Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 36 (1963)
Heft: VII

Artikel: Zur Quantentheorie der Wellenfelder
Autor: Waerden, B.L. van der
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113410

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Quantentheorie der Wellenfelder

von **B. L. van der Waerden**
Mathematisches Institut der Universität Zürich

W. HEITLER zum 60. Geburtstag gewidmet

(15. VIII. 63)

Summary. Along the lines indicated by V. FOCK and K. FRIEDRICHS, a rigorous foundation of Field Quantum Theory is presented. In § 2 a scalar boson field is considered, in § 3 the electron-positron field, in § 4 the neutrino field, and in § 5 the electro-magnetic field.

§ 1. Einleitung

Wenn ein Physiker versucht, einen Mathematiker für die Probleme der Quantentheorie der Wellenfelder zu interessieren, so ist die Schwierigkeit meistens, dass der Mathematiker die Probleme nicht versteht, weil die Formulierung ihm nicht präzis genug ist. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, die Grundbegriffe und Grundgleichungen der Quantentheorie der Wellenfelder so zu formulieren, dass jeder Mathematiker sie verstehen kann. Inhaltlich enthält die Arbeit nichts Neues.

Die alte Quantenmechanik von BORN, HEISENBERG und JORDAN ging von der Vertauschungsrelation

$$p\,q - q\,p = -\frac{i\,h}{2\,\pi} \tag{1}$$

aus. Wie die Operatoren p und q definiert waren, wurde nicht gesagt. Im Fall des Wasserstoffatoms gelang es PAULI[1]), die Energiewerte durch algebraische Überlegungen auf Grund der Relation (1) zu bestimmen, aber diese Methode war nicht leicht zu verallgemeinern. Erst als SCHRÖDINGER[2]) die Operatoren p und q durch ihre Wirkung auf die Wellenfunktion explizit definierte, war der Weg zur Quantenmechanik beliebiger Systeme von endlich vielen Teilchen frei.

Analog ist die Situation in der Quantentheorie der Wellenfelder. Häufig postuliert man Vertauschungsrelationen für die fundamentalen Operatoren der Theorie und versucht, daraus alles herzuleiten. Man kann aber auch die fundamentalen Operatoren durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren explizit ausdrücken. Alle Probleme werden dann viel bestimmter und vielleicht auch leichter zu lösen.

Häufig denkt man sich das Feld durch ebene Wände begrenzt und verlangt eine Periodizitätsbedingung. Das ist aber nicht nötig. V. FOCK[3]) hat einen Weg angegeben, auf dem man die Quantentheorie der Wellenfelder im unendlichen Raum exakt begründen kann. K. FRIEDRICHS[4]) hat mit Hilfe der Theorie der Distributionen von L. SCHWARZ[5]) diese Begründung mathematisch einwandfrei durchgeführt.

FRIEDRICHS hat den Fall des skalaren Bosonfeldes und den des Elektron-Positron-Feldes behandelt, nicht aber den wichtigen Fall des elektromagnetischen Feldes. In der vorliegenden Arbeit soll auch dieser Fall durchgerechnet werden.

Zur Bequemlichkeit des Lesers wird die Theorie von FRIEDRICHS nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern in ihren Grundzügen neu entwickelt. In § 2 wird das skalare Bosonfeld im wesentlichen nach FRIEDRICHS behandelt, in § 3 das Elektronpositron-Feld mit leicht abgeänderten Bezeichnungen, die die relativistische Invarianz besser hervortreten lassen. Wie man das Neutrino-Antineutrino-Feld nach der zweikomponentigen Spintheorie zu behandeln hat, ist dann klar; in § 4 wird es ausgeführt.

Bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes geht man zweckmässig nicht von den Feldstärken, sondern von den Potentialen aus. Normiert man diese durch die «Coulomb-Normierung», so tritt die relativistische Invarianz der Theorie nicht deutlich hervor. Die Lorentznormierung dagegen ist relativistisch invariant, aber nicht eindeutig. Um die dadurch entstehenden Schwierigkeiten zu lösen, hat K. BLEULER[6]) eine indefinite Metrik eingeführt. In § 5 soll gezeigt werden, dass das unnötig ist. Man kann einen Hilbertraum mit halbdefiniter Metrik einführen, der durch eine «Projektion» in einen Hilbertraum mit definiter Metrik übergeführt wird. Ist Φ' die Projektion eines Vektors Φ des ursprünglichen Hilbertraumes, so hängt der Zustand des Feldes nur von Φ' ab und alle messbaren Grössen (zum Beispiel die Feldstärken) werden durch Operatoren im Raum der Projektionen Φ' dargestellt.

Die Einheiten sollen immer so gewählt werden, dass $c = 1$ und $h = 2\pi$ wird.

§ 2. Skalares Bosonfeld

A. *Wellenpakete*

Die relativistische Wellengleichung eines skalaren Teilchens mit der Masse μ lautet

$$\Delta u - u_{tt} = \mu^2 u\,. \tag{1}$$

Als Lösungen haben wir ebene Wellen

$$u = e^{ikx - i\omega t} \tag{2}$$

mit

$$\omega^2 = \mu^2 + k^2\,. \tag{3}$$

Dabei bedeutet $k\,x$ das skalare Produkt der Vektoren k und x, ebenso k^2 das skalare Quadrat des Vektors k. Wir beschränken uns auf Lösungen mit $\omega \geqq 0$:

$$\omega = \omega(k) = (\mu^2 + k^2)^{1/2}. \tag{4}$$

Aus den ebenen Wellen kann man Wellenpakete bilden, indem man (2) mit einer komplexen Amplitude $\varphi_1(k)$ multipliziert und über den ganzen k-Raum integriert:

$$\varphi_1(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi_1(k)\, e^{ikx - i\omega t}\, dk^3. \tag{5}$$

Hat man n Teilchen, so setzt man ganz analog

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, t) = (2\pi)^{-3n/2} \int \varphi_n(k_1, \ldots, k_n)\, e^{i\Sigma(kx - \omega t)}\, dk^{3n}. \tag{6}$$

Für freie Teilchen (ohne Wechselwirkung und ohne äusseres Feld) ist $\varphi_n(k_1, \ldots, k_n)$ von t unabhängig, aber im allgemeinen Fall kann $\varphi_n(k_1, \ldots)$ von t abhängen.

Statt $\varphi_n(k_1, \ldots, k_n)$ schreiben wir im folgenden kurz $\varphi_n(k)_n$. Das Symbol $(k)_n$ steht also für die Reihe der n Vektoren $k_1, \ldots, k_n$. Das Quadratintegral oder die «Norm»

$$\mathcal{N}\varphi_n^{(k)} = \int \varphi_n^*(k)_n \, \varphi_n(k)_n \, dk^{3n} \tag{7}$$

(das Sternchen * bedeutet konjugiert komplex)

soll endlich sein. Dann ist auch die Norm der Funktion $\varphi_n^{(x)}$ links in (6) endlich, und zwar gilt für jedes t

$$\mathcal{N}\varphi_n^{(x)} = \mathcal{N}\varphi_n^{(k)} \,. \tag{8}$$

Wir können also einfach $\mathcal{N}\varphi_n$ schreiben.

Für Bosonen verlangt man, dass $\varphi_n(k)_n$ symmetrisch in $k_1, \ldots, k_n$ ist. Dann ist auch $\varphi_n(x)_n$ symmetrisch.

