Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 29 (1956)
Heft: IV

Artikel: Eine Bemerkung über den Zusammenhang von Streuphase und Potential
Autor: Jost, Res
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112710

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine Bemerkung über den Zusammenhang von Streuphase und Potential

von **Res Jost**, ETH., Zürich.

(28. V. 1956.)

Zusammenfassung: Es wird ein Verfahren angegeben, das es gestattet unter gewissen Bedingungen die Gel'fand-Levitansche Integralgleichung (2.3) für grosse r zu lösen. Dieses Verfahren wird in § 4 zum Beweise eines Satzes über das Verhalten von $\int_0^r V(r')\,dr'$ angewendet.

Einleitung.

Der Zusammenhang zwischen Streuphase und Potential ist seit den Arbeiten von GEL'FAND und LEVITAN[1]) im wesentlichen abgeklärt. Insbesondere erlaubt die Methode dieser Autoren die Konstruktion aller Potentiale, die zu einer gegebenen Streuphase gehören. Unabgeklärt scheint bis jetzt die Frage, welche Bedingungen man der Streuphase (wir werden uns im folgenden auf die S-Phase beschränken und die Diskussion auf höhere Bahnmomente auf später verschieben) auferlegen muss, damit ein bestimmtes asymptotisches Verhalten des Potentials garantiert ist. Die vorliegende Arbeit will ein Beitrag in dieser Richtung sein. Wir beziehen uns ausdrücklich auf den Fall, wo keine gebundenen Zustände vorhanden sind. Die Verallgemeinerung auf den Fall mit gebundenen Zuständen ist dann einfach und wir werden uns nicht damit beschäftigen. Weiter schliessen wir den Fall der Resonanz bei der Energie Null aus. Auch werden wir unsere Bedingungen als Bedingungen für die Funktion $f(k)$ aussprechen. Diese Funktion ist in einfacher Weise bezogen auf die Phase $\eta(k)$. Von einem praktischen Standpunkte aus ist unsere Untersuchung mehr akademischer Natur, da man nach BARGMANN[2]) für eine allen praktischen Bedürfnissen genügende Klasse von Phasen $\eta(k)$ das Potential und die zugehörigen Lösungen der Schrödingergleichung sogar explizit als elementare Funktionen angeben kann.

§ 1. Die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$.

$\eta(k)$ sei die S-Phase, zu der keine gebundenen Zustände gehören. Falls $\eta(k)$ zu einem exponentiell abfallenden Potential gehört, dann ist $\eta(0) - \eta(\infty)$ entweder Null oder $\pi/2$ [3]). Den letzten Fall wollen wir als Sonderfall von unseren Betrachtungen ausschliessen. Ausserdem ist $\eta(k)$ stetig (sogar analytisch) für $0 < k < \infty$. Definiert man $\eta(-k) = -\eta(k)$, dann ist also $\eta(k)$ stetig für $-\infty < k < \infty$. Die Funktion $f(k)$ ist definiert durch die Bedingungen[4])

1. $f(k)$ regulär analytisch für $Im[k] < 0$.
2. $f(k) \neq 0$ in $Im[k] \leqq 0$.
3. $f(k) = |f(k)| e^{i\eta(k)}$ für reelles k.
4. $\lim_{k\to\infty} f(k) = 1$ für $Im[k] \leqq 0$.

Weiter ist dann automatisch

5. $f(-k^*) = f^*(k)$ so dass $f(k)$ für negativ rein imaginäres k reell ist.

Formeln, die $f(k)$ durch $\eta(k)$ ausdrücken, sind bekannt[5]). Die nun folgende Voraussetzung für $f(k)$ soll eben ein exponentielles Abfallen des zu $\eta(k)$ gehörigen Potentials zur Folge haben. Zu ihrer Formulierung ist es vielleicht bequemer (um in der gewohnten Sprache der Laplacetransformationen zu bleiben), die Variable $z = ik$ einzuführen. Wir schreiben dann

$$f(k) = 1 + \varphi(z) \tag{1.1}$$

und verlangen[6])

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \Phi(x) dx \tag{1.2}$$

wobei ausserdem

$$|\Phi(x) e^x| < A \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x < \infty . \tag{1.3}$$

