Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 39 (1966)

Heft: 1

Artikel: Über das zeitliche Verhalten von glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung

Autor: Jost, Res

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113670

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über das zeitliche Verhalten von glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung

von **Res Jost**

Seminar für Theoretische Physik der ETH, Zürich

(4. X. 65)

Abstract. The temporal behaviour of smooth solutions of the Klein-Gordon equation is analyzed. A new proof of the Lemma of D. RUELLE ([1], § 3) is given.

§ 1 Einleitung

Die Haag-Ruellesche Streutheorie [1, 2] [1]) beruht auf 2 Sätzen, die beide von D. RUELLE [1] bewiesen worden sind. Der erste steht hier nicht zur Diskussion. Er behandelt die «Cluster»-Eigenschaften der Wightman-Distributionen ([1] § 2). Für den zweiten ([1] § 3), der das zeitliche Verhalten der glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung behandelt, gebe ich einen neuen Beweis. Der schöne Beweis von RUELLE ist geometrischer Natur und gestattet unmittelbar Verallgemeinerungen auf andere Differentialgleichungen. Dagegen eignet er sich weniger zur Verallgemeinerung auf andere Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung. Zwar hat H. ARAKI [3] das Lemma von RUELLE mit dessen Methode auf Fälle mit nicht kompaktem Träger der Fouriertransformierten der Lösung verallgemeinert. Doch wird der Beweis dann sehr umständlich.

Unser Beweis verwendet die Methoden der klassischen Analysis und ist dadurch der heute älteren Physikergeneration wohl besser zugänglich. Er geht im übrigen auf Diskussionen, die der Verfasser im Frühjahr 1965 am Institut des Hautes Etudes Scientifiques in Bures-sur-Yvette mit I. E. SEGAL hatte, zurück. Sowohl Herrn SEGAL wie Herrn LÉON MOTCHANE, dem Direktor des Instituts gegenüber, fühlt sich der Verfasser zu Dank verpflichtet.

Herrn Dr. W. SCHNEIDER dankt er für eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

§ 2 Eine spezielle Lösungsschar der Klein-Gordon-Gleichung

Als Ausgangspunkt für unsere Diskussion dienen uns die folgenden speziellen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung:

$$F(\alpha, x) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-\alpha p_0} e^{i(p,x)} \Theta(p_0)\, \delta(p^2 - m^2)\, d^N p\,, \tag{1}$$

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 26.

wobei $\alpha > 0$ vorausgesetzt ist. Sei $x^0 = t$, $\tau = \alpha - i\,t$ und $\omega = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$, dann lässt sich (1) auch schreiben

$$F(\alpha, t, \boldsymbol{x}) = (2\,\pi)^{-N/2} \int e^{-\tau\omega}\, e^{-i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})} \frac{d^{N-1}\,p}{2\,\omega}. \tag{2}$$

Durch Integration (Anhang) ergibt sich

$$F(\alpha, t, \boldsymbol{x}) = \frac{m^{N-2}}{2\,\pi} \left(m\sqrt{\tau^2 + r^2}\right)^{-\nu} K_\nu\left(m\sqrt{\tau^2 + r^2}\right), \quad \nu = \frac{1}{2}\,(N-2), \tag{3}$$

wobei $r = |\,\boldsymbol{x}\,|$ gesetzt ist und $K_\nu(\mathcal{H})$ die modifizierte Hankelfunktion ([4], p. 29), bedeutet. Der Zweig der Wurzel ist durch die Bedingung $\operatorname{Re}\sqrt{\tau^2 + r^2} > 0$ festgelegt.

Wir wollen für das Folgende der Bequemlichkeit halber den Fall $\nu = 0$ ausschliessen und $\nu > 0$ $(N > 2)$ voraussetzen.

Da m in (1) nur eine (reziproke) Längeneinheit festlegt, *können wir ohne wesentliche Einbusse im folgenden $m = 1$ annehmen.*

Wir haben die folgenden Ziele: einmal

$$\operatorname{Max} |\, F\,(\alpha, t, \boldsymbol{x})\,| \tag{4}$$

und zum andern

$$\int |\, F(\alpha, t, \boldsymbol{x})\,|\, d^{N-1}\,x \tag{5}$$

für grosse Werte von t abzuschätzen. Dazu brauchen wir offenbar eine Abschätzung der modifizierten Hankelfunktion $K_\nu(\zeta)$ in $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Nun gilt $(\nu > 0)$ ([4], S. 29, [5], S. 373ff)

$$\lim_{\zeta \to 0} \zeta^\nu\, K_\nu(\zeta) = 2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu) \tag{6}$$

und für $\zeta \to \infty$

$$\zeta^{1/2}\, e^{\zeta}\, K_\nu(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + O\left(\frac{1}{|\,\zeta\,|}\right) \tag{7}$$

und zwar ist der Fehlerterm in (7) in $|\arg\zeta| \leqq \pi/2$ gleichmässig durch const. $|\,\zeta\,|^{-1}$ beschränkt. Aus (6) und (7) folgt die Existenz einer Konstanten A, derart dass in $\operatorname{Re}\zeta \geqq 0$

$$|\,K_\nu(\zeta)\,| < A\, \frac{1 + |\,\delta\,|^{\nu-1/2}}{|\,\zeta\,|^{\nu-1/2}}\, |\,\zeta\,|^{-1/2}\, e^{-\operatorname{Re}\zeta} \tag{8}$$

gilt.

