1' + \varphi_{-1}') = 0\,, \\ &\varphi_{\pm 1}'''' + (\alpha_1 - \beta_1^2 \xi^2)\,\varphi_{\pm 1}'' + \frac{1}{2}\lambda_1(\varphi_{+1} + \varphi_{-1}) - \mu\,\varphi_0' = 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left(W + V + \frac{8}{3} c_I U\right), \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon}\left(W + V - \frac{4}{3} c_I U\right)^{10)}, \\ &\beta_0^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(V + \frac{2}{3} c_I U\right), \qquad \beta_1^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(V - \frac{1}{3} c_I U\right), \\ &\lambda_0 = -\lambda_1 = \mu = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\, c_I U\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Näherungsgleichungen (5) setzen natürlich β_0^2, β_1^2 reell und $\gg 1$ voraus („tiefe Potentialmulde" bei $\xi = 0$), was im Limes $\varepsilon \to 0$ erfüllt ist, wenn $V > -\frac{2}{3} c_I U$ und $V > \frac{1}{3} c_I U$. Diesen Bedingungen genügen die U- und V-Werte, die wir bei der Diskussion (§ 3) — auf Grund von S-Term-Daten — annehmen werden.

Nach (5) bewirkt die Tensorkraft eine Kopplung zwischen den 3 Oszillatoren $\delta = 0, \pm 1$. Eine genauere Abschätzung lehrt aber, dass die Kopplung zwischen $\delta = 0$ einerseits und $\delta = \pm 1$ anderseits in dieser Näherung vernachlässigt, d. h. $\mu = 0$ gesetzt werden kann[11]). Definiert man noch

$$\varphi_1 + \varphi_{-1} = \overset{+}{\varphi}, \quad \varphi_1 - \varphi_{-1} = \overline{\varphi},$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0'''' + (\alpha_0 - \beta_0^2 \xi^2)\,\varphi_0'' + \lambda_0 \varphi_0 = 0\,, \\ &\overset{+}{\varphi}'''' + (\alpha_1 - \beta_1^2 \xi^2)\,\overset{+}{\varphi}'' + \lambda_1 \overset{+}{\varphi} = 0\,, \\ &\overline{\varphi}'''' + (\alpha_1 - \beta_1^2 \xi^2)\,\overline{\varphi}'' = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hier ist noch zu beachten, dass die P-Potentialkurven, die für $r \to \infty$ zwei unangeregten Nukleonen entsprechen $\left(j_1 = j_2 = \frac{1}{2}\right)$, zu Eigenfunktionen gehören, die in j_1, j_2 symmetrisch, d. h. in δ gerade sind:

$$\varphi_1 = \varphi_{-1}, \quad \overline{\varphi} = 0\,.$$

---

[10]) Die Terme $\left(-\frac{1}{4}\delta^2 + 1\right)$ in α_0 und α_1 sind in dieser Näherung zu vernachlässigen.

[11]) Mit anderen Worten: Der Einfluss dieser Kopplung fällt erst in die nächste Näherung (Anharmonizitäten), die hier ausser Betracht bleibt. Dabei ist wesentlich, dass schon in nullter N herung ($\varepsilon \to 0$) die Eigenwerte W_0 und $W_{\pm 1}$ (sie bestimmen sich durch $\alpha_0 = 0$ bzw. $\alpha_1 = 0$) verschieden sind (ihre Differenz ist $4\, c_I U$). — Die Vernachlässigung der Kopplung wäre erst recht erlaubt, wenn etwa $\beta_1 \gg 1$ aber $\beta_0^2 \lesssim 1$ sein sollte (oder gar $\beta_0^2 < 0$; dann würden die Oszillationen $\delta = 0$ und $\delta = \pm 1$ in getrennten Potentialmulden stattfinden).

Es bleiben somit nur die beiden ersten Gleichungen (7), die beide von der Form sind:

$$\varphi'''' + (\alpha - \beta^2 \xi^2)\varphi'' + \lambda\varphi = 0. \tag{8}$$

Statt dessen schreiben wir mit den Bezeichnungen

$$\sqrt{2\beta}\cdot\xi = x, \quad \varphi(\xi) = u(x), \quad \frac{\alpha}{2\beta} = a: \tag{9}$$

$$u'''' + \left(a - \frac{1}{4}x^2\right)u'' + \frac{\lambda}{4\beta^2}u = 0. \tag{10}$$