(1.3) ist unsere wesentliche Voraussetzung[7]). Sie hat zur Folge, dass (1.2) absolut konvergiert für $Re[z] > -1$. $\varphi(z)$ ist in mindestens dieser Halbebene regulär analytisch. Nach Bedingung 2 und (1.1) ist ausserdem

$$\varphi(z) \neq -1 \quad \text{in} \quad Re[z] \geqq 0 . \tag{1.4}$$

(1.4) erlaubt eine Verschärfung. Nach (1.3) konvergiert nämlich (1.2) gleichmässig in $Re[z] \leqslant -1 + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Daher gilt[8])

$$\lim_{\eta\to\infty} \varphi(\xi + i\eta) = 0 \tag{1.5}$$

und dies gleichmässig in $\xi \geqq -1 + \varepsilon$. Dann können aber die Wurzeln von $\varphi(z) + 1 = 0$ nicht beliebig nahe an die reelle Axe heran-

kommen, es gibt also ein $0 < \alpha < 1$ derart, dass

$$\varphi(z) \neq -1 \quad \text{in} \quad Re[z] \geqq -\alpha . \tag{1.4'}$$

Für das Weitere werden wir die Funktion

$$\psi(z) = -\frac{\varphi(z)}{1+\varphi(z)} \tag{1.6}$$

zu diskutieren haben. $\psi(z)$ ist regulär in $Re[z] \geqq -\alpha$. Nach einem Satz von PALEY und WIENER[9]) ist also

$$\psi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \Psi(x)\, dx \tag{1.7}$$

wobei

$$\int_0^\infty e^{\alpha x} |\Psi(x)|\, dx < \infty . \tag{1.8}$$

Weiter folgt aus der Definition (1.6) unmittelbar, dass

$$\Psi(x) + \Phi(x) + \int_0^x \Phi(x-\xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi = 0 . \tag{1.9}$$

Aus dieser Gleichung schliesst man auf die Beschränktheit von $e^{\alpha x}\Psi(x)$ in jedem endlichen Intervall $0 \leqslant x \leqslant c$. Wegen der Beschränktheit von $e^x \Phi(x)$ und wegen (1.8) folgt aber weiter, dass man in (1.9) nach Multiplikation mit $e^{\alpha x}$ unter dem Integral mit $x \to \infty$ gehen kann, derart, dass sogar

$$\Psi(x) e^{\alpha x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty . \tag{1.10}$$

Es ist also sicher $\Psi(x)\, e^{\alpha x}$ beschränkt und, bei passender Wahl von A gilt mit (1.3) auch

$$|\Psi(x) e^{\alpha x}| < A \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x < \infty . \tag{1.11}$$

§ 2. Die Levitan-Gel'fandsche Integralgleichung. Eigenschaften des Kerns.

Die Funktion $f(k)$ steht mit dem Kern der erwähnten Integralgleichung im folgenden Zusammenhang[10])

$$G(r,s) = G(r-s) - G(r+s) \tag{2.1}$$

$$G(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|f(k)|^2} - 1 \right\} e^{-ikr}\, dk . \tag{2.2}$$

Wegen Bedingung 5 ist $|f(k)|^2 = f(k)f(-k)$ und daher ist $G(r)$ eine gerade Funktion von r. Besagte Integralgleichung lautet nun

$$G(r,s) + K(r,s) + \int_0^r K(r,t)G(t,s)\,dt = 0 \tag{2.3}$$

wobei $K(r,s)$ nur für $0 \leqslant s \leqslant r$ definiert ist. Falls (2.3) gelöst ist, findet man für das Potential, das zur Phase $\eta(k)$ gehört

$$V(r) = 2 \cdot \frac{dK(r,r)}{dr} \tag{2.4}$$

so dass Abschätzungen von $K(r,r)$ zwar nicht über $V(r)$ direkt, wohl aber über ${}_0\int^r V(r')\,dr'$ Auskunft geben. Mit solcher Auskunft wollen wir uns zufriedengeben und allenfalls lieber Verallgemeinerungen der Schrödingergleichung ins Auge fassen als Bedingungen, die $K(r,r)$ etwa totalstetig machen[11]). Weiter ist (2.3) offenbar äquivalent zu