B. *Zustände des Feldes*

Wir setzen zunächst $t = 0$. Dann wird (6)

$$\varphi_n(x)_n = (2\pi)^{-3n/2} \int \varphi_n(k)_n \, e^{i \Sigma k x} \, dk^{3n}. \tag{9}$$

Jeder Zustand mit fester Teilchenzahl n wird für $t = 0$ durch eine Formel (9) gegeben. Für jede Teilchenzahl n haben wir also einen Hilbertraum $\mathcal{H}_n$. Jetzt soll ein einziger Hilbertraum gebildet werden, der alle diese Räume $\mathcal{H}_n$ umfasst. Er besteht aus allen Folgen

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1(x)_1, \varphi_2(x)_2, \ldots\} \,. \tag{10}$$

Dabei ist φ_0 eine komplexe Zahl, φ_1 eine Funktion von x_1, φ_2 eine Funktion von x_1 und x_2, etc. Jede einzelne Funktion φ_n soll symmetrisch in den Argumenten $x_1, \ldots, x_n$ sein und eine endliche Norm haben. Jedes φ_n lässt sich also nach (9) entwickeln. Die Summe der Normen

$$\mathcal{N}\Phi = \sum_0^\infty \mathcal{N}\varphi_n \tag{11}$$

soll endlich sein. Die einzelnen Φ heissen *Zustandsvektoren*; sie bilden einen Hilbertraum.

Wir nehmen an, dass jeder von Null verschiedene Zustandsvektor Φ einen Zustand des Feldes definiert und dass Φ und $\alpha\Phi$ für $\alpha \neq 0$ denselben Zustand definieren. Ist nur eine einzelne Funktion φ_n von Null verschieden, so schreiben wir $\Phi = \varphi_n$. Wir haben dann einen Zustand, in dem zur Zeit $t = 0$ genau n Teilchen vorhanden sind.

Ist $\mathcal{N}\Phi = 1$, was man durch Multiplikation von Φ mit einem passenden Faktor α immer erreichen kann, und ist G ein Gebiet im $3n$-dimensionalen Raum der $(x)_n$ oder $(k)_n$, das bei allen Permutationen der x oder k in sich übergeht, so ist das Integral über G

$$\int_G \varphi_n^*(x)_n \, \varphi_n(x)_n \, dx^{3n} \quad \text{oder} \quad \int_G \varphi_n^*(k)_n \, \varphi_n(k)_n \, dk^{3n} \tag{12}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau n Teilchen vorhanden sind, deren Orts- oder Impulsvektoren dem Gebiet G angehören. Insbesondere ist $\varphi_0^* \varphi_0$ die Wahrscheinlichkeit, dass kein Teilchen vorhanden ist.

C. *Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren*

Wir definieren nun den Vernichtungsoperator $b^-(k')$, der ein Teilchen mit Impuls k' vernichtet. Der Operator soll φ_0 in 0 überführen und φ_n in φ_{n-1}^-:

$$\varphi_{n-1}^- (k_1, \ldots, k_{n-1}) = n^{1/2} \varphi_n (k_1, \ldots, k_{n-1}, k') . \tag{13}$$

Das heisst: ein Zustand $\Phi = \varphi_n$, in dem genau n Teilchen vorhanden sind, wird durch den Operator $b^-(k')$ übergeführt in einen Zustand, in dem nur $n-1$ Teilchen vorhanden sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Teilchen Impulse in der Nähe von $k_1, \ldots, k_{n-1}$ haben, ist proportional der Wahrscheinlichkeit, dass die ursprünglichen n Teilchen Impulse in der Nähe von $k_1, \ldots, k_{n-1}$ und k' haben.

Analog wird der Erzeugungsoperator $b^+(k')$ definiert, der ein Teilchen mit Impuls k' erzeugt. Er führt φ_{n-1} in φ_n^+ über:

$$\varphi_n^+ (k)_n = n^{1/2} \, Sy \, \{\varphi_{n-1} (k_1, \ldots, k_{n-1}) \, \delta (k' - k_n)\} . \tag{14}$$

Dabei ist $Sy\{f\}$ für jede Funktion f von $k_1, \ldots, k_n$ das arithmetische Mittel der $n!$ Funktionen, die aus f durch Permutation der Argumente entstehen.

Beide Operatoren b^- und b^+ sind als uneigentliche Operatoren, d.h. als Distributionen zu verstehen. Das heisst: $b^+(k') \, \Phi$ ist kein Zustandsvektor, wohl aber

$$b^+ \{g\} \, \Phi = \int g(k') \, b^+(k') \, \Phi \, dk'^3 \tag{15}$$

mit einer stetigen Testfunktion g, die ausserhalb eines beschränkten Gebietes im k'-Raum Null ist. Der Operator $b^+\{g\}$ führt φ_{n-1} in

$$\varphi_n^+ \{g\} = n^{1/2} \, Sy \, \{\varphi_{n-1} (k_1, \ldots, k_{n-1}) \, g(k_n)\} \tag{16}$$

über. Auch b^- ist als uneigentlicher Operator aufzufassen; denn $\varphi_n(k_1, \ldots, k_{n-1}, k')$ braucht für gegebene k' als Funktion von $k_1, \ldots, k_{n-1}$ kein endliches Quadratintegral zu haben, wohl aber

$$\varphi_n^- \{g\} = n^{1/2} \int g(k') \, \varphi_n (k_1, \ldots, k_{n-1}, k') \, d^3 k'. \tag{17}$$

Damit der Operator $b^-\{g\}$ auf Φ anwendbar ist, muss man nur verlangen, dass die Summe dieser Quadratintegrale, also die Norm von $b^-\{g\} \, \Phi$ endlich bleibt. Analog für $b^+\{g\} \, \Phi$.

Die Vertauschungsregel

$$b^-(k') \, b^+(k'') - b^+(k'') \, b^-(k') = \delta(k' - k'') \tag{18}$$

bedeutet

$$b^-\{f\} \, b^+\{g\} - b^+\{g\} \, b^-\{f\} = \int f(k') \, g(k') \, dk' \tag{19}$$

für je zwei Testfunktionen f und g. Sie folgt direkt aus den Definitionen von $b^-\{f\}$ und $b^+\{g\}$. Analog leitet man die bekannten Vertauschungsregeln für $b^-(k') \, b^-(k'')$ und für

$b^+(k')\, b^+(k'')$ her. Die Vertauschungsrelationen sind also in dieser Theorie keine Hypothesen, sondern beweisbare Sätze.

Die Operatoren b^- und b^+ sind zueinander adjungiert, das heisst die Skalarprodukte $(\Psi, b^- \Phi)$ und $(b^+ \Psi, \Phi)$ sind einander gleich. Daher schreibt man statt b^- und b^+ manchmal b und $b^\dagger$.

Ähnlich wie $b^-(k')$ und $b^+(k')$ werden $b^-(x')$ und $b^+(x')$ definiert. Der Operator $b^-(x')$ vernichtet ein Teilchen an der Stelle x', das heisst er führt $\varphi_n(x)_n$ über in

$$\varphi_{n=1}^{-}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = n^{1/2}\, \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x') \,. \tag{20}$$

Ebenso erzeugt $b^+(x')$ ein Teilchen im Punkte x'.