Im Sinne einer „EULERschen Transformation" setzen wir

$$u(x) = \int dy\ (x-y)^n\ v(y), \tag{11}$$

wo die Integration in der komplexen y-Ebene um den Punkt $y = x$ herum zu führen ist, etwa von $y = +\infty$ (oder $-\infty$) ausgehend und dorthin zurück, wenn das Integral dort konvergiert. Wenn $n > -1$, kann statt dessen von $y = \underset{(-)}{+}\infty$ bis zum Punkte $y = x$ integriert werden, dies insbesondere für $n = 0, 1, 2, \ldots$ In letzterem Falle folgt aus (11) durch $(n+1)$-malige Differentiation:

$$u^{(n+1)}(x) = n!\, v(x) \quad (\text{wenn } n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Mit (11) wird die linke Seite der Gleichung (10) gleich

$$n\int dy\ (x-y)^{n-1}\left\{v'''(y) + \left(a - \frac{1}{4}y^2\right)v'(y) - \frac{1}{2}n\,y\,v(y)\right\}$$
$$+\frac{1}{4}\left[\frac{\lambda}{\beta^2} - n(n-1)\right]\int dy\ (x-y)^n\ v(y).$$

Wir wählen nun n so, dass der Koeffizient des zweiten Integrals verschwindet:

$$n_\pm = \frac{1}{2} \pm R, \quad \text{wo} \quad R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\beta^2}}; \tag{13}$$

dann ist (10) erfüllt, wenn für $v(x)$ gefordert wird:

$$v''' + \left(a - \frac{1}{4}x^2\right)v' - \frac{1}{2}n\,x\,v = 0. \tag{14}$$

Durch die weitere Substitution

$$v = e^{-\frac{1}{4}x^2}\,w(x) \tag{15}$$

folgt:

$$w''' - \frac{3}{2}xw'' + \left(a - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^2\right)w' + \left(-\frac{1}{2}a + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}n\right)xw = 0. \tag{16}$$

Ausgezeichnete Werte des Eigenwertparameters a erhält man durch die Forderung, dass die Gleichung (16) gerade Polynome als Lösungen haben soll:

$$w = x^{2l} + b_1 x^{2l-2} + \cdots + b_{l-1} x^2 + b_l. \tag{17}$$

Mit diesem Ansatz wird die linke Seite von (16) ein ungerades Polynom vom Grad $2l+1$, dessen höchstes Glied lautet:

$$x^{2l+1} \cdot \left[-\frac{1}{2} a + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} n + l\right];$$

dieses verschwindet für

$$a = \frac{3}{2} - n_{\pm} + 2l = 1 \mp R + 2l \quad (l = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

und dann können auch die anderen Glieder durch Wahl von $b_1, b_2, \ldots, b_l$ zu null gemacht werden, so dass (16) mit (17) erfüllt ist. *Im Anhang wird gezeigt werden, dass die a-Werte* (18) *die einzigen Eigenwerte unseres Problems sind.* Mit (9) und (13) schreibt sich (18):

$$\alpha = 2\beta\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\beta^2}} + 2l\right) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Es ist nun wichtig, den Anschluss an den Grenzfall verschwindender Tensorkraft herzustellen. Mit $U = 0, \lambda = 0$ wird (10) zur Oszillatorgleichung für u'', mit den Eigenwerten $a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$. Wir unterscheiden die zwei Fälle

(A): $a = \frac{1}{2} + 2l$, $u'' =$ *gerade* Oszillator-Eigenfunktion,

(B): $a = \frac{3}{2} + 2l$, $u'' =$ *ungerade* Oszillator-Eigenfunktion.

Andererseits wird nach (13) für $\lambda = 0$:

$$R = \frac{1}{2}, \qquad n_+ = 1, \qquad n_- = 0;$$

d. h. (18) liefert dieselben Eigenwerte a, wobei das obere Vorzeichen (n_+) dem Fall A, das untere Vorzeichen (n_-) dem Fall B zuzuordnen ist. (Nach (12) ist $v = u''$ für $n = 1$, und $v' = u''$ für $n = 0$; mit (A) bzw. (B) wird dann natürlich auch (14) erfüllt.) Nun steht u für φ_0 bzw. für $\overset{+}{\varphi} = \varphi_1 + \varphi_{-1}$. Auf Grund der Paritätsbedingungen (4) können wir daher — mit Bleuler — folgern, dass für $\delta = 0$ der Fall A und für $\delta = \pm 1$ der Fall B auszuschliessen ist; d. h. es bleiben nur die Eigenwerte

$$a = 1 + R + 2l \text{ für } \delta = 0, \quad a = 1 - R + 2l \text{ für } \delta = \pm 1. \tag{20}$$

