# Théorème H et unitarité de S

Autor(en): **Inagaki, M. / Wanders, G. / Piron, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **27 (1954)**

Heft I

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112504

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Théorème $H$ et Unitarité de $S$

par M. Inagaki, G. Wanders*), Genève, et C. Piron, Lausanne.

(23. I. 1954.)

*Summary.* It is shown that BOLZMANN's $H$-theorem holds for finite, definite and doubly normalised transition probabilities $A_{ik}$.

M. STUECKELBERG a attiré notre attention sur le fait que sa déduction du théorème $H$ de l'unitarité de $\boldsymbol{S}$[1]) n'est pas satisfaisante. D'une part, les matrices $\boldsymbol{A}$ ne forment pas un groupe continu, une variation finie de l'entropie ne peut donc se déduire de la variation infinitésimale. D'autre part, il reste à établir que $(\boldsymbol{A} - \mathbf{1})$ peut toujours être décomposée en une somme de matrices cycliques à coefficients positifs.

Nous proposons ici une démonstration générale du théorème $H$, basée sur l'unitarité de $\boldsymbol{S}$, indépendante de celle présentée en I. L'*état thermodynamique* d'un *système* à l'instant $t$ est décrit par une *distribution de probabilité* $w = w_i$ sur les $n$ *états* qu'un micro-observateur peut distinguer ($i = 1, \ldots, n$). L'état $w''$ à l'instant $t''$ est relié à l'état $w'$ à l'instant antérieur $t'$ ($t'' \geqslant t'$) par les *probabilités de transition* $A_{ik}$:

$$w''_i = \sum_k A_{ik}\, w'_k \quad (w'' = \boldsymbol{A}\, w'). \tag{1}$$

La probabilité de transition $A_{ik}$ se déduit de l'élément $S_{ik}$ de la *matrice de transition* $\boldsymbol{S}$:

$$A_{ik} = |S_{ik}|^2 \geqslant 0\,. \tag{2}$$

L'unitarité de $\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^\dagger = \boldsymbol{S}^\dagger\boldsymbol{S} = \mathbf{1}$) implique une *double normalisation* de $\boldsymbol{A}$:

$$\sum_i A_{ik} = \sum_k A_{ik} = 1\,. \tag{3}$$

D'autre part, l'*entropie* $S$ du système à un instant donné est fonctionnelle de la distribution de probabilité $w$ à cet instant: $S = S[w]$.

---

*) Bénéficiaire de l'aide financière de la Commission Suisse de l'énergie Atomique (C.S.A.).

[1]) STUECKELBERG, Théorème $H$ et unitarité de $\boldsymbol{S}$, Helv. Phys. Acta **25**, 577 (1952). (Cet article est désigné dans la suite par I.)

L'idée de M. STUECKELBERG est que *le théorème H de* BOLTZMANN *résulte de l'unitarité de* $\boldsymbol{S}$ (de la double normalisation de $\boldsymbol{A}$) si $S[w]$ est une *fonctionnelle symétrique* en les $w_i$ et si la *dérivée fonctionnelle* $-g_i = \delta S[w]/\delta w_i$ est «*monotone*» *décroissante*. On doit donc avoir, compte tenu de (1) et (3):

$$\Delta S = S[w''] - S[w'] \geqslant 0 \tag{4}$$

si:

$$S[w^*] = S[w] \quad (\textit{symétrie}), \tag{5}$$

où $w^*$ se déduit de $w$ par permutation des $w_i$, et:

$$(g_i - g_k)(w_i - w_k) \geqslant 0 \quad (\text{«}\textit{monotonie}\text{»}). \tag{6}$$

Ce théorème a été démontré par l'un de nous (M. I.) dans le cas d'une fonctionnelle symétrique quelconque. La démonstration étant assez longue, nous nous limitons ici au cas:

$$S = \sum_i f(w_i); \quad g_i = g(w_i) = -\frac{df}{dw}(w_i). \tag{7}$$

Soient $W$ et $w$ les suites obtenues à partir des suites $w''$ et $w'$ en réordonnant leurs termes en ordre décroissant:

$$W_i \geqslant W_{i+1}; \quad w_i \geqslant w_{i+1}. \tag{8}$$

$W$ et $w$ sont liées par une matrice $\boldsymbol{B}$:

$$W_i = \sum_k B_{ik} w_k \quad (W = \boldsymbol{B}\, w) \tag{9}$$

qui satisfait les mêmes conditions (2) et (3) que $A$. En effet, $\boldsymbol{B}$ se déduit de $\boldsymbol{A}$ par permutations de lignes et colonnes qui laissent inchangées les sommes apparaissant dans (3). D'autre part $\Delta S = S[W] - S[w]$, en vertu de la symétrie (5). Ainsi, compte tenu de (7) et (9), avec $G_i = g(W_i)$ et $b_{ik} = (B_{ik} - \delta_{ik})$, on a:

$$\Delta S = \sum_i [f(W_i) - f(w_i)] = -\sum_i \int_{w_i}^{W_i} g(x)dx \geqslant -\sum_i \sum_k G_i b_{ik} w_k \tag{10}$$

car, par la monotonie (6):

$$-\int_{w_i}^{W_i} g(x)\, dx \geqslant -G_i(W_i - w_i).$$

La double normalisation de $\boldsymbol{B}$ donne:

$$\sum_i b_{ik} = \sum_k b_{ik} = 0. \tag{11}$$

Ces relations permettent d'éliminer dans (10) les $(2n-1)$ éléments $b_{1k}$ et $b_{i1}$, et l'on obtient:

$$\Delta S \geqslant -\sum_{i\geqslant 2}\sum_{k\geqslant 2}(G_1-G_i)(w_1-w_k)\,b_{ik} =$$

$$= -\sum_{i\geqslant 2}\sum_{k\geqslant 2} b_{ik}\sum_{l=2}^{i}(G_{l-1}-G_l)\sum_{m=2}^{k}(w_{m-1}-w_m)\,.$$

En inversant l'ordre des sommations:

$$\Delta S \geqslant -\sum_{l\geqslant 2}\sum_{m\geqslant 2}(G_{l-1}-G_l)(w_{m-1}-w_m)\,\beta_{lm} \tag{12}$$

avec

$$\beta_{lm} = \sum_{i\geqslant l}\sum_{k\geqslant m} b_{ik}\,. \tag{13}$$

En vertu de la monotonie de $g$ et de la définition (8) des suites $W$ et $w$, le produit de deux différences dans (12) est toujours positif. Il reste donc à démontrer que $\beta_{lm}\leqslant 0$. Si $l\geqslant m$, on élimine les termes diagonaux (négatifs) de $\boldsymbol{b}$ à l'aide de la seconde égalité (11): $b_{ii} = -\Sigma_k b'_{ik}$; $b'_{ik} = b_{ik}(1-\delta_{ik})$. On obtient:

$$\beta_{lm} = \sum_{i\geqslant l}\sum_{k\geqslant m} b'_{ik} - \sum_{i\geqslant l}\sum_{k} b'_{ik} = -\sum_{i\geqslant l}\sum_{k\leqslant m-1} b_{ik} \leqslant 0 \tag{14}$$

car, dans la dernière somme, $i\neq k$, et $b_{ik} = B_{ik}\geqslant 0$. Si $l\leqslant m$, on utilise $b_{kk} = -\Sigma_i b'_{ik}$:

$$\beta_{lm} = -\sum_{i\leqslant l-1}\sum_{k\geqslant m} b_{ik} \leqslant 0\,. \tag{14'}$$

On ne rencontre aucune difficulté lorsque le nombre des états devient infiniment grand ($n\to\infty$)*).

Genève, Institut de Physique de l'Université.

---

*) Si $S = -\Sigma_i w_i \log w_i$, la démonstration signalée en I, due à M. Pauli, et valable pour des transitions infinitésimales, peut être étendue au cas des transitions finies envisagé ici. En effet:

$$w_i''\int_1^{w_k'/w_i''} dt\log t = w_k'(\log w_k' - \log w_i'') + w_i'' - w_k' \geqslant 0\,.$$

C'est-à-dire:

$$-w_k'\log w_i'' \geqslant -w_k'\log w_k' - w_k' + w_i''.$$

Donc:

$$\Delta S = \Sigma_k w_k'\log w_k' - \Sigma_i w_i''\log w_i''$$
$$= \Sigma_k w_k'\log w_k' - \Sigma_i\Sigma_k A_{ik} w_k'\log w_i''$$
$$\geqslant \Sigma_k w_k'\log w_k' - \Sigma_i\Sigma_k A_{ik} w_k'\log w_k' - \Sigma_i\Sigma_k A_{ik}(w_k'-w_i'') = 0\,.$$

Le deuxième membre s'annulle en vertu de la double normalisation de $A$ et de la relation (1) entre $w_i''$ et $w_k'$.