$$G(r,s) + K(r,s) + \int_{-r}^r K(r,t)\,G(t-s)\,dt = 0 \tag{2.5}$$

und

$$K(r,s) + K(r,-s) = 0\,. \tag{2.5'}$$

Setzt man weiter

$$K(r,s) = L(r,s) - L(r,-s) \tag{2.6}$$

dann erhält man eine Lösung von (2.5), falls

$$L(r,s) + G(r-s) + \int_{-r}^r L(r,t)\,G(t-s)\,dt = 0 \tag{2.7}$$

erfüllt ist. So kommen wir schliesslich zur passenden Form der Integralgleichung, wenn wir setzen

$$\chi(y,x) + G(x) + \int_0^y G(x-\xi)\chi(y,\xi)\,d\xi = 0 \qquad \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant y \tag{2.8}$$

indem sich dann für die früheren Grössen ergibt

$$\begin{aligned} L(r,s) &= \chi(2r, r-s) \\ K(r,s) &= \chi(2r, r-s) - \chi(2r, r+s) \\ K(r,r) &= \chi(2r, 0) - \chi(2r, 2r). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Es ist etwas bequemer (2.8) in der Form

$$G(x) + \int_0^y \Gamma(x-\xi)\,\chi(y,\xi)d\xi = 0 \tag{2.8'}$$

zu schreiben, wobei natürlich $\Gamma(x) = G(x) + \delta(x)$ gesetzt ist. Es folgt unmittelbar aus (2.2), dass die homogene Gleichung

$$\int_0^y \Gamma(x-\xi)\,\chi_0(\xi)\,d\xi = 0$$

für $y=\infty$ und daher für kein $y>0$ eine nicht triviale quadratintegrierbare Lösung besitzt. Denn setzt man $\chi_0(x)=0$ für $x<0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih\xi}\,\chi_0(\xi)\,d\xi = A(k)$$

dann wäre

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\chi_0^*(x)\,\Gamma(x-\xi)\,\chi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{|A(k)|^2}{|f(k)|^2} = 0$$

also $A(k)=0$. (2.8') hat also genau eine Lösung.

Für (2.8) werden wir ein Approximationsverfahren angeben, das uns die Lösung für grosse y zu diskutieren gestattet. Um die Eigenschaften von $G(x)$ zu finden, erinnern wir uns an die Definition von $\Psi(x)$ (1.6) und (1.7), aus der sich ergibt

$$\frac{1}{|f(k)|^2} - 1 = \psi(z)\,\psi(-z) + \psi(z) + \psi(-z) \tag{2.10}$$

oder

$$G(x) = \int_0^{\infty} \Psi(x+\xi)\,\Psi(\xi)\,d\xi + \Psi(x) + \Psi(-x) \tag{2.11}$$

wobei $\Psi(x)=0$ zu setzen ist, falls $x<0$ ist. Aus (2.11) folgt aber die Beschränktheit von $e^{\alpha|x|}\,G(x)$, und wieder können wir durch passende Wahl von A erreichen, dass mit (1.3) und (1.11) auch

$$|\,G(x)e^{\alpha|x|}\,| < A \qquad \text{für} \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.12}$$

gilt. Schreiben wir zum Schluss noch

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx}\,G(x)\,dx \tag{2.13}$$

dann lautet (2.10)

$$g(z) = \psi(z)\,\psi(-z) + \psi(z) + \psi(-z)\,. \tag{2.14}$$

Setzt man

$$\gamma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx}\, \Gamma(x)\, dx \tag{2.13'}$$

so findet man

$$\gamma(z) = [1 + \psi(z)]\,[1 + \psi(-z)]\,. \tag{2.14'}$$

§ 3. Das Näherungsverfahren.