Lässt man nun die Tensorkraft von null an anwachsen, so müssen sich die Eigenwerte stetig ändern, d. h. die Zuordnung (20) bleibt auch für $U \neq 0$ bestehen[12]): es gilt in (19) das untere Vorzeichen für $\delta = 0$, das obere für $\delta = \pm 1$. Das Ergebnis schreiben wir, indem wir mit Hilfe von (6) zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurückkehren:

$$\left.\begin{aligned} W_0 &= -V - \frac{8}{3} c_I U + 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{V + \frac{2}{3} c_I U}\,(1 + R_0 + 2l) + \ldots, \\ &\text{wo } R_0 = \sqrt[+]{\frac{1}{4} + \frac{2 c_I U}{V + \frac{2}{3} c_I U}}; \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} W_{\pm 1} &= -V + \frac{4}{3} c_I U + 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{V - \frac{1}{3} c_I U}\,(1 - R_1 + 2l) + \ldots, \\ &\text{wo } R_1 = \sqrt[+]{\frac{1}{4} - \frac{2 c_I U}{V - \frac{1}{3} c_I U}}. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Von diesen Eigenwerten interessieren hier nur die beiden mit $l = 0$, und auch von diesen nur der tiefere, d. i. W_0 für $c_I U > 0$, $W_{\pm 1}$ für $c_I U < 0$. Denn dies ist der Eigenwert, der, wenn man die Parameter ε/V, ε/U anwachsen und schliesslich $\gg 1$ werden lässt, stetig in den Eigenwert (2) übergehen muss, der im Grenzfall „*ε gross*" der tiefste ist[13]).

§ 3. Diskussion.

Zur Vereinfachung seien Treppenpotentiale angenommen: V, U konstant für $r < r_0$, $= 0$ für $r > r_0$. Natürlich ist dann auch die Potentialkurve $W(r)$ eine derartige Treppenkurve, und ihre Tiefe lässt sich, je nach der angenommenen Grösse von ε, nach (2) oder nach (21), (22) berechnen oder eventuell interpolieren.

Als numerisches Beispiel wählen wir

$$V = +20, \quad U = +100 \text{ (in MeV)}.$$

---

[12]) Die Funktionen u (11) lassen sich dann immer den Paritätsbedingungen (4) entsprechend symmetrisieren. — Das bei ganzzahligen R-Werten eintretende „Überschneiden" der Eigenwerte (20) mit den aus Paritätsgründen verbotenen Eigenwerten bleibt natürlich ohne Einfluss auf die Zuordnung (20).

[13]) Wenn man $|U|$ (ceteris paribus) anwachsen lässt, kann — je nach der Parität von δ und I — der Fall eintreten, dass $\lambda < -\beta^2/4$ und folglich R imaginär wird, womit die betreffenden Eigenwerte fortfallen. Wir brauchen jedoch diesen Fall nicht näher zu untersuchen, da für denjenigen der beiden Eigenwerte (21), (22), der (bei kleineren $|U|$-Werten) der tiefere ist (d. h. W_0 für $c_I U > 0$, $W_{\pm 1}$ für $c_I U < 0$), R immer reell bleibt.

In der Figur ist, für $I = 0, 1, 2$[14]), der jeweils tiefste Eigenwert W als Funktion von $\sqrt{\varepsilon}$ dargestellt, wobei die hyperbelartigen Kurvenzweige rechts der Formel (2), die Geraden links der Formel (21) bzw. (22) entnommen sind; und zwar gilt (21) oder (22), je nachdem ob $c_I U > 0$ oder < 0 ist; d. h. nach (1): für $I = 1$ gilt (21) ($\delta = 0$), für $I = 0$ und 2 gilt (22) ($\delta = \pm 1$).