Nun beachten wir, dass das Argument der modifizierten Hankelfunktion in (3) (für $m = 1$) lautet:

$$\zeta = (\tau^2 + r^2)^{1/2} = (r^2 - t^2 + \alpha^2 - 2\,i\,\alpha\,t)^{1/2} \tag{9}$$

und dass deswegen

$$|\,\zeta\,| = [(r^2 - t^2)^2 + 2\,\alpha^2\,(r^2 + t^2) + \alpha^4]^{1/4} \geqq \alpha \tag{10}$$

ist. Damit können wir (8) ersetzen durch

$$|\,K_\nu(\zeta)\,| < A\, \frac{1 + \alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{\nu-1/2}}\, |\,\zeta\,|^{-1/2}\, e^{-\operatorname{Re}\zeta}\,. \tag{11}$$

(11) in (3) ergibt ($A = 2\pi B$)

$$F(\alpha, t, \mathfrak{x}) < B \frac{1+\alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{\nu-1/2}} \mid \zeta \mid^{-(\nu+1/2)} e^{-\operatorname{Re}\zeta} \tag{12}$$

Wir wenden uns nun der ersten Aufgabe zu. Abkürzend setzen wir

$$\zeta = (u + i\,v)^{1/2} \qquad u = r^2 - t^2 + \alpha^2 \qquad v = -2\,\alpha\,t\,. \tag{13}$$

Es ist

$$\operatorname{Re}\zeta = 2^{-1/2}\,(u + \sqrt{u^2+v^2})^{1/2} \geqq 2^{-1/2}\,(-\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2})^{1/2} \tag{14}$$

und

$$\mid \zeta \mid^2 = \sqrt{u^2+v^2} \geqq 1/2\,(\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2}) \tag{15}$$

also

$$\mid \zeta \mid^{-2} \leqq \frac{2}{\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2}} = \frac{2(-\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2})}{v^2} = \frac{-\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2}}{2\,\alpha^2\,t^2}\,. \tag{16}$$

Verwendet man (14) und (16) in (12), dann findet sich

$$\mid F(a, t, \mathfrak{x}) \mid < B \frac{1+\alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{\nu-1/2}} (\alpha \mid t \mid)^{-(\nu+1/2)}$$
$$\times\, [2^{-1/2}\,(-\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2})^{1/2}]^{\nu+1/2}\, e^{-\sqrt{2(u+\sqrt{u^2+v^2})}} \tag{17}$$

oder schliesslich mit der Abkürzung

$$\eta = 2^{-1/2}\,(-\mid u \mid + \sqrt{u^2+v^2})^{1/2} > 0 \tag{18}$$

$$\mid F(\alpha, t, \mathfrak{x}) \mid < B\,(1 + \alpha^{\nu-1/2})\,\alpha^{-2\nu} \mid t \mid^{-(\nu+1/2)} \eta^{\nu+1/2}\, e^{-\eta}\,. \tag{19}$$

Aber es ist für $\eta > 0$

$$\eta^{\nu+1/2}\, e^{-\eta} \leqq (\nu + 1/2)^{\nu+1/2}\, e^{-(\nu+1/2)}\,, \tag{20}$$

so dass man schliesslich, für passendes C, findet:

$$\mid F(\alpha, t, \mathfrak{x}) \mid < C\,(1 + \alpha^{\nu-1/2})\,\alpha^{-2\nu} \mid t \mid^{-(\nu+1/2)}\,. \tag{I}$$

Damit ist die erste Aufgabe gelöst und wir wenden uns der Lösung der zweiten Aufgabe zu. Zunächst spalten wir das Integral (5) wie folgt in 2 Teile:

$$I_1 = \int\limits_{r^2 \geqq 2t^2} \mid F(\alpha, t, \mathfrak{x}) \mid d^{N-1}x \tag{21}$$

und

$$I_2 = \int\limits_{r^2 \leqq 2t^2} \mid F(\alpha, t, \mathfrak{x}) \mid d^{N-1}x\,. \tag{22}$$

Für I_2 erhalten wir mit (I) unmittelbar die Abschätzung

$$I_2 \leqq C_1(1 + \alpha^{\nu-1/2})\,\alpha^{-2\nu} \mid t \mid^{\nu+1/2} \tag{23}$$

für passendes C_1. Dabei ist $N - 1 = 2\,\nu + 1$ verwendet.