Die Beziehungen zwischen $b^\pm(k')$ und $b^\pm(x')$ lauten

$$b^-(x') = (2\pi)^{-3/2} \int b^-(k')\, e^{ik'x'}\, dk'^3 \,, \tag{21}$$

$$b^+(x') = (2\pi)^{-3/2} \int b^+(k')\, e^{-ik'x'}\, dk'^3 \,. \tag{22}$$

D. *Die Operatoren P und Q*

Die ebene Welle (2) erfüllt für jedes feste k die Differentialgleichung des klassischen Oszillators

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \,. \tag{23}$$

Man kann das Feld also als ein System von unendlich vielen Oszillatoren auffassen. Definiert man nun für jedes feste k' die Operatoren Q und P durch

$$Q = (2\omega)^{-1/2} (b^+ + b^-) \,, \tag{24}$$

$$P = 2^{-1/2}\, \omega^{1/2}\, i\, (b^+ - b^-) \,, \tag{25}$$

so sind P und Q selbstadjungierte Operatoren, die die gewöhnliche Vertauschungsrelation

$$P(k')\, Q(k'') - Q(k'')\, P(k') = -i\, \delta\, (k'' - k') \tag{26}$$

erfüllen.

E. *Der Energie-Operator*

In der Quantentheorie des Oscillators kann man den Energieoperator als

$$\frac{1}{2}\, (P^2 + \omega^2 Q^2)$$

ansetzen; die Nullpunktsenergie wird dann $^1/_2\, \omega$. Für die Feldtheorie ist es aber zweckmässiger, die Nullpunktsenergie Null zu setzen. Das erreicht man, indem man den Energieoperator als

$$\frac{1}{2}\, (P + \omega\, i\, Q)\, (P - \omega\, i\, Q) = \omega\, b^+(k')\, b^-(k') \tag{27}$$

ansetzt. Übt man diesen Operator auf eine Folge von Funktionen $\varphi_n(k)_n$ aus, so sieht man, dass jede einzelne dieser Funktionen mit

$$\omega(k')\, \{\delta\, (k_1 - k') + \cdots + \delta\, (k_n - k')\} \tag{28}$$

multipliziert wird. In diesem Fall hat also das Produkt der uneigentlichen Operatoren $b^+(k')$ und $b^-(k')$ als uneigentlicher Operator einen Sinn.

Die Gesamtenergie des Feldes ist die Summe der Energien der einzelnen Oscillatoren:

$$H_0 = \int \omega \, b^+(k') \, b^-(k') \, dk'^3 \,. \tag{29}$$

Der Index 0 bedeutet, dass nur die innere Energie des Feldes berücksichtigt ist. Übt man den Operator H_0 auf einen Zustand Φ aus, der durch eine Folge $\{\varphi_n(k)_n\}$ definiert ist, so sieht man, dass die einzelnen $\varphi_n(k)_n$ genau mit

$$\sum \omega = \omega(k_1) + \cdots + \omega(k_n) \tag{30}$$

multipliziert werden. Also kann der Operator H_0 in der Impulsdarstellung so definiert werden:

$$H_0 \, \{\varphi_n(k)_n\} = \{(\sum \omega) \, \varphi_n(k)_n\} \,. \tag{31}$$

Jetzt kann man auch $\exp(-i \, H_0 \, t)$ bilden, indem man die Funktionen $\varphi_n(k)_n$ mit $\exp(-i \, \Sigma \, \omega \, t)$ multipliziert

$$e^{-iH_0 t} \, \{\varphi_n(k)_n\} = \{e^{-i(\Sigma \omega) t} \, \varphi_n(k)_n\} \,. \tag{32}$$

Diese Formel bedeutet folgendes. Geht man von einem Zustand $\Phi(0)$ zur Zeit $t = 0$ aus, der durch das Fourier-Integral (9) gegeben ist, und will man wissen, wie dieser Zustand sich im Laufe der Zeit entwickelt, wenn alle Wechselwirkungen und äusseren Einwirkungen vernachlässigt werden, so muss man die einzelnen Amplituden $\varphi_n(k)_n$ rechts in (9) mit $\exp(-i \, \Sigma \, \omega \, t)$ multiplizieren. Das Ergebnis ist genau die frühere Formel (6), die damit theoretisch gerechtfertigt erscheint.

F. *Teilchenzahl*

Ein anderer selbstadjungierter Operator ist

$$N = \int b^+(k') \, b^-(k') \, dk'^3 \,. \tag{33}$$

Die einzelnen φ_n sind Eigenfunktionen dieses Operators; der Eigenwert ist n:

$$N \, \varphi_n = n \, \varphi_n \,. \tag{34}$$

Somit ist N der Operator der Teilchenzahl, und die Zustände φ_n sind die Eigenfunktionen dieses Operators. Der Wert der Teilchenzahl ist immer endlich, nämlich gleich n im Zustand $\Phi = \varphi_n$, aber der Erwartungswert der Teilchenzahl kann unendlich sein.

G. *Der Zustand als Funktion der Zeit*

Wir betrachten nun die Zeitabhängigkeit des Zustandes Φ etwas genauer. Der Energieoperator sei

$$H = H_0 + H_1 \,. \tag{35}$$

Zur Zeit $t = 0$ haben wir einen Zustand $\Phi(0)$, dargestellt durch eine Folge von Funktionen

$$\Phi(0) = \{\varphi_n((x)_n, 0)\} \,. \tag{36}$$

Zur Zeit t haben wir einen Zustand $\Phi(t)$. In der Heisenberg-Darstellung wird $\Phi(t)$ mit $\Phi(0)$ identifiziert, das heisst $\Phi(t)$ wird durch die gleiche Folge (36) dargestellt. In der Schrödinger-Darstellung wird $\Phi(t)$ durch die Folge

$$\Phi(t) = \{\varphi_n((x)_n, t)\} \tag{37}$$

dargestellt. In dieser Darstellung hat man dann

$$\Phi(t) = e^{-iHt}\Phi(0) . \tag{38}$$

Durch die Fourier-Transformation (9) kann man zum Impulsraum übergehen. Tut man das zur Zeit t, so erhält man

$$\varphi_n((x)_n, t) = (2\pi)^{-3n/2} \int \varphi_n'((k)_n, t)\, e^{i\Sigma kx}\, dk^{3n} . \tag{39}$$

Vergleicht man die Entwicklung (39) mit der früheren (6), so sieht man, dass die Funktionen φ_n' mit den früheren $\varphi_n(k)_n$ durch die Beziehung

$$\varphi_n'(k)_n = \varphi_n(k)_n\, e^{-i(\Sigma\omega)t} \tag{40}$$

verknüpft sind. Die $\varphi_n(k)_n$ haben gegenüber den φ_n' den Vorteil, dass sie im Fall freier Teilchen nicht von der Zeit abhängen. Ist H_1 eine kleine Störung, so ändern sich die $\varphi_n(k)_n$ nur langsam mit der Zeit.

Die Darstellung des Zustandes Φ durch die Folge der Funktionen $\varphi_n(k)_n$ nimmt eine Mittelstellung zwischen der Heisenberg- und der Schrödingerdarstellung ein. Man nennt diese intermediäre Darstellung die *Wechselwirkungsdarstellung*.

Ist $b^-(k')$ der Operator der Vernichtung eines Teilchens mit Impuls k' zur Zeit t in der Wechselwirkungsdarstellung, also der Operator, der $\varphi_n(k)_n$ zur Zeit t in

$$\varphi_{n-1}^-(k_1, \ldots, k_{n-1}) = n^{1/2}\, \varphi_n(k_1, \ldots, k_{n-1}, k') \tag{41}$$

überführt, und ist $b^-(x', t)$ der Operator der Vernichtung eines Teilchens im Punkte x' zur Zeit t, so hat man analog zu (21) die Beziehung

$$b^-(x', t) = (2\pi)^{-3/2} \int b^-(k')\, e^{i(k'x' - \omega' t)}\, dk'^3 . \tag{42}$$

Ebenso gilt für die Erzeugungsoperatoren

$$b^+(x', t) = (2\pi)^{-3/2} \int b^+(k')\, e^{i(-k'x' + \omega' t)}\, dk'^3 . \tag{43}$$

Dabei sind b^- und b^+ links und rechts als Operatoren aufgefasst, die auf den Zustand $\Phi(t)$ zur Zeit t wirken. Man kann sie aber auch als Operatoren auffassen, die auf $\Phi(0)$ wirken, indem man nach Heisenberg $\Phi(t)$ mit $\Phi(0)$ identifiziert. Die Operatorgleichungen (42) und (43) bleiben dann bestehen.