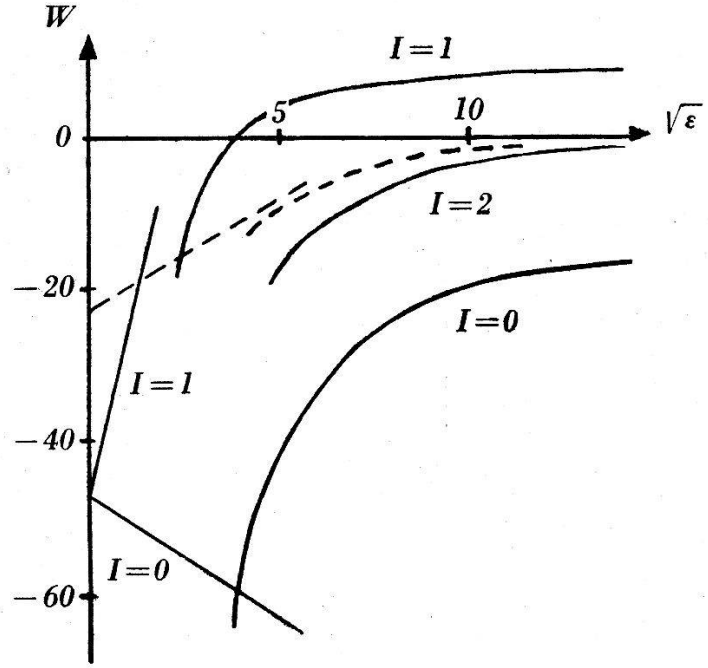

Fig. 1 [14]).

Die Figur lässt erkennen, dass bei abnehmender Isobaren-Energie ε alle Potentiale vertieft werden, im Sinne stärkerer Anziehung; dass aber diese Anziehung in den Fällen $I = 1$ und $I = 2$ ziemlich schwach bleibt, wenn man von kleinsten ε-Werten, die nicht ernstlich in Betracht kommen, absieht[15]). Dagegen erfolgt im $^3P_0$-Zustand eine kräftige Anziehung, falls $\varepsilon < 30$ MeV angenommen wird. Allerdings ist hier die Interpolation zwischen den beiden Grenzfällen mit einer Unsicherheit behaftet, die schwer zu beheben sein wird; doch wird man wenigstens schliessen dürfen, dass $W(^3P_0) \lesssim -40$ MeV für $\varepsilon < 30$ MeV.

Ein so tiefes Potential, mit einer Reichweite $r_0 \sim 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm, hat aber — trotz des geringen Gewichtes des $^3P_0$-Zustandes —

[14]) Für $I = 2$ ist die ausgezogene Kurve (ε *gross*) unter Berücksichtigung der Beimischung $J = 3$, $L = 1$ (letzter Term in (2)) berechnet, während in den punktierten Kurvenstücken diese Beimischung vernachlässigt ist (Formel (2) ohne letzten Term, bzw. (22)).

[15]) Dasselbe gilt auch für den Singulett-P-Zustand ($K = J = 0$, $L = I = 1$), dessen W-Kurve aus Gl. (40) in Helv. Phys. Acta **17**, S. 227, entnommen werden kann. Die Tensorkraft bleibt hier ohne Einfluss, wenn man die Kopplung mit den Beimischungen $L \geqq 3$ wieder vernachlässigt.

einen genügend starken Einfluss auf die Proton-Neutron-Streuung bei höheren Energien, um zur Erklärung der eingangs erwähnten Streu-Anisotropie herangezogen werden zu können[16]). Rechnet man mit Treppenpotentialen der Reichweite $r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm, und nimmt man die Neutronen-Energie zu 15 MeV an, so verursacht ein Potential der Tiefe 40 MeV eine Phasenverschiebung der P-Welle von rund 80° (gegenüber nur 30° bei 30 MeV Tiefe)[17]). Infolgedessen würde die $^3P_0$-Welle allein, wenn man ihr Potential zu — 40 MeV annimmt und die anderen P-Wellen als zu schwach vernachlässigt, schon eine recht starke Anisotropie hervorrufen; für das Verhältnis $\sigma(\pi)/\sigma(\pi/2)$ [$\sigma(\vartheta)$ = Streuquerschnitt als Funktion des Streuwinkels im Schwerpunktssystem] ergäbe sich ein Wert von ungefähr 0,6[17]). Dieser kommt dem AMALDIschen Messwert[1]) $0{,}52 \pm 0{,}03$ (bei Neutronen-Energien von rund 14 MeV) schon recht nahe.