Um I_1 abzuschätzen, greifen wir auf (12) und (13) zurück. Es ist für $r^2 \geqq 2\,t^2$

$$|\,\zeta\,|^2 = \sqrt{u^2 + v^2} \geqq u \geqq t^2 + \alpha^2 \tag{24}$$

und

$$u + \sqrt{u^2 + v^2} \geqq r^2 - t^2 + \alpha^2 + t^2 + \alpha^2 > r^2, \tag{25}$$

womit

$$|\,F(\alpha, t, \mathbf{x})\,| < B\,\frac{1+\alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{\nu-1/2}}\,(\sqrt{t^2+\alpha^2})^{-(\nu+1/2)}\,e^{-r/\sqrt{2}}\,. \tag{26}$$

(26) in (21), wobei wir jetzt über $\mathbf{x}$ unbeschränkt integrieren, liefert

$$I_1 < C_2\,\frac{1+\alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{\nu-1/2}}\,(\sqrt{t^2+\alpha^2})^{-(\nu+1/2}\,. \tag{27}$$

und für unsere Zwecke genügend genau

$$I_2 < C_2\,\frac{1+\alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{2\nu}} \tag{28}$$

(28) mit (23) ergibt

$$\int |\,F(\alpha, t, \mathbf{x})\,|\,d^{N-1}x < D\,\frac{1+\alpha^{\nu-1/2}}{\alpha^{2\nu}}\,(1 + |\,t\,|^{\nu+1/2})\,. \tag{II}$$

für passend gewähltes D.

§ 3 Verallgemeinerung der Resultate

Statt einer Verallgemeinerung beginnen wir viel eher mit einer Spezialisierung. Wir betrachten nämlich die spezielle Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, die durch

$$G(x) = (2\,\pi)^{-N/2} \int \frac{(N-2)\,!}{(1+p_0)^{N-1}}\,e^{i(p,x)}\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p_0)\,d^N p \tag{1}$$

definiert ist. Da, wegen $N - 2 = 2\,\nu$,

$$\frac{(N-2)\,!}{(p_0+1)^{N-1}} = \int \alpha^{2\nu}\,e^{-\alpha}\,e^{-\alpha p_0}\,d\alpha \tag{2}$$

ist, findet man aus (I)

$$|\,G(t, \mathbf{x})\,| < C(1 + \Gamma(\nu + 1/2))\,|\,t\,|^{-(\nu+1/2)} = C_0\,|\,t\,|^{-(\nu+1/2)} \tag{3}$$

und aus (II)

$$\int |\,G(t, \mathbf{x})\,|\,d^{N-1}x < D(1 + \Gamma(\nu + 1/2))\,(1 + |\,t\,|^{\nu+1/2}) = D_0(1 + |\,t\,|^{\nu+1/2})\,. \tag{4}$$

Aus G erzeugen wir leicht neue Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung durch Faltung. Sei $h(x)$ absolut integrabel, dann ist

$$H(t, \mathbf{x}) = \int G(t, \mathbf{x} - \xi)\,h(\xi)\,d^{N-1}\xi \tag{5}$$

wieder eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung und es gilt

$$|\,H(t, \mathbf{x})\,| \leqq C_0 \int |\,h(\xi)\,|\,d^{N-1}\xi\,|\,t\,|^{-(\nu+1/2)} \tag{6}$$

und

$$\int | H(t, \boldsymbol{x}) | \, d^{N-1} x \leqq D_0 \int | h(\boldsymbol{\xi}) | \, d^{N-1} \xi \, (1 + | t |^{\nu+1/2}) \, . \tag{7}$$

Aber es ist ($x^0 = t$)

$$(2\pi)^{-N/2} \int e^{-i(p,x)} H(x) \, d^N x = \frac{(N-2)!}{(p_0+1)^{N-1}} \hat{h}(\boldsymbol{p}) \, \theta(p_0) \, \delta(p^2 - m^2) \tag{8}$$

wobei

$$\hat{h}(\boldsymbol{p}) = \int e^{i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})} h(\boldsymbol{x}) \, d^{N-1} x \tag{9}$$

ist.

Satz (Ruelle, Araki [1, 3]): Sei $\Phi(t, \boldsymbol{x})$ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, seien weiter[2]) $\Phi(0, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}$ und $\dot{\Phi}(0, \boldsymbol{x}) = \Phi_{,t}(0, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}$ dann gibt es eine Konstante Γ, so dass

$$| \Phi(t, \boldsymbol{x}) | < \Gamma \, | t |^{-(N-2)/2-1/2} \tag{I}$$

und

$$\int | \Phi(t, \boldsymbol{x}) | \, d^{N-1} x < \Gamma (1 + | t |^{(N-2)/2+1/2}) \tag{II}$$

ist.