Im Fall freier Teilchen sind die Operatoren $b^-(k')$ und $b^+(k')$ konstant. In diesem Fall folgt aus (42), dass der Operator $b^-(x', t)$ dieselbe Differentialgleichung erfüllt wie die ebene Welle (2):

$$\Delta b^- - \partial_t^2 b^- = \mu^2 b^- . \tag{44}$$

H. *Die Mehrzeitenfunktion* $\varphi_n(x, t)_n$

Es sei Φ_0 der Zustandsvektor des Vakuums:

$$\Phi_0 = \{1, 0, 0, \ldots\} . \tag{45}$$

Ist nun ein beliebiger Zustandsvektor Φ gegeben und will man die einzelnen zu Φ gehörigen Funktionen $\varphi_n(x)_n$ berechnen, so braucht man nur das Skalarprodukt

$$(\Phi_0, b^-(x_1) \ldots b^-(x_n)\, \Phi) = n!^{1/2}\, \varphi_n(x)_n \tag{46}$$

zu bilden. Die Symmetrie der Funktion φ_n folgt aus den Vertauschungsregeln für die Operatoren b^-.

Man kann die Operatoren $b^-(x_j)$ auch zu verschiedenen Zeiten t_j bilden und eine Funktion $\varphi_n(x, t)_n$ durch

$$(\Phi_0, b^-(x_1, t_1) \ldots b^-(x_n, t_n)\, \Phi) = n!^{1/2}\, \varphi_n(x, t)_n \tag{47}$$

definieren. Setzt man voraus, dass die Verbindungsvektoren

$$(x_j - x_k, t_j - t_k)$$

alle raumartig sind, so wird man in einer guten Bosonentheorie erwarten, dass die Operatoren $b^-(x_j, t_j)$ alle vertauschbar sind. Die Funktionen $\varphi_n(x, t)_n$ werden dann wieder symmetrisch.

Für freie Teilchen kann man die Funktionen $\varphi_n(x, t)_n$ explizit berechnen:

$$\varphi_n(x, t)_n = (2\pi)^{-3n/2} \int \varphi_n(k_1, \ldots, k_n)\, e^{i\Sigma(kx - \omega t)}\, dk^{3n} . \tag{48}$$

Diese Formel ist eine naheliegende Verallgemeinerung von (6).

Die Mehrzeitenfunktion $\varphi_n(x, t)_n$ ist ein sehr nützliches Hilfsmittel, wenn man die relativistische Invarianz einer Theorie beweisen will. Man habe eine Lorentztransformation, die die Variablen x und t in x' und t' überführt. Man wähle nun zu jedem x ein t so, dass alle t' einander gleich werden. Dann kann man die transformierten Funktionen

$$\varphi_n'(x', t')_n = \varphi_n(x, t)_n$$

nach (48) berechnen, daraus den Zustand $\Phi'(t')$ bilden und untersuchen, ob die Differentialgleichungen für Φ' dieselben sind wie für Φ.

Die Idee einer Mehrzeitentheorie, deren relativistische Invarianz leicht zu beweisen ist, stammt von DIRAC[7]).

§ 3. Elektron-Positron-Feld

Die Dirac-Gleichung eines einzelnen freien Elektrons lautet in der Bezeichnung von DIRAC[8]):

$$(p_0 - \beta_1\, \sigma \cdot p - \beta_3\, \mu)\, \chi = 0 . \tag{1}$$

Hier bedeutet p_0 der Differentialoperator $i\,\partial_t$ und p der dreidimensionale Vektor mit Komponenten $i\,\partial_x$, $i\,\partial_y$ und $i\,\partial_z$. Die β und σ sind numerisch gegebene vierreihige Matrices, und χ ist ein vierkomponentiger Spinor. Die Komponenten von χ mögen χ_α heissen. Als Lösungen von (1) haben wir ebene Wellen

$$\chi_\alpha\,(x, t \mid k, s, \varepsilon) = c_\alpha\,(s, \varepsilon)\, e^{i k x - i \omega t}\,. \tag{2}$$

Dabei nimmt ε die beiden Werte ± 1 an: $+$ für positive Energie, $-$ für negative. Ferner ist

$$\omega = \varepsilon\,(\mu^2 + k^2)^{1/2}\,. \tag{3}$$

Der Spinindex s nimmt ebenfalls die Werte ± 1 an. Man kann für s etwa den Eigenwert von σ_3 nehmen:

$$\sigma_3\,\chi = s\,\chi\,. \tag{4}$$

Das bedeutet, dass für den Spinor $c(s, \varepsilon)$ mit den Komponenten $c_\alpha(s, \varepsilon)$ ein Eigenvektor der Matrix σ_3 gewählt wird; der Spin in der Richtung der z-Achse hat dann den Wert $^1/_2\, s = \pm\, ^1/_2$. Statt der Richtung der z-Achse hätte man auch irgend eine andere Richtung nehmen können, zum Beispiel im Fall $k \neq 0$ die Richtung des Impulsvektors k. Man müsste dann, wie FRIEDRICHS es in [4]), Part V, § 28 tut, für s den Eigenwert und für $c(s, \varepsilon)$ einen Eigenvektor der Matrix

$$\tau = \frac{\sigma\, k}{|k|} \tag{5}$$

nehmen. Wir halten uns aber vorläufig an die erste Verabredung. Die $c(s, \varepsilon)$ [$s = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$] sind dann vier numerisch gegebene, linear unabhängige Spinoren.

Statt $\chi_\alpha(x, t \mid k, s, \varepsilon)$ werden wir auch $\chi(x, \alpha, t \mid k, s, \varepsilon)$ oder kurz $\chi(k, s, \varepsilon)$ schreiben.

Die Löchertheorie beruht auf der Annahme, dass immer nur endlich viele Wellen positiver Energie besetzt und nur endlich viele Wellen negativer Energie unbesetzt sind. Wenn eine Welle positiver Energie $\chi(k, s, +1)$ besetzt ist, so ist ein Elektron mit Impuls k und Spin s vorhanden. Wenn eine Welle negativer Energie $\chi(k, s, -1)$ unbesetzt ist, so ist ein Positron mit Impuls $-k$ und Spin s vorhanden.

Wir betrachten nun solche Zustände, in denen n_e Elektronen und n_p Positronen vorhanden sind, insgesamt also

$$n = n_e + n_p \tag{6}$$

Teilchen. Sind die Spins, Impulse und Energievorzeichen dieser Teilchen gegeben, so sind die n Tripel

$$(k_1, s_1, \varepsilon_1), \ldots, (k_n, s_n, \varepsilon_n)$$

bekannt. Die Wellenfunktion des Systems von n Teilchen ist das Produkt der n Faktoren $\chi(x_j, \alpha_j, t \mid k_j, s_j, \varepsilon_j)$.