Ein genauerer Vergleich, unter Zuziehung der anderen P-Wellen, dürfte sich erst lohnen, wenn verlässlichere Zahlwerte zugrundegelegt werden können. Insbesondere ist noch genauer zu untersuchen, ob die oben angenommenen numerischen Werte von V und U, zusammen mit einem ε-Wert von etwa 30 MeV oder weniger (vgl. die Figur), auch eine befriedigende Darstellung der S-Potentiale gestatten (wobei die D-Beimischungen natürlich nicht vernachlässigt werden dürfen). Eine vorläufige Abschätzung (die sich ebenfalls auf Rechnungen von Herrn F. VILLARS stützte) hat gezeigt, dass jene Zahlwerte wenigstens in der Grössenordnung das Richtige treffen. Etwa notwendige Korrekturen dürften also unsere Ergebnisse bezüglich der P-Potentiale im wesentlichen bestehen lassen.

Anhang.

Zum Beweis der obigen Eigenwert-Formeln wäre streng genommen zu zeigen, dass für die betreffenden W-Werte — und nur für diese — normierbare Eigenfunktionen der Schrödingergleichung (3) existieren. Zur Untersuchung der Normierbarkeit müsste aber der Verlauf der Funktionen φ_δ ausserhalb der Potentialmulde ($|\xi| \sim \pi$) bekannt sein, was nicht leicht zu erreichen sein dürfte[18]).

[16]) Ein stabiler P-Zustand wäre erst bei noch tieferen Potentialen möglich (mindestens 50 MeV für $r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm; vgl. BETHE und BACHER, Rev. of Modern Physics **8**, 82, 1936, Gl. (45d) auf S. 113).

[17]) Diese Angaben sind der ETH-Diplomarbeit von F. VILLARS (unveröffentlicht) entnommen.

[18]) Bezüglich des einfacheren Falles $J = 0$ vgl. G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **17**, 252, 1944, S. 265 bis 267.

Statt dessen betrachten wir den Funktionsverlauf am „Rande der Potentialmulde", wo die Entwicklung nach Potenzen von ξ, ξ' noch legitim ist, auf Grund der Näherungsgleichungen (7 u.ff.), indem wir in deren Lösungen ξ gegen $\pm\infty$ gehen lassen. Im Falle $U = 0$ waren es die Oszillator-Eigenfunktionen $\varphi'' = \psi$, die sich durch ihr quasi-exponentielles Abfallen nach beiden Seiten vor den anderen Lösungen auszeichneten. Diese Rolle muss hier von den Funktionen v bzw. v' übernommen werden, die ja im Limes $U \to 0$, d. h. $n \to 1$ bzw. 0, in Lösungen der Oszillatorgleichung übergehen. Wir werden also zu zeigen haben, dass die a-Werte (18) die einzigen sind, die sich aus dem Kontinuum herausheben durch ein ausgezeichnetes asymptotisches Verhalten, nämlich beiderseitigen quasi-exponentiellen Abfall, der Funktionen v (oder v'). Nachher ist auf Grund von (11) unschwer einzusehen, dass auch mit Bezug auf die Funktionen u bzw. die Differentialgleichung (10) keine ausgezeichneten a-Werte ausser den Eigenwerten (18) existieren.

Für die Lösungen v der Gleichung (14) machen wir den Ansatz:

$$v(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2} \int dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} F(x+it), \tag{23}$$

wobei über die Integrationswege in der komplexen t-Ebene noch zu verfügen sein wird. Unter Verwendung der Identität

$$\int dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} x f(x+it) = \int dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(x + it + \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x+it) \tag{24}$$

findet man:

$$v'' + \left(a - \frac{1}{4}x^2\right) v =$$

$$e^{-\frac{1}{4}x^2} \int dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) F(x+it) - (x+it) F'(x+it)\right],$$

und weiter, immer unter Beachtung von (24):

$$v''' + \left(a - \frac{1}{4}x^2\right) v' - \frac{1}{2} n x v = \left[v'' + \left(a - \frac{1}{4}x^2\right) v\right]' - \frac{1}{2}(n-1) x v$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2} \int dt\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \left[\left(a + n - \frac{3}{2}\right)(x+it) F(x+it)\right.$$

$$\left. - \left\{\left(a - n - \frac{1}{2}\right) + (x+it)^2\right\} F'(x+it) + (x+it) F''(x+it)\right].$$

Zur Erfüllung von (14) genügt es also zu fordern:

$$x F''(x) - \left\{a - n - \frac{1}{2} + x^2\right\} F'(x) + \left(a + n - \frac{3}{2}\right) x F(x) = 0. \tag{25}$$