Bemerkung: Dieser Satz wird von uns nur für $N > 2$ bewiesen. Er gilt aber auch für $N = 2$.

Beweis: Es ist ($t = x^0$)

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-N/2} \int \delta(p^2 - m^2) \, e^{i(p,x)} \, [\theta(p_0) \, \hat{g}_+(\boldsymbol{p}) + \theta(-p_0) \, g_-(\boldsymbol{p})] \, d^N x \, , \tag{10}$$

wobei

$$\hat{g}_+(\boldsymbol{p}) + \hat{g}_-(\boldsymbol{p}) = 2\,\omega\,(2\pi)^{-N/2-1} \int e^{i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})} \, \Phi(0, \boldsymbol{x}) \, d^{N-1} x \tag{11}$$

und

$$\hat{g}_+(\boldsymbol{p}) - \hat{g}_-(\boldsymbol{p}) = -2\,i\,(2\pi)^{-N/2-1} \int e^{i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})} \, \dot{\Phi}(0, \boldsymbol{x}) \, d^{N-1} x \tag{12}$$

ist ($\omega = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$). Es sind also sowohl $\hat{g}_+(\boldsymbol{p})$ als auch $\hat{g}_-(\boldsymbol{p})$ Funktionen aus $\mathcal{S}$.

Nun ist es offenbar hinreichend, den Satz für den Fall $\hat{g}_- = 0$ zu beweisen und weiter die unwesentliche Einschränkung $m = 1$ zu machen.

Setzt man weiter

$$\frac{(\omega+1)^{N-1}}{(N-2)!} \hat{g}_+(\boldsymbol{p}) = \hat{h}(\boldsymbol{p}) \tag{13}$$

dann ist auch $\hat{h}$ aus $\mathcal{S}$, desgleichen

$$h(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-N-1} \int e^{-i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})} \, \hat{h}(\boldsymbol{p}) \, d^{N-1} p \, . \tag{14}$$

h ist also bestimmt *absolut integrierbar*. Schliesslich wird

$$\Phi(t, \boldsymbol{x}) = \int G(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \, h(\boldsymbol{\xi}) \, d^{N-1} \xi \tag{15}$$

und der Satz ist auf Grund der Abschätzungen (6) und (7) bewiesen.

---

[2]) $\mathcal{S}$ ist der Testfunktionenraum von Schwartz, besteht also aus allen C^∞-Funktionen, die mit allen ihren Ableitungen stark abfallen. $\mathcal{S}$ wird durch Fouriertransformation in sich abgebildet.

Anhang

Es ist

$$F(\alpha, t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-N/2} \int e^{-\tau\sqrt{m^2+\lambda}} A(\lambda, r) \frac{d\lambda}{2\sqrt{m^2+\lambda}}, \tag{A1}$$

wobei

$$A(\lambda, r) = \int e^{-i(\mathbf{p}, \mathbf{x})} \delta(\mathbf{p}^2 - \lambda) \, d^{N-1} p . \tag{A2}$$

Nun gilt offenbar

$$\int e^{-y\lambda} A(\lambda, r) \, d\lambda = \int e^{-y\mathbf{p}^2 - i(\mathbf{p}, \mathbf{x})} \, d^{N-1} p = (\pi/y)^{(N-1)/2} e^{-r^2/4y} \tag{A3}$$

und daher ([6], Vol. I, S. 245, Nr. 40)

$$A(\lambda, r) = 2^{(N-3)/2} \pi^{(N-1)/2} r^{-(N-3)/2} \lambda^{(N-3)/4} J_{(N-3)/2}(r\sqrt{\lambda}) . \tag{A4}$$

Mit $\mu = \sqrt{\lambda}$ ergibt (4) in (1)

$$F(\alpha, t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} r^{-(N-2)/2} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\tau\sqrt{m^2+\mu^2}} \mu^{(N-2)/2} J_{(N-3)/2}(\mu r) \sqrt{\mu r} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2+m^2}} \tag{A5}$$

und daher ([6], Vol. II, S. 31, Nr. 22)

$$F(\alpha, t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} m^{N-2} (m\sqrt{\tau^2 + r^2})^{-\nu} K_\nu (m\sqrt{\tau^2 + r^2}) \tag{A6}$$

mit $\nu = (N-2)/2$.

Literatur

[1] D. Ruelle, Helv. phys. Acta *35*, 147 (1962).

[2] R. Jost, *The General Theory of Quantized Fields*, American Mathematical Society, Providence 1965.

[3] H. Araki, *Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie II*, Vorlesungsausarbeitung ETH, Zürich 1962.

[4] W. Magnus und F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1948.

[5] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge 1946.

[6] A. Erdélyi (Herausgeber), *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York 1954, Vol. I und II.