Dieses Produkt ist mit einer Wahrscheinlichkeitsamplitude $\varphi_n(k, s, \varepsilon)_n$ zu multiplizieren, nach den k zu integrieren und nach den s und ε zu summieren. So erhält man die Wahrscheinlichkeitsamplitude im (x, α)-Raum:

$$\varphi_n(x, \alpha)_n = (2\,\pi)^{-3n/2} \sum_{s,\varepsilon} \int \varphi_n(k, s, \varepsilon)_n \prod_1^n \chi(x_j, \alpha_j, t \mid k_j, s_j, \varepsilon_j)\, dk^{3n}\,. \tag{7}$$

Die Funktion $\varphi_n(k, s, \varepsilon)_n$ soll antisymmetrisch in allen Argumenttripeln sein. Dann ist auch $\varphi_n(x, \alpha)$ antisymmetrisch in den Argumentpaaren (x, α).

Die Norm von $\varphi_n(x, \alpha)_n$ wird durch Integration über die x und Summation über die α (von 1 bis 4 für jedes einzelne α_j) definiert:

$$\mathcal{N}\varphi_n = \sum_\alpha \int \varphi_n^* \, \varphi_n \, dx^{3n} \,. \tag{8}$$

Analog für die $\varphi_n(k, s, \varepsilon)_n$. Die Eigenvektoren $c_\alpha(s, \varepsilon)$ sind orthogonal und können so normiert werden, dass

$$\sum_\alpha c_\alpha^*(s', \varepsilon') \, c_\alpha(s', \varepsilon') = 1 \tag{9}$$

wird. Dann verifiziert man, dass die Norm von $\varphi_n(x, \alpha)_n$ gleich der Norm von $\varphi_n(k, s, \varepsilon)_n$ ist. Wir können also einfach $\mathcal{N}\varphi_n$ schreiben, ohne uns um die Argumente zu kümmern.

Ein Zustandsvektor Φ wird wieder als eine Folge von Funktionen

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1(x, \alpha)_1, \varphi_2(x, \alpha)_2, \dots\} \tag{10}$$

mit endlicher Norm

$$\mathcal{N}\Phi = \sum_0^\infty \mathcal{N}\varphi_n \tag{11}$$

definiert. Wir betrachten zunächst, wie in § 2, nur Zustände des Feldes zu einer festen Zeit, zum Beispiel zur Zeit $t = 0$. Das Integral von $\varphi_n^* \, \varphi_n$ über ein Gebiet G im Raum der k, ε und s, das bei allen Permutationen der n Tripel $(k_1, s_1, \varepsilon_1), \dots$ in sich übergeht, ist wieder gleich der Wahrscheinlichkeit, dass das Feld aus n Teilchen besteht, deren Vektoren k, Spinorientierungen s und Ladungsvorzeichen ε dem Gebiet G angehören.

Der Vernichtungsoperator $a^-(k', s', \varepsilon')$ wird genau so definiert wie früher der Vernichtungsoperator $b^-(k')$. Der Operator $a^-(k', s', \varepsilon')$ führt also $\varphi_n(k, s, \varepsilon)_n$ in

$$\varphi_{n-1}^-(k, s, \varepsilon)_{n-1} = n^{1/2} \, \varphi_n(k_1, s_1, \varepsilon_1 \mid \dots \mid k_{n-1}, s_{n-1}, \varepsilon_{n-1} \mid k', s', \varepsilon') \tag{12}$$

über. Beim Erzeugungsoperator a^+ muss man diesmal eine alternierende Summe bilden. Der Operator a^+ führt also $\varphi_{n-1}(k, s, \varepsilon)_{n-1}$ in

$$\varphi_n^+(k, s, \varepsilon)_n = n^{1/2} \, Asy \, \{\varphi_{n-1}(k, s, \varepsilon)_{n-1} \, \delta(k' - k_n) \, \delta(s' - s_n) \, \delta(\varepsilon' - \varepsilon_n)\} \tag{13}$$

über.

Die fundamentalen Operatoren der Theorie sind aber nicht diese a^- und a^+, sondern zwei Operatoren ψ^- und ψ^+, die so definiert werden:

$$\left.\begin{aligned} \psi^-(k', s', \varepsilon') &= a^- \,, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon' = +1 \\ &= a^+ \,, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon' = -1 \,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi^+(k', s', \varepsilon') &= a^+ \,, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon' = +1 \\ &= a^- \,, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon' = -1 \,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Der Operator ψ^- vernichtet also ein Elektron oder erzeugt ein Positron. Der Operator ψ^+ erzeugt ein Elektron oder vernichtet ein Positron. Statt ψ^- schreiben wir auch ψ, und statt ψ^+ schreiben wir $\psi^\dagger$, um uns der bei den Physikern üblichen Bezeichnung anzupassen.

Die Vertauschungsregel für die Operatoren ψ und $\psi^\dagger$ lautet

$$[\psi(k', s', \varepsilon')\, \psi^\dagger(k'', s'', \varepsilon'')]_+ = \delta(k' - k'')\, \delta(s' - s'')\, \delta(\varepsilon' - \varepsilon'')\,, \tag{16}$$

wobei $[A\, B]_+ = A\, B + B\, A$ gesetzt ist.

Die Operatoren $\psi_\alpha(x)$ und $\psi_\alpha^\dagger(x)$ werden am einfachsten durch eine Fouriertransformation definiert, analog zu den Formeln (21) und (22) in § 2:

$$\psi_\alpha(x) = (2\,\pi)^{-3/2} \sum \int \psi(k', s', \varepsilon')\, \chi_\alpha(k', s', \varepsilon')\, dk'^3\,, \tag{17}$$

$$\psi_\alpha^\dagger(x) = (2\,\pi)^{-3/2} \sum \int \psi^\dagger(k', s', \varepsilon')\, \chi_\alpha^*(k', s', \varepsilon')\, dk'^3\,. \tag{18}$$

Man erhält dann für die $\psi_\alpha(x')$ und $\psi_\alpha^\dagger(x')$ genau die richtige Vertauschungsrelation

$$[\psi_\alpha(x')\, \psi_\beta^\dagger(x'')]_+ = \delta(x' - x'')\, \delta(\alpha - \beta)\,. \tag{19}$$

Wie in § 2 kann man die Operatoren $\psi(x', t)$ und $\psi^\dagger(x', t)$ auch für beliebige Zeiten t definieren und die relativistische Invarianz der Theorie prüfen. Das soll jetzt nicht näher ausgeführt werden. Wir bemerken nur, dass die Formeln (17) und (18) für beliebige Zeiten t ungeändert gelten. Im Fall freier Teilchen sind die $\psi(k', s', \varepsilon')$ rechts konstant. Daraus folgt, dass $\psi(x, t)$ wie χ der Differentialgleichung (1) genügt und $\psi^\dagger(x, t)$ wie χ^* der konjugiert-komplexen Differentialgleichung.

§ 4. Neutrino-Antineutrino-Feld

Eine relativistische Wellengleichung erster Ordnung für einen zweikomponentigen Spinor kann nach der Spinoranalyse[9]) nur eine der beiden von WEYL[10]) zuerst vorgeschlagenen Formen

$$(p_0 - \sigma\, p)\, \chi = 0 \tag{1}$$

oder

$$(p_0 + \sigma\, p)\, \chi = 0 \tag{2}$$

haben. Dabei sind σ_1, σ_2, σ_3 die drei Paulischen zweireihigen Matrices. Die Gleichungen sind bei Spiegelungen nicht invariant. Die zugehörigen Teilchen haben die Masse Null.

LEE und YANG[11]) haben vorgeschlagen, eine der beiden Gleichungen (1) oder (2) als Wellengleichung für das Neutrino und die andere für das Antineutrino anzunehmen. Nach FEYNMAN und GELL-MANN[12]) passt die Gleichung (1) für Neutrinos am besten zu den Messungen über die Richtungsverteilung beim β-Zerfall.