Zur Lösung von (2.8) setzen wir für $\chi(y, x)$ eine Reihe an:

$$\chi(y, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(y, x), \quad \chi_0(y, x) \equiv \chi_0(x) \tag{3.1}$$

wobei die einzelnen Terme durch folgende Gleichungen bestimmt sind

$$G(x) + \int_0^{\infty} \Gamma(x-\xi)\, \chi_0(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{3.2}$$

$$\int_{-\infty}^{y} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n+1}(y, \xi)\, d\xi = \int_{y}^{\infty} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n}(y, \xi)\, d\xi \tag{3.3}$$

$$\text{für} \quad -\infty < x \leqslant y$$

$$\int_0^{\infty} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n+2}(y, \xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{0} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n+1}(y, \xi)\, d\xi \tag{3.4}$$

$$\text{für} \quad 0 \leqslant x < \infty\,.$$

Wir behaupten nun, dass die Reihe (3.1) zu einer Lösung von (2.8) konvergiert, falls für $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{0} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n+1}(y, \xi)\, d\xi \to 0 \tag{3.5}$$

z. B. gleichmässig für $0 \leqslant x \leqslant y$. Um das einzusehen, betrachte man die Differenz

$$\Delta_n(x) = \chi(y, x) - \sum_{k=0}^{2n} \chi_k(y, x). \tag{3.6}$$

Dabei ist $\chi(y, x)$ die Lösung von (2.8), die ja existiert. Nun folgt leicht

$$\int_0^{y} \Gamma(x-\xi)\, \Delta_n(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{0} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n+1}(y, \xi)\, d\xi \tag{3.7}$$

woraus für $n \to \infty$ folgt, dass $\Delta_n \to 0$. Die Gleichungen (3.2), (3.3) und (3.4) lassen sich aber nach dem Verfahren von N. WIENER und E. HOPF[12]) lösen, und wir brauchen nur das Resultat anzugeben. Es ergibt sich:

$$\chi_0(x) = \Phi(x) \tag{3.8}$$

$$\chi_{2n+1}(y, x) = \int_y^\infty K_1(y; x, \xi)\, \chi_{2n}(y, \xi)\, d\xi \tag{3.9}$$

$$\chi_{2n+2}(y, x) = \int_{-\infty}^0 K_2(x, \xi)\, \chi_{2n+1}(y, \xi)\, d\xi \tag{3.10}$$

wobei

$$K_1(y; x, \xi) = \Psi(\xi - x) + \int_0^{y-x} \Psi(\xi - x - \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta \tag{3.11}$$

$$K_2(x, \xi) = \Psi(x - \xi) + \int_0^x \Psi(x - \xi - \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta\,. \tag{3.12}$$

Es bleibt uns also nur noch zu zeigen, dass (3.5) für genügend grosse y gilt.

Dazu ist es bequemer unter Verwendung der Gleichung (1.9) die Kerne K_1 und K_2 in der folgenden Weise zu schreiben

$$K_1(y; x, \xi) = -\Phi(\xi - x) - \int_{y-x}^{\xi-x} \Psi(\xi - x - \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta \tag{3.11'}$$

$$K_2(x, \xi) = -\Phi(x - \xi) - \int_x^{x-\xi} \Psi(x - \xi - \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta\,. \tag{3.12'}$$

Verwendet man jetzt (1.3) und (1.11), dann gilt offenbar

$$|K_1(y; x, \xi)| < A(1 + A)\, e^{-(y-x)} = B\, e^{-(y-x)} \tag{3.13}$$

für $\xi \geqq y$

$$|K_2(x, \xi)| < A(1 + A) e^{-x} = B e^{-x} \tag{3.14}$$

für $\xi \leqq 0$.

Woraus man leicht mit (1.3) die Abschätzung gewinnt

$$|\chi_{2n}(y, x)| < A\, B^{2n}\, e^{-2ny}\, e^{-x} \tag{3.15}$$

$$|\chi_{2n+1}(y, x)| < A\, B^{2n+1}\, e^{-(2n+2)y}\, e^{x} \tag{3.16}$$

und mit (2.12)

$$\left| \int_{-\infty}^{0} \Gamma(x-\xi)\, \chi_{2n+1}(y,\xi)\, d\xi \right| < B^{2(n+1)}\, e^{-(2n+1)y}. \tag{3.17}$$

Hinreichend für (3.5) ist also

$$B\, e^{-y} < 1 \tag{3.18}$$

was für genügend grosse y immer der Fall ist.

§ 4. Eine Anwendung.

