Zum Zusammenhang zwischen Feld- und Bewegungsgleichungen

Autor(en): **Scheidegger, Adrian C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **23 (1950)**

Heft VI-VII

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112131

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zum Zusammenhang zwischen Feld- und Bewegungsgleichungen

von **Adrian E. Scheidegger**

(24. V. 1950.)

Summary. The problem whether it is a general feature of non-linear field theories that the equations of motion of the sources can be deduced from the field equations, has not yet been solved.

In this connection we apply a generalization of Einstein, Infeld and Hoffmann's approximation procedure to different types of field theories. It is shown that in any scalar or vector field theory whatsoever this method does not yield the equations of motion. It is seen that a non-linear field theory must be at least a tensor theory of the rank two if the analogue to Einstein, Infeld and Hoffmann's method is to be possible.

Die Frage nach dem Zusammenhange einer gegebenen Feldtheorie mit den Bewegungsgleichungen für die Quellen des Feldes ist für verschiedene Fälle untersucht worden. So ist es bekannt, dass es möglich ist, in der allgemeinen Relativitätstheorie die Bewegungsgleichungen aus Einsteins Feldgleichungen abzuleiten[1][2], während für den Fall eines elektromagnetischen Feldes ein entsprechendes Verfahren nicht aufgedeckt werden konnte. Es ist leicht einzusehen, dass eine Feldtheorie nicht linear sein darf, wenn darin die Bewegungsgleichungen enthalten sein sollen; denn in einer linearen Feldtheorie stellen die Gleichungen, die das Feld mehrerer Quellen beschreiben, einfach eine lineare Superposition aller Gleichungen, die je das Feld einer einzigen Quelle betreffen, dar und können somit keine Wechselwirkung enthalten.

Es ist daher von vorneherein klar, dass wir nicht erwarten dürfen, in der linearen Elektrodynamik von Maxwell die Bewegungsgleichungen eines Elektrons aus den Feldgleichungen herzuleiten. Dazu müssen wir mindestens auf eine nichtlineare Verallgemeinerung der Elektrodynamik zurückgreifen, wie sie etwa von Born und Infeld[3] versucht worden ist. Nun ist aber nichts darüber bekannt, dass die Born-Infeld-Theorie auf die Bewegungsgleichungen des Elektrons führe.

---

[1]) Einstein, Infeld und Hoffmann, Annals of Mathematics **39**, 66, 1938.

[2]) Einstein und Infeld, Canadian Journal of Mathematics **1**, 209, 1949.

[3]) Born und Infeld, Proc. Roy. Soc. A **144**, 425, 1934.

Es erhebt sich daher die Frage, ob es ein genereller Zug der nichtlinearen Feldtheorien ist, dass sie die Bewegungsgleichungen der Quellen enthalten. Um dies zu untersuchen, ist es naheliegend, eine Verallgemeinerung der bekannten Approximationsmethode von EINSTEIN, INFELD und HOFFMANN[1][2]) aufzustellen zu versuchen, von der bekannt ist, dass sie im Falle der Relativitätstheorie zu den Bewegungsgleichungen der Quellen führt.

In diesem Zusammenhange mögen wir bemerken, dass neulich BERGMANN[4]) ein kovariantes Schema für allgemeine Fälle von Feldtheorien aufgestellt hat. Die Relativitätstheorie erscheint dann als ein Spezialfall in diesem Formalismus. Das Hauptziel der Bergmann'schen Arbeit war, alle diese Feldtheorien in eine Hamilton'sche Form zu kleiden, so dass deren Quantisierung möglich wird; im klassischen Teil seiner Untersuchungen streift er aber einige Tatsachen, die eng mit unserem Problem verknüpft sind. So stellt er unter anderem fest, dass ein analoges Vorgehen wie die Approximation von EINSTEIN, INFELD und HOFFMANN in einer nichtlinearen Feldtheorie auf die Bewegungsgleichungen führe. Dies würde in der Tat bedeuten, dass die Bewegungsgleichungen eines Elektrons in der Born-Infeld-Theorie enthalten wären, was, angesichts der vielen fruchtlosen Versuche, dieselben irgendwie aus einer Feldtheorie herzuleiten, kaum glaubwürdig erscheint. Wir wollen daher untersuchen, ob sich die Methoden von BERGMANN auf die Born-Infeld- und andere nichtlinearen Feldtheorien anwenden lassen.

Zur leichteren Verständlichkeit resümieren wir kurz die wichtigsten Formeln der Bergmann'schen Arbeit. Für die Details müssen wir jedoch auf das Original[4]) verweisen.