Setzt man eine Lösung von (1) als ebene Welle an:

$$\chi_\alpha = c_\alpha\, e^{i k x - i \omega t}\,, \tag{3}$$

so findet man als Bedingung für den Spinor c und die Frequenz ω

$$(\omega + \sigma \cdot k)\, c = 0\,. \tag{4}$$

Nun hat die Matrix $\sigma\, k$ die Eigenwerte $\pm\, |\, k\, |$. Also muss man

$$\omega = \varepsilon\, |\, k\, |\,, \quad \varepsilon = \pm\, 1 \tag{5}$$

setzen. Wählt man $\varepsilon = +1$, so erhält man eine ebene Welle mit positiver Energie und Spin entgegengesetzt zum Vektor k. Wählt man $\varepsilon = -1$, so erhält man eine Welle mit negativer Energie und Spin gleichgerichtet mit k. Zu jeder Wahl von ε gehört ein einziger Spinor $c(k, \varepsilon)$. Als Lösungen von (1) erhalten wir die ebenen Wellen

$$\chi_\alpha(x, t \mid k, \varepsilon) = c_\alpha(k, \varepsilon)\, e^{ikx - i\omega t}\,. \tag{6}$$

Aus Produkten von solchen ebenen Wellen bilden wir, wie in § 3, Wellenpakete

$$\varphi_n(x, \alpha)_n = (2\pi)^{-3n/2} \sum_\varepsilon \int \varphi_n(k, \varepsilon)_n \prod_1^n \chi_\alpha(x, t \mid k, \varepsilon)\, dk^{3n}\,, \tag{7}$$

wobei die $\varphi_n(k, \varepsilon)_n$ wieder antisymmetrisch sein sollen. Der weitere Aufbau der Theorie verläuft genau wie in § 3.

§ 5. Das elektromagnetische Feld

A. *Ebene Wellen*

Grosse lateinische Buchstaben bezeichnen im folgenden Vierervektoren, zum Beispiel

$$K = (k, \omega)\,, \quad X = (x, t)\,.$$

Das Skalarprodukt von K und X ist

$$K\,X = k\,x - \omega\,t\,. \tag{1}$$

Das Viererpotential A wird durch die Lorentzbedingung

$$\sum_1^4 \partial_\nu A_\nu = 0 \tag{2}$$

eingeschränkt. Wenn keine Ladungen vorhanden sind, gilt die Wellengleichung

$$\Box A = \Delta A - \partial_t^2 A = 0\,. \tag{3}$$

Als Lösungen von (3) haben wir ebene Wellen

$$A_\nu(k, s) = C_\nu(s)\, e^{iKX}\,. \tag{4}$$

Wegen der Lorentzbedingung (2) muss

$$K\,C = 0 \tag{5}$$

sein; wir haben also für jedes K drei linear unabhängige ebene Wellen, die durch einen Index s ($s = 1, 2, 3$) unterschieden werden können. Die Wellengleichung (3) ergibt für K die Bedingung

$$K^2 = k^2 - \omega^2 = 0\,. \tag{6}$$

Wir wählen für ω die positive Wurzel

$$\omega = |\,k\,|\,. \tag{7}$$

Für jedes feste K können wir die z-Achse durch eine Drehung in die Richtung des Vektors k bringen. Dann wird

$$K = (0, 0, \omega, \omega) . \tag{8}$$

Als linear unabhängige Lösungen der Gleichung (5) wählen wir

$$C(1) = (1, 0, 0, 0) , \tag{9_1}$$

$$C(2) = (0, 1, 0, 0) , \tag{9_2}$$

$$C(3) = (0, 0, 1, 1) . \tag{9_3}$$

Die ersten beiden Lösungen entsprechen den beiden Polarisationsrichtungen einer Lichtwelle. Die dritte Lösung kann durch Umeichen des Potentials zu Null gemacht werden. Eine solche Umeichung besteht darin, dass man A durch $A + \nabla f$ ersetzt, wobei f eine beliebige differenzierbare Funktion von x und t und ∇ der Vektor $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, -\partial_t)$ ist. Wählt man

$$f = g\, e^{iKX} \tag{10}$$

mit einer beliebigen Konstanten g, so wird in der ebenen Welle (4) der Vektor C durch

$$C + i\, g\, K = C + i\, g\, \omega\, C(3) \tag{11}$$

ersetzt. Insbesondere wird $C(3)$ durch $(1 + i\, g\, \omega)\, C(3)$ ersetzt. Wählt man $g = i/\omega$, so wird $C(3)$ durch Null ersetzt und das Viererpotential

$$A(k, 3) = C(3)\, e^{iKX} \tag{12}$$

wird Null. Das heisst also: Das Viererpotential $A(k, 3)$ erzeugt kein Feld.

Bildet man aus den drei Viererpotentialen $A(k, s)$ eine Linearkombination

$$A(k) = \alpha(1)\, A(k, 1) + \alpha(2)\, A(k, 2) + \alpha(3)\, A(k, 3) , \tag{13}$$

so kann man nach dem eben Gesagten den Faktor $\alpha(3)$ durch Null ersetzen, ohne dass das Feld sich ändert. Setzt man $\alpha(3) = 0$, so wird $A_4 = 0$ und div $A = 0$. Das heisst: die Normierung $\alpha(3) = 0$ ist die Coulombeichung. Jede Umeichung bedeutet eine andere Wahl von $\alpha(3)$, während $\alpha(1)$ und $\alpha(2)$ ungeändert bleiben.

In der Definition der Basislösungen $C(1)$ und $C(2)$ steckt noch eine Willkür. Durch die Richtung der z-Achse sind nämlich die Richtungen der x- und y-Achse noch nicht festgelegt. Man kann also $C(1)$ und $C(2)$ einer reellen orthogonalen Transformation unterwerfen. Die Koeffizienten $\alpha(1)$ und $\alpha(2)$ werden dabei ebenfalls reell orthogonal transformiert, während $\alpha(3)$ ungeändert bleibt. Für das Folgende ist eine solche Transformation belanglos. In allen Formeln setzen wir voraus, dass für jeden Vektor k die Richtungen der x- und y-Achse beliebig gewählt sind. In bezug auf dieses Achsenkreuz bilden wir dann die Viererverktoren $C(s)$. Die Koordinaten von $C(s)$ in bezug auf ein festes, von k unabhängiges orthogonales Koordinatensystem mögen $C_\nu(s)$ heissen. Dabei läuft also s von 1 bis 3 und ν von 1 bis 4.

B. *Wellenpakete*

Wir multiplizieren nun jede ebene Welle (4) mit einer Wahrscheinlichkeitsamplitude $\varphi_1(k, s)$, summieren über s und integrieren über den k-Raum. So erhalten wir eine Wellenfunktion für ein einzelnes Photon:

$$\varphi_{1\nu}(X) = \varphi_1(X, \nu) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_s \varphi_1(k, s)\, A_\nu(k, s)\, dk^3 . \tag{14}$$

Für $t = 0$ lautet (14) so:

$$\varphi_{1\nu}(x) = \varphi_1(x, \nu) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_s \varphi_1(k, s)\, C_\nu(s)\, e^{ikx}\, dk^3 . \tag{15}$$

Lässt man den Index ν nur von 1 bis 3 gehen, so rechnet man leicht aus, dass die Norm der Funktion links

$$\mathcal{N}\varphi_1^{(x)} = \int \sum_{\nu=1}^{3} \varphi_1^*(x, \nu)\, \varphi_1(x, \nu)\, dx^3 \tag{16}$$

gleich der Norm der Funktion rechts

$$\mathcal{N}\varphi_1^{(k)} = \int \sum_s \varphi_1^*(k, s)\, \varphi_1(k, s)\, dk^3 \tag{17}$$

ist. Wir können daher diese Norm einfach $\mathcal{N}\varphi_1$ nennen. Sie ist eine reine Rechengrösse und hat keine physikalische Bedeutung.