Es sei $e^{\beta x}\, \Phi(x)$ beschränkt und

$$e^{\beta x}\, \Phi(x) \to C \quad \text{für} \quad x \to \infty \tag{4.1}$$

dann gilt

$$e^{2\beta r}[K(r,r) - \Phi(0)] \to -\frac{C}{f(-i\beta)} \quad \text{für} \quad r \to \infty. \tag{4.2}$$

Beweis: Es ist offenbar keine Einschränkung $\beta = 1$ zu setzen. Nach (2.9) bedeutet (4.2)

$$e^{y}[\chi(y,0) - \chi(y,y) - \Phi(0)] \to -\frac{C}{f(-i)} \quad \text{für} \quad y \to \infty. \tag{4.2'}$$

Mit den Abschätzungen (3.15), (3.16) und mit (3.8) findet man (4.2') äquivalent zu

$$e^{y}[\Phi(y) + \chi_1(y,y)] \to \frac{C}{f(-i)}. \tag{4.2''}$$

Aber nach (3.9) und (3.11)

$$\chi_1(y,y) = \int_{y}^{\infty} d\xi\, \Psi(\xi - y)\, \Phi(y) = \int_{0}^{\infty} d\eta\, \Psi(\eta)\, \Phi(y+\eta) \tag{4.3}$$

daher

$$e^{y}\, \chi_1(y,y) = \int_{0}^{\infty} d\eta\, \Psi(\eta)\eta\, e^{-\eta}\, [e^{(y+\eta)}\, \Phi(y+\eta)] \tag{4.4}$$

In (4.4) kann man unter dem Integral mit $y \to \infty$ also nach (4.1)

$$e^{y}\, \chi_1(y,y) \to C \int_{0}^{\infty} d\eta\, e^{-\eta}\, \Psi(\eta) = C\, \Psi(1). \tag{4.5}$$

Nach (1.6) und (1.1)

$$e^{y}\, \chi_1(y,y) \to C\left(\frac{1}{f(-i)} - 1\right). \tag{4.6}$$

(4.2'') folgt aus (4.6) und (4.1).

Literatur.

[1]) I. M. GEL'FAND und B. M. LEVITAN, Doklady Akad. Nank. S.S.S.R. **77,** 557 (1951); Isvestiia Akad. Nank. S. S. S. R. **15,** 309 (1951). – R. JOST und W. KOHN, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd. **27,** Nr. 9 (1953). – N. LEVINSON, Phys. Rev. **89,** 755 (1953); Verallgemeinerungen. – R. G. NEWTON und R. JOST, Nuovo Cimento **1,** 590 (1955). – R. G. NEWTON, Phys. Rev. **100,** 412 (1955).

[2]) V. BARGMANN (unpubliziert). Es handelt sich um die Potentiale, die zu rationalem $f(k)$ gehören (für beliebiges Bahnmoment).

[3]) N. LEVINSON, Kgl. Danske Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd. **25,** Nr. 9 (1949).

[4]) Etwa R. JOST und W. KOHN, Phys. Rev. **87,** 977 (1952).

[5]) R. JOST und W. KOHN, l. c. [4]).

[6]) Dass eine solche Darstellbarkeit von $\varphi(z)$ natürlich ist, folgt aus der unter [4]) zitierten Arbeit.

[7]) Wir verzichten darauf (1.3) durch Bedingungen für $\varphi(z)$ zu ersetzen. Dies ist insbesondere für die spätere Bedingung $e^{x}\,\Phi(x) \to C$ (für $x \to \infty$) auch nicht möglich ohne einschränkende Bedingung für $\Phi(x)$ selbst.

[8]) G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, p. 51, Satz 4.

[9]) R. E. A. C. PALEY und N. WIENER, Trans. Amer. Math. Soc. **35,** 785 (1933).

[10]) R. JOST und W. KOHN, l. c. [1]).

[11]) Die Existenz eines Potentials folgt, falls $G(x)$ viermal stetig differenzierbar ist, eine Bedingung, die man natürlich mit (2.11) und (1.9) in Bedingungen für $\Phi(x)$ übersetzen kann. (GEL'FAND und LEVITAN, l. c.)

[12]) Etwa E. C. TITCHMARSH, Fourier Integrals (Oxford University Press, London, 1937), p. 339. Man beachte dabei (2.12) und (2.14).