Wir bezeichnen die Feldvariablen mit $y_A\,(A = 1 \ldots N)$. Die Feldgleichungen sollen aus einem Extremalprinzip

$$\delta I = \delta \int L(y_A\,,\, y_{A\,|\,\beta})\, d^4 x = 0 \tag{1}$$

(wo $y_{|\,\beta} = \partial y / \partial x^\beta$; $\beta = 0 \ldots 4$; $x^0 =$ Zeit, $c = 1$) folgen und haben daher die Form

$$L^A \equiv \frac{\partial L}{\partial y_A} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A\,|\,\varrho}}\right)_{|\,\varrho} = 0 \tag{2}$$

Hierbei ist, wie üblich, angenommen, dass über jeden Index, der zweimal erscheint, zu summieren ist. Unter einer infinitesimalen Koordinatentransformation

$$x^{\mu *} = x^\mu - \varepsilon \xi^\mu \tag{3}$$

---

[4]) BERGMANN, Phys. Rev. **75**, 680, 1949.

transformieren sich die Feldvariabeln in folgender Weise

$$\bar{\delta} y_A \equiv y_A^* - y_A = \varepsilon (F_{A\mu}{}^{B\nu} \quad \xi^\mu_{|\nu} - y_{A|\mu} \xi^\mu) \tag{4}$$

Dabei sind die $F_{A\mu}{}^{B\nu}$ für die Art der Feldvariablen charakteristische Zahlen. Die Theorie ist vollständig kovariant, wenn unter einer Koordinatentransformation die Lagrangefunktion sich nur um eine Divergenz ändert.

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft dieses Schemas ist, dass die Feldvariablen 4 Identitäten erfüllen müssen. Dies ist nicht eine zusätzliche Annahme, sondern eine Folge der geforderten Kovarianz der Theorie. Man kann zeigen, dass letztere Forderung nur erfüllt werden kann, falls

$$(F_{A\mu}{}^{B\nu} \quad y_B L^A)_{|\nu} + y_{A|\mu} L^A = 0 \tag{5}$$

Um die Bewegungsgleichungen herzuleiten, verwenden wir eine Approximationsmethode, die derjenigen von Einstein, Infeld und Hoffmann entspricht. Wir entwickeln die Feldvariablen nach Potenzen eines kleinen Parameters λ:

$$y_A = {}_0y_A + \lambda\, {}_1y_A + \lambda^2\, {}_2y_A + \cdots \tag{6}$$

Die zeitliche Änderung der Feldgrössen soll hierbei langsam im Vergleich zur räumlichen sein. Unter dieser Annahme sind die zeitlichen Ableitungen einer Feldgrösse von höherer Ordnung als die räumlichen. Wir können dies in unserer Schreibweise zum Ausdruck bringen, indem wir

$$\tau = x^0 \cdot \lambda \tag{7}$$

setzen. Dann können wir Ableitungen nach τ gleich wie die räumlichen Ableitungen behandeln:

$$y_{|0} = \frac{\partial y}{\partial x^0} = \lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \equiv \lambda \cdot y_{,0} \tag{8}$$

Als die nullte Näherung in unserer Approximationsmethode nehmen wir eine triviale Lösung der Feldgleichungen, in der alle Feldvariablen Konstante sind. Dann wird die erste Näherung ergeben, dass die Lösung y_B nicht im ganzen Raum definiert ist. Es werden sich Singularitäten einstellen, die die Quellen des Feldes darstellen. Ferner ergibt sich wegen der Identitäten (5), dass die Approximationsmethode nur dann in konsistenter Weise fortgeführt werden kann, falls die folgenden Oberflächenintegrale

$$\oint_s F_{A\mu}{}^{Gt} \; {}_0y_G \quad {}_2L^A ({}_0y + \lambda\, {}_1y)\, n_t \, dS = 0 \tag{9}$$

um die Singularitäten verschwinden. Hierbei sind n_t die Komponenten des Einheitsvektors normal zu dS. Dies sind die 3 Bewegungsgleichungen und die Erhaltungsgleichung für die Polstärke einer Quelle.

Um die Möglichkeit der Herleitung der Bewegungsgleichungen für spezielle Fälle von Feldtheorien zu untersuchen, wollen wir die obigen Formeln systematisch auf gewisse Typen von Feldvariabeln anwenden.

Hierzu beginnen wir als einfachstem Fall mit einer einzigen skalaren Feldgrösse

$$y_A = \Phi. \tag{10}$$

Nun ist in diesem Falle die Transformation der Feldvariablen durch den letzten Term in (4) gegeben, so dass alle Koeffizienten $F_{A\alpha}^{B\beta}$ verschwinden. Die Oberflächenintegrale reduzieren sich daher zu trivialen Identitäten, und wir erhalten das Resultat, dass man keine Bewegungsgleichungen in einem Skalarfeld ableiten kann.