Diese Differentialgleichung hängt mit derjenigen der konfluenten hypergeometrischen Funktion[19]) zusammen, wie durch folgende Substitutionen ersichtlich wird:

$$F(x) = G\left(\frac{1}{2}x^2\right) = G(z) = e^{\frac{1}{2}z}\, z^{-m-\frac{1}{2}}\, M(z)\,, \tag{26}$$

$$G''(z) + \left(\frac{2m+1}{z} - 1\right) G'(z) + \frac{k-m-\frac{1}{2}}{z}\, G(z) = 0\,, \tag{27}$$

$$M''(z) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{z^2}\right) M(z) = 0\,, \tag{28}$$

wo

$$m = \frac{1}{4}n - \frac{1}{4}a - \frac{1}{8}\,, \qquad k = \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}a - \frac{3}{8}\,. \tag{29}$$

Im Integranden in (23) ist also einzusetzen:

$$F(x+it) = G\left(\frac{1}{2}(x+it)^2\right) = e^{\frac{1}{4}(x+it)^2} \left(\frac{x+it}{\sqrt{2}}\right)^{-2m-1} M\left(\frac{1}{2}(x+it)^2\right) \tag{30}$$

wo G und M Lösungen von (27) bzw. (28) sind.

Wird der Fall „$2m =$ *ganze Zahl*" vorerst ausgeschlossen, so sind zwei unabhängige Lösungen von (28) (vgl. *WW*[19]), Ziffer 16.1):

$$M_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z}\, z^{m+\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!(1+2m)}\, z + \frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!(1+2m)(2+2m)}\, z^2 + \ldots\right\}, \tag{31}$$

$$M_{k,-m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z}\, z^{-m+\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{\frac{1}{2}-m-k}{1!(1-2m)}\, z + \frac{\left(\frac{1}{2}-m-k\right)\left(\frac{3}{2}-m-k\right)}{2!(1-2m)(2-2m)}\, z^2 + \ldots\right\}. \tag{32}$$

Zwei andere Partikularlösungen von (28), die sich zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens ($|z| \gg 1$) eignen, sind (vgl. *WW*, Ziffer 16.31 und 16.41):

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z}\, z^k \left\{1 + 0(z^{-1})\right\}, \tag{33}$$

$$W_{-k,m}(-z) = e^{\frac{1}{2}z}\, (-z)^{-k} \left\{1 + 0\,(z^{-1})\right\}, \tag{34}$$

$$M_{k,\pm m}(z) = c_{\pm}\, W_{k,m}(z) + c'_{\pm}\, W_{-k,m}(-z)\,. \tag{35}$$

In jedem Fall konvergiert das t-Integral in (23), wenn der Integrationsweg längs der reellen t-Achse ins Unendliche geführt wird.

---

[19]) Vgl. Whittaker und Watson, Modern Analysis, Cambridge University Press, 3. Auflage, Kapitel XVI (im Folgenden als *WW* zitiert).

Wählen wir in (30) bzw. (23) zunächst die Partikularlösung $M_{k,m}$ (31)[20]), so ist die Funktion $F(x+it)$ (30) in der t-Ebene, einschliesslich des Punktes $t = ix$, regulär; folglich liefern alle Integrationswege von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ die gleiche Funktion v, und wir können längs der reellen t-Achse integrieren. Speziell für $|x| \gg 1$ kann der Integrand nach fallenden Potenzen von $x + it$, gemäss (35), (33) und (34), entwickelt werden. Wenn $c'_+ \neq 0$ ist, liefert $W_{-k,m}(-z)$ den Hauptterm von v:

$$v(x) \sim \int dt\, e^{-(t-ix/2)^2} (t-ix)^{-2m-2k-1} + \ldots,$$

$$v(x) = \text{const} \cdot x^{-2n} \{1 + 0(x^{-2})\} \quad (c'_+ \neq 0). \tag{36}$$

Anders im Falle $c'_+ = 0$, wo $M_{k,m}(z) = c_+ W_{k,m}(z)$. Da (nach *WW*, Ziffer 16.41)

$$c'_+ = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(m-k+\frac{1}{2}\right)} e^{k i \pi},$$

tritt dieser Fall ein für

$$-\left(m-k+\frac{1}{2}\right) = l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

oder nach (29) für

$$a = \frac{3}{2} - n + 2l. \tag{38}$$

Dies sind die Eigenwerte (18). In der Tat bedeutet (37), dass die Reihe (31) abbricht, und dann ist aus (30) und (23) leicht zu ersehen, dass die betreffenden Lösungen v übereinstimmen mit den in (15), (17) angegebenen Eigenfunktionen: $e^{-x^2/4}$ mal Polynom vom Grade $2l$[21]).