Ist insbesondere $\varphi_1(x, \nu) = 0$, so hat auch $\varphi_1(k, s)$ die Norm Null, also ist $\varphi_1(k, s) = 0$ bis auf eine Nullmenge im k-Raum. Daraus folgt, dass $\varphi_1(k, s)$ durch $\varphi_1(x, \nu)$ im wesentlichen eindeutig bestimmt ist.

Die Coulombeichung des Viererpotentials (14) wird erhalten, indem man rechts $A_\nu(k, 3)$ durch Null ersetzt. Wir erhalten so das reduzierte Viererpotential

$$\varphi_1'(X, \nu) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_s{}' \varphi_1(k, s)\, A_\nu(k, s)\, dk^3 . \tag{18}$$

Dabei bedeutet $\sum'$ eine Summe von 1 bis 2. Insbesondere erhält man für $t = 0$

$$\varphi_1'(x, \nu) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_s{}' \varphi_1(k, s)\, C_\nu(s)\, e^{ikx}\, dk^3 . \tag{19}$$

Ist $\varphi_1(x, \nu)$ für $\nu = 1, 2, 3$ gegeben, so ist dadurch $\varphi_1(k, s)$ für $s = 1, 2, 3$ im wesentlichen eindeutig bestimmt; dann ist aber auch das reduzierte Wellenpaket $\varphi_1'(x, \nu)$ nach (19) eindeutig bestimmt. Den Übergang von φ_1 zu φ_1' nennen wir *Projektion*. In der Impulsdarstellung geschieht die Projektion einfach dadurch, dass die Funktion $\varphi_1(k, 3)$ durch Null ersetzt wird, während $\varphi_1(k, 1)$ und $\varphi_1(k, 2)$ ungeändert bleiben.

Unter der *reduzierten Norm* $\mathcal{N}'\varphi_1$ der Funktion verstehen wir die Norm der Projektion φ_1':

$$\mathcal{N}'\varphi_1 = \mathcal{N}\varphi_1' . \tag{20}$$

Die reduzierte Norm kann direkt aus der Wahrscheinlichkeitsamplitude $\varphi_1(k, s)$ berechnet werden, indem man $\varphi_1(k, 3)$ durch Null ersetzt und die gewöhnliche Norm bildet:

$$\mathcal{N}' \varphi_1 = \int \sum_s{}' \varphi_1^*(k, s)\, \varphi_1(k, s)\, dk^3 . \tag{21}$$

Bei der Definition der reduzierten Norm haben wir die Coulombeichung verwendet. Man kann aber auch ohne Bezugnahme auf eine bestimmte Eichung φ_1' als die Klasse aller φ_1 definieren, die durch Umeichung aus einem bestimmten φ_1 entstehen. Die Norm $\mathcal{N}\varphi_1'$ kann man dann als das Minimum der Normen aller φ_1 dieser Klassen definieren. Das Minimum aller Summen (17) bei gegebenen $\varphi_1(k, 1)$ und $\varphi_1(k, 2)$ und variablen $\varphi_1(k, 3)$ ist nämlich die reduzierte Summe (21).

Jetzt ist es nicht mehr schwer, Wellenpakete für n Photonen zu bilden. Wir nehmen ein Produkt von ebenen Wellen (4) in lauter unabhängigen Variablen $(X_1, \nu_1), \ldots, (X_n, \nu_n)$. Das Produkt wird mit einer Wahrscheinlichkeitsamplitude $\varphi_n(k, s)_n$ multipliziert, die symmetrisch in allen Argumentpaaren $(k_1, s_1), \ldots, (k_n, s_n)$ ist und eine endliche Norm hat. Dann wird über alle s von 1 bis 3 summiert und über alle k integriert:

$$\varphi_n(X, \nu)_n = (2\pi)^{-3n/2} \int \sum_s \varphi_n(k, s)_n \prod_1^n A_\nu(k, s)\, dk^{3n} . \tag{22}$$

Die reduzierte Funktion φ_n' wird erhalten, indem alle $A_\nu(k, 3)$ durch Null ersetzt werden:

$$\varphi_n'(X, \nu)_n = (2\pi)^{-3n/2} \int \sum_s{}' \varphi_n(k, s)_n \prod_1^n A_\nu(k, s)\, dk^{3n} . \tag{23}$$

Dabei bedeutet $\sum'$ eine Summation über alle s von 1 bis 2.

Die Norm und die reduzierte Norm von φ_n werden wie vorhin definiert, am einfachsten durch Summation und Integration im Impulsraum:

$$\mathcal{N}\varphi_n = \int \sum \varphi_n^*(k, s)\, \varphi_n(k, s)\, dk^{3n} , \tag{24}$$

$$\mathcal{N}' \varphi_n = \mathcal{N}\varphi_n' = \int \sum_s{}' \varphi_n^*(k, s)\, \varphi_n(k, s)\, dk^{3n} . \tag{25}$$

Die Projektion $\varphi_n \to \varphi_n'$ bildet den Hilbertraum aller Funktionen (22) auf den Hilbertraum der Projektionen ab.

C. *Zustandsvektoren*

Wir nehmen nun an, dass ein Zustand des Feldes durch eine Folge von Funktionen

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1(k, s)_1, \varphi_2(k, s)_2, \ldots\} \tag{26}$$

definiert ist, wobei die Summe der Normen

$$\mathcal{N}\Phi = \sum_0^\infty \mathcal{N}\varphi_n \tag{27}$$

endlich sein soll. Derselbe Zustand Φ kann auch durch eine Folge von Funktionen $\varphi_n(x, \nu)$ definiert werden. Man erhält $\varphi_n(x, \nu)$, indem man in (22) links und rechts $t = 0$ setzt:

$$\varphi_n(x, \nu)_n = (2\pi)^{-3n/2} \int \sum_s \varphi_n(k, s)_n \prod_1^n C_\nu(s)\, e^{ikx}\, dk^{3n}\,. \tag{28}$$

Die Folgen Φ heissen *Zustandsvektoren*. Jeder Folge Φ ist eine *Projektion* Φ' zugeordnet, die erhalten wird, indem alle $\varphi_n(k, s)_n$, in denen ein $s = 3$ ist, weggelassen werden. Wir nehmen an, dass der Zustand des Feldes bereits durch die Projektion Φ' bestimmt ist. Zu $\Phi' = 0$ gehört kein Zustand. Zu Φ' und $\alpha\,\Phi'$ gehört derselbe Zustand.

Unter der *reduzierten Norm* $\mathcal{N}'\,\Phi$ verstehen wir die Norm der Projektion Φ':

$$\mathcal{N}'\Phi = \mathcal{N}\Phi' = \sum_0^\infty \mathcal{N}'\,\varphi_n = \sum_0^\infty \mathcal{N}\varphi_n'\,. \tag{29}$$

Die reduzierte Norm definiert eine halbdefinite Metrik im Raum der Φ, aber eine positiv-definite Matrik im Raume der Φ'. Der Raum der Φ' ist der Raum der physikalisch feststellbaren Zustände. Der Raum der Φ ist nur eine mathematische Hilfskonstruktion, die bei Untersuchungen über die relativistische Invarianz nützlich ist.