Die nächst kompliziertere Art von Feldvariablen sind Vektoren. Somit setzen wir

$$y_A = A_\alpha. \tag{11}$$

Unter der infinitesimalen Koordinatentransformation (3) erhalten wir die folgende Änderung der Feldvariablen (abgesehen von dem Term, der der Substitution der Argumente entspringt)

$$A_\mu^* = (\delta_{\varrho\mu} - \varepsilon\,\xi^\varrho_{|\mu})\,A_\varrho = \delta_{\varrho\mu} A_\varrho - \varepsilon\,\xi^\mu_{|\lambda}\,\delta_{\varrho\varkappa}\,\delta_{\mu\lambda}\,A_\varrho \tag{12}$$

Folglich

$$F_{\mu\varkappa}^{\varrho\lambda} = -\delta_{\varrho\varkappa}\,\delta_{\mu\lambda} \tag{13}$$

Mit diesen Werten für die Koeffizienten $F_{\mu\varkappa}^{\varrho\lambda}$ ergeben die Oberflächenintegrale (die „triviale", konstante Lösuug der Feldgleichungen ist mit a_α bezeichnet)

$$0 = -\oint F_{\alpha\mu}^{\gamma t}\, a_\gamma\, {}_2L^\alpha\, n_t\, dS = a_\mu \oint {}_2L^t\, n_t\, dS \tag{14}$$

Hieraus ersehen wir, dass sich die Bedingungen (9) im Falle jeder Vektortheorie zu einer einzigen Gleichung reduzieren. Diese kann aber nicht genügen, um die Bewegung der Singularität, auf die sie sich bezieht, festzulegen. Es ist anzunehmen, dass sie die Erhaltungsgleichung für die Polstärke der betreffenden Quelle darstellt. Wir schliessen daher, dass Einstein, Infeld und Hoffmann's Methode zur Herleitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen in einer Vektorfeldtheorie kein Analogon besitzt.

Elektrodynamik ist eine Vektortheorie; elektrische und magnetische Feldstärke lassen sich durch ein (vierer-) Vektorpotential darstellen. Daher ist es nicht möglich, die Bewegungsgleichungen wie in der Relativitätstheorie aus den Feldgleichungen herzuleiten, auch wenn die letzteren nicht linear angesetzt werden.

Schliesslich betrachten wir noch Tensorfeldtheorien. In diesem Falle setzen wir

$$y_A = A_{\alpha\beta} \tag{15}$$

Es ist zu erwarten, dass in diesem Falle die Oberflächenintegrale (9) auf Bewegungsgleichungen führen, da die vorliegende Methode ja derjenigen von Einstein, Infeld und Hoffmann nachgebildet ist, die bekanntlich im Falle der Relativitätstheorie mit Tensoren als Feldvariablen anwendbar ist. In der Tat finden wir

$$F_{\mu\nu\varkappa}{}^{\varrho\sigma\lambda} = -\delta_{\sigma\nu}\delta_{\varrho\varkappa}\delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}\delta_{\sigma\varkappa}\delta_{\varrho\mu} \tag{16}$$

und somit ergeben die Bedingungen (9)

$$0 = \oint F_{\alpha\beta\mu}{}^{\gamma\delta t}\, a_{\gamma\delta}\, {}_2L^{\alpha\beta}\, n_t\, dS = -\oint \{a_{\mu\beta}\, {}_2L^{t\beta} + a_{\beta\mu}\, {}_2L^{\beta t}\}\, n_t\, dS \tag{17}$$

Wir erhalten daher den Satz, dass ein direktes Analogon zur Methode von Einstein, Infeld und Hoffmann nur in Feldtheorien, wo die Feldvariablen von mindestens der Stufe zwei sind, existieren kann.

Abschliessend möchte ich erwähnen, dass ich Herrn Professor Infeld sehr dafür verpflichtet bin, dass er mich auf die hier untersuchten Fragen aufmerksam gemacht hat. Die vorliegende Arbeit ist während eines Aufenthaltes an der University of Toronto, Ontario, entstanden, der mir von der Institution des schweizerisch-kanadischen Studentenaustausches vermittelt wurde. Allen beteiligten Herren und Amtsstellen, die keine Mühe gescheut haben, diesen Studienaufenthalt so fruchtbringend als möglich zu gestalten, sei hiermit der beste Dank ausgesprochen.

Department of Applied Mathematics,
University of Toronto, Ontario, Canada.*)

*) Gegenwärtige Adresse des Autors: Dept. of Physics, Queen's University, Kingston, Canada.