Wird andererseits $M_{k,-m}$ (32) in (30) bzw. (23) eingesetzt, so gilt für $t \cong ix$:

$$F(x+it) = \text{const} \cdot (t-ix)^{-4m} \{1 + \ldots\}; \tag{39}$$

d. h. der Integrand in (23) wird, wenn

$$-4m \neq 0, 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

singulär am Punkte $t = ix$. Die zwei Integrationswege, die oberhalb und unterhalb dieses Punktes von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$

[20]) Diese Lösung v wird auch erhalten, wenn man in (14) v nach Oszillator-Eigenfunktionen entwickelt und für diese eine geeignete Integraldarstellung verwendet.

[21]) Falls n komplex ist (vgl. Fussnote 13), gibt es keine derartigen Eigenfunktionen zu reellen Werten von a.

führen, liefern dann zwei unabhängige Partikularlösungen v_1, v_2. Lässt man x gegen $+\infty$ gehen, so wird v_1 hauptsächlich durch den Beitrag einer Schleife bestimmt, die etwa längs der imaginären t-Achse um den singulären Punkt herum und wieder zurück führt:

$$v_1(x \to +\infty) = \text{const} \cdot e^{+\frac{1}{4}x^2} \cdot x^{4m-1} \{1 + 0(x^{-2})\}; \tag{41}$$

für $x \to -\infty$ hingegen kann in v_1 längs der reellen t-Achse integriert werden:

$$v_1(x \to -\infty) = \begin{cases} \text{const} \cdot x^{-2n}\{1 + 0(x^{-2})\} & \text{für } c'_- \neq 0, \\ \text{const} \cdot e^{-\frac{1}{4}x^2} x^{a+n-\frac{3}{2}}\{1 + 0(x^{-2})\} & \text{für } c'_- = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Bei v_2 tauschen positive und negative x-Werte die Rollen:

$$v_2(x) = \text{const} \cdot v_1(-x) \tag{43}$$

Wegen des quasi-exponentiellen Anstiegs für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ kommt weder v_1 noch v_2 noch eine Linearkombination für eine Eigenfunktion in Betracht.

Das Gesagte gilt aber nur unter der Voraussetzung (40). Da ganzzahlige Werte von $2m$ vorerst ausgeschlossen waren, betrachten wir zunächst die Fälle

$$-4m = 2l + 1, \quad l = 0, 1, 2, \ldots; \tag{44}$$

dies heisst nach (29):

$$a = \frac{1}{2} + n + 2l. \tag{45}$$

Jetzt ist $F(x + it)$ nach (39) bei $t = ix$ regulär; die Schleife, die für den exponentiellen Anstieg gemäss (41) verantwortlich war, fällt fort. Unter den Linearkombinationen von $M_{k,m}$ und $M_{k,-m}$, die nunmehr in (30) eingesetzt werden können, befindet sich speziell die Funktion $W_{k,m}(z)$; diese kann eine Funktion v liefern, die beidseitig exponentiell abfällt[22]). Die a-Werte (45)

[22]) Hier ist aber zu beachten, dass die Funktion $W_{k,m}(z)$, wie sie bei WW, Ziffer 16·12, definiert ist, längs der negativ-reellen z-Achse unstetig ist; infolgedessen liefert sie für $x > 0$ und $x < 0$ im allgemeinen verschiedene Lösungen v, die sich bei $x = 0$ nicht stetig aneinander schliessen. In den Fällen $m = -\frac{1}{4}$ $(l = 0)$, $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ lässt sich $W_{k,m}(z)$ nach WW, Ziffer 16·5, durch HERMITEsche Polynome ausdrücken; die entsprechenden Funktionen v sind von der Form: $e^{-x^2/4}$ mal Polynom vom Grad $2n-1$. Für andere n-Werte jedoch stellt sich

können somit gleichfalls Eigenwerte der Gleichung (14) sein. Nach (13) ist aber

$$\frac{1}{2}+n_{\pm}+2l=1\pm R+2l=\frac{3}{2}-n_{\mp}+2l;$$

d. h. die Eigenwerte (45) der mit $n=n_{+}$ gebildeten Gleichung (14) sind gleich den Eigenwerten (38) der Gleichung (14) mit $n=n_{-}$ (und umgekehrt). In Bezug auf die Gleichung (10), deren Lösungen u gemäss (11) mittels des einen oder des anderen n-Wertes darstellbar sind, liefert also der Fall (44) keine neuen Eigenwerte zu (18) hinzu. Die zwei so erhaltenen, zum gleichen Eigenwert a gehörigen Funktionen u sind identisch, wie aus ihrem asymptotischen Verhalten zu ersehen ist[23]).