Den Raum der Projektionen Φ' wollen wir R_2 nennen, weil in (23) über s nur bis 2 summiert wird. Den Raum der Φ nennen wir R_3. Man kann R_3 in einen noch grösseren Zustandsraum R_4 einbetten, indem man auch noch solche Viererpotentiale $A(k, 4)$ zulässt, die die Lorentzbedingung (2) nicht erfüllen. Man kann zum Beispiel «longitudinale Wellen» von der Form (4) mit

$$C(4) = (0, 0, 1, 0) \tag{30}$$

hinzunehmen. In diesem Raum R_4 kann man dann nach BLEULER[6]) eine indefinite Metrik einführen. Nachher beschränkt BLEULER sich dann auf einen linearen Unterraum, der durch eine von GUPTA[13]) angegebene lineare Bedingung, Gleichung 2.11 in [6]), definiert wird. Dieser Unterraum ist, wie man leicht nachrechnet, genau unser Raum R_3. Die indefinite Metrik in R_4 erzeugt in R_3 eine halbdefinite, nämlich eben die durch unsere reduzierte Norm (29) definierte Metrik. Unsere Theorie ist also mit der Gupta-Bleulerschen äquivalent.

D. *Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren*

Der Vernichtungsoperator $b^-(k', s')$ vernichtet ein Photon mit Impuls k' und Polarisation s'. Er führt also $\varphi_n(k, s)_n$ in φ_{n-1}^- über:

$$\varphi_{n-1}^-(k, s)_{n-1} = n^{1/2}\, \varphi_n\big((k, s)_{n-1}, k', s'\big)\,. \tag{31}$$

Ebenso erzeugt $b^+(k', s')$ ein Photon mit Impuls k' und Polarisation s'. Er führt $\varphi_{n-1}(k, s)_{n-1}$ in φ_n^+ über:

$$\varphi_n^+(k, s)_n = n^{1/2}\, Sy\, \{\varphi_{n-1}(k, s)_{n-1}\, \delta(k' - k_n)\, \delta(s' - s_n)\}\,. \tag{32}$$

Beide Operatoren werden nur für $s' = 1, 2, 3$ gebildet. Sie führen also nicht über den Raum R_3 hinaus. Photonen, die die Lorentzbedingung nicht erfüllen, werden nicht erzeugt und nicht vernichtet, sondern sie bleiben überhaupt ausser Betracht.

Die Operatoren b^- und b^+ mit $s = 3$ haben keine physikalische Bedeutung: sie wirken auf die Vektoren Φ des mathematischen Hilbertraumes R_3. Die Operatoren mit $s = 1$ oder 2 dagegen wirken auf den Raum R_2 der physikalischen Zustandsvektoren Φ': sie vernichten und erzeugen echte Lichtquanten.

Die Vertauschungsrelationen lauten wie immer

$$[b^-(k', s')\, b^+(k'', s'')] = \delta(k' - k'')\, \delta(s' - s'') , \tag{33}$$

$$[b^-(k', s')\, b^-(k'', s'')] = 0 , \tag{34}$$

$$[b^+(k', s')\, b^+(k'', s'')] = 0 . \tag{35}$$

E. *Energie, Potential und Feldstärken*

Die Energie des elektromagnetischen Feldes ist, wie in § 2 (29), die Summe der Energien der einzelnen Oscillatoren:

$$H_0 = \int \sum_{s'}{}' \omega\, b^+(k', s')\, b^-(k', s')\, dk'^3 . \tag{36}$$

Setzen wir also für $s' = 1, 2, 3$

$$q(k', s') = (2\,\omega)^{-1/2}\, b^-(k', s') , \tag{37}$$

$$q^\dagger(k', s') = (2\,\omega)^{-1/2}\, b^+(k', s') , \tag{38}$$

so wird

$$H_0 = \int \sum{}' 2\,\omega^2\, q^\dagger(k', s')\, q(k', s')\, dk'^3 . \tag{39}$$

Das Viererpotential des Feldes wird nun als selbstadjungierter Operator so definiert:

$$A_\nu = \int \sum_{s'} \{q(k', s')\, A_\nu(k', s') + q^\dagger(k', s')\, A_\nu^*(k', s')\}\, dk'^3 . \tag{40}$$

Diese Formel ist ganz analog der üblichen Formel, in der statt des Integrals eine Summe über alle Eigenschwingungen des in einen Kasten eingeschlossenen Feldes steht. Die einzelnen $A_\nu(k' s')$ und $A_\nu^*(k' s')$ sind Funktionen von x und t, die die Differentialgleichungen (2) und (3) erfüllen; also genügt auch A_ν diesen Differentialgleichungen.

Aus dem Viererpotential A_ν kann man durch Differentiation die Feldstärken bilden:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu A_\nu . \tag{41}$$

Man findet aus (40):

$$F_{\mu\nu} = \int \sum_{s'} \{q(k', s')\, F_{\mu\nu}(k', s') + q^\dagger(k', s')\, F_{\mu\nu}^*(k', s')\}\, dk'^3 . \tag{42}$$

Die zu $s' = 3$ gehörigen Feldstärken sind Null, also braucht man in der Summe rechts nur die Glieder $s' = 1$ und 2 mitzunehmen. Man kann also bei der Berechnung von $F_{\mu\nu}$ von vornherein mit der Coulomb-Normierung rechnen. A_4 ist dann Null und man findet

$$\mathfrak{E} = -\partial_t A = i \int \sum{}' \omega \{q(k', s') A(k', s') - q^\dagger(k', s') A^*(k', s')\}, \tag{43}$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} A = i \int \sum{}' \{q(k', s') [k', A(k', s')] - q^\dagger(k', s') [k', A^*(k', s')]\}, \tag{44}$$

wobei $[k, A]$ das Vektorprodukt der Raumvektoren k und A bedeutet. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ erfüllen natürlich die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum.

F. *Schlussbemerkung*

Das elektromagnetische Feld in Wechselwirkung mit Elektronen kann in der üblichen Weise behandelt werden. Wenn das übliche «Feld in einem Kasten» durch das Feld im unendlichen Raum ersetzt wird, hat man in jeder Formel, der die Operatoren b^+ und b^- oder q und q^+ enthält, die Summation über alle diskreten Zustände durch eine Summation über s' und Integration über k zu ersetzen. Mathematisch einwandfrei kann man die Theorie allerdings nicht formulieren, da sie anscheinend divergiert.

Literatur

1) W. Pauli, Über das Wasserstoffspektrum. Z. f. Phys. *36*, 336 (1926).
2) E. Schrödinger, Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen. Ann. d. Phys. *79*, 734 (1926).
3) V. Fock, Konfigurationsraum und zweite Quantelung. Z. f. Phys. *75*, 622 (1932).
4) K. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields. Interscience (New York 1953).
5) L. Schwarz, Théorie des Distributions (Hermann, Paris 1950).
6) K. Bleuler, Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen. Helv. Phys. Acta *23*, 567 (1950).
7) P. A. M. Dirac, Relativistic Quantum Mechanics. Proc. Roy. Soc. A *136*, 453 (1932).
8) P. A. M. Dirac, The quantum theory of the electron. Proc. Roy. Soc. A *117*, 610 und A *118*, 351 (1928).
9) B. L. van der Waerden, Spinoranalyse. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-Phys. *1929*, 100 (1929).
10) H. Weyl, Elektron und Gravitation. Z. f. Phys. *56*, 330 (1929).
11) T. D. Lee and C. N. Yang, Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino. Phys. Rev. *105*, 1671 (1957).
12) R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Theory of Fermi Interaction. Phys. Rev. *109*, 193 (1957).
13) S. N. Gupta, Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics. Proc. Phys. Soc. *63*, 681 (1950).