Es bleibt schliesslich noch der Fall, dass $2m$ ganzzahlig ($\neq 0$) wird. Eine der beiden Reihen (31), (32) wird dann unbrauchbar, es sei denn, dass sie abbricht, bevor die Glieder mit verschwindendem Nenner auftreten. An die Stelle einer unbrauchbaren Funktion ($M_{k,-|m|}$) tritt jeweils eine Lösung mit logarithmischer Singularität bei $z=0$ ($t=ix$)[24]), die sicher keine Eigenfunktion v liefert. Entsprechendes gilt für $2m=0$, wo (31) und (32) identisch werden. Es bleibt also nur $M_{k,|m|}$ zu betrachten. Ist nun $2m$ ganz und $\geqq 0$, so bleibt alles, was oben über die Lösung mit $M_{k,m}$ gesagt wurde, ohne weiteres gültig; neue Eigenwerte können nicht auftreten. Sei andererseits

$$2m=-(l'+1), \qquad l'=0,1,2,\ldots \tag{46}$$

Mit $M_{k,-m}$ wird dann $F(x+it)$ nach (39) regulär bei $t=ix$, und v verhält sich asymptotisch wie x^{-2n} (vgl. (36)), ausser wenn die Reihe (32) abbricht, was für $n=1,2,3,\ldots$ der Fall ist; dann wird v gleich $e^{-x^2/4}$mal gerades Polynom in x. Eigenfunktionen v werden also erhalten für $n=1,2,3,\ldots$, was zusammen mit (46) bedeutet:

$$a=\frac{3}{2}+n+2l'; \; n=1,2,3,\ldots; \; l'=0,1,2,\ldots \tag{47}$$

Nun ist aber zu beachten, dass im Falle (46) die aus $M_{k,+m}$ er-

---

der exponentielle Abfall nur auf *einer* Seite ein; so z. B. für $m=-\frac{1}{4}$, $n=0$, wo $W_{k,m}(z)$ die Funktion $v=\int_x^{\infty} e^{-x^2/4}\,dx$ ergibt (zur stetigen Fortsetzung bei $x=0$ dient hier die Partikularlösung $v=const$).

[23]) Für $x\to+\infty$ oder $x\to-\infty$ verschwindet die Funktion u wie $e^{-x^2/4}x^{a-5/2}$, während sie auf der anderen Seite im allgemeinen (d.h. ausser für besondere Werte sowohl von n als von a) wie $x^{n_{\mp}}$ variiert.

[24]) Vgl. *WW*, erste Fussnote auf S. 346.

haltenen Eigenwerte (38) zum Teil ausfallen. Wählt man einen der a-Werte (38), so ergibt (31) mit (29) für $n \neq 0$:

$$M_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{m+\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{l}{1!(l-n)} z + \frac{l(l-1)}{2!(l-n)(l-1-n)} z^2 \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{l(l-1)(l-2)\ldots 2\cdot 1}{l!(l-n)(l-1-n)\ldots(2-n)(1-n)} z^l \right\}.$$

Wenn hier verschwindende Nenner auftreten, d. h. wenn

$$n = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } l = n + l', \text{ wo } l' = 0, 1, 2, \ldots,$$

so sind die betreffenden a-Werte (38) $\left(a = \frac{3}{2} - n + 2l = \frac{3}{2} + n + 2l'\right)$ zu streichen. Doch werden sie gerade ersetzt durch die aus $M_{k,-m}$ gewonnenen Eigenwerte (47). Für $n = 0 \left(a = \frac{3}{2} + 2l\right)$ schliesslich wird $\left(\text{wegen } \frac{1}{2} + m - k = 1 + 2m\right)$ $M_{k,m}(z) = e^{+z/2} z^{m+\frac{1}{2}}$, was $v = const$ ergibt; hier treten die früher erwähnten Eigenfunktionen (v' = ungerade Oszillator-Eigenfunktion) in der Lücke.

Damit ist nachgewiesen, dass alle a-Werte (18) ohne Ausnahme, und keine andern, Eigenwerte sind in dem Sinne, dass es zugehörige Lösungen v (oder v') mit beidseitigem quasi-exponentiellem Abfall gibt.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.