Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 39 (1966)

Heft: 1

Artikel: Der -Zerfall des negativen Müons in einer divergenzfreien Theorie der Leptonen

Autor: Hofer, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113673

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der β-Zerfall des negativen Müons in einer divergenzfreien Theorie der Leptonen[1])

von **Hans Hofer**

Institut für theoretische Physik der Universität Bern

(6. XI. 65)

Zusammenfassung. In einer von E. C. G. SUDARSHAN vorgeschlagenen divergenzfreien Theorie der Leptonen wird der β-Zerfall des Müons in zweiter Ordnung der Störungsrechnung diskutiert. Das wesentliche Element dieser Theorie bilden vier Hilfsfelder mit indefiniter Metrik. Die diesen Feldern zugeordneten Hilfsmassen regularisieren den Fermionpropagator so, dass keine Ultraviolettdivergenzen mehr auftreten. Es wird gezeigt, dass das Matrixelement für den Zerfall des Müons der Unitaritätsbedingung genügt, falls die Hilfsmassen gewisse Bedingungen erfüllen. In einer Näherung wird sodann das Elektronenspektrum, das Elektronenrichtungsspektrum und die Lebensdauer des Müons berechnet. Eine exakte Bestimmung der vier Hilfsmassen ist auf Grund der heutigen experimentellen Information nicht möglich. Es kann jedoch eine obere Grenze dafür angegeben werden, welche bei etwa 25 Müonmassen liegt.

I. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der Zerfall des negativen Müons in der von E. C. G. SUDARSHAN vorgeschlagenen divergenzfreien Theorie der Leptonen [1] [2]) diskutiert. Diese Theorie schliesst die Verwendung eines Hilbertraumes mit indefiniter Metrik ein. Im Gegensatz zur konventionellen Vier-Fermion-Theorie geht in die modifizierte Theorie eine gewisse Zahl von Hilfsfeldern ein, welche die gleichen Quantenzahlen aufweisen wie die Felder selbst, sich jedoch in der Masse von diesen unterscheiden. Diese Hilfsfelder werden in einem Hilbertraum mit indefiniter Metrik quantisiert. Die Hilfsmassen regularisieren den Fermionpropagator so, dass die üblichen Ultraviolettdivergenzen verschwinden. Es zeigt sich, dass zur Regularisierung vier Hilfsfelder genügen, ohne dass an die hierbei auftretenden Hilfsmassen zusätzliche Bedingungen gestellt werden müssen. Die von E. C. G. SUDARSHAN [1] geforderte Hilfsmassenbedingung erweist sich als überflüssig. Im Rahmen der modifizierten Theorie werden das Elektronenspektrum, das Elektronenrichtungsspektrum und die Lebenszeit des Müons als Funktion der Hilfsmassen berechnet. Eine exakte Bestimmung der vier Hilfsmassen ist auf Grund der heutigen experimentellen Information nicht möglich. Dank dieser Information kann lediglich eine obere Grenze für diese Hilfsmassen angegeben werden; sie liegt etwa bei 25 Müon-Massen.

---

[1]) Unterstützt durch den Schweiz. Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung.

[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 57.

Dass eine solche obere Grenze existieren muss zeigt sich schon darin, dass die Matrixelemente für grosse Hilfsmassen in die quadratisch divergenten Matrixelemente der gewöhnlichen Theorie übergehen.

Im zweiten Abschnitt wird das Matrixelement für den Zerfall des Müons in zweiter Ordnung der Störungsrechnung berechnet und gezeigt, dass in der Tat keine Ultraviolettdivergenzen auftreten. Der Nachweis, dass die vorliegende Amplitude im physikalischen Unterraum (Zustände mit positiver Norm) der Unitaritätsbedingung genügt, falls die Hilfsmassen gewisse Bedingungen erfüllen, wird im dritten Abschnitt erbracht. Im vierten Abschnitt berechnen wir sodann das Elektronenspektrum, das Elektronenrichtungsspektrum und die Lebensdauer in einer Näherung, in welcher die Hilfsmassen gross sind gegenüber dem Impulsübertrag durch die innere geschlossene Fermionlinie. Eine eingehendere numerische Analyse der genäherten Spektren und der genäherten Lebensdauer wird im fünften Abschnitt durchgeführt.

II. Der Müon-Zerfall in zweiter Ordnung

Wir wollen das Matrixelement für den Zerfall des Müons berechnen. Dabei soll der modifizierten Vier-Fermion-Wechselwirkung folgende Lagrange-Dichte zugrundegelegt werden [1].

$$L(x) = L_0(x) + G\, J_\lambda^*(x)\, J^\lambda(x) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L_0(x) = &\sum_{i=1}^{4} \left[-\frac{1}{2}\, \bar{\psi}_i(-i\,\gamma^\mu\, \partial_\mu + m_i)\, \psi_i \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{4} \left[-\frac{1}{2}\, \bar{\chi}_i(-i\,\gamma^\mu\, \partial_\mu + m_i')\, \chi_i \right] + h.c. \end{aligned} \tag{2}$$

$$J_\lambda(x) = \sum_{i,j=1,3} \bar{\psi}_i\, \gamma_\lambda\, \frac{1}{2}\, (1 - i\,\gamma_5)\, \chi_j + \sum_{i,j=2,4} \bar{\psi}_i\, \gamma_\lambda\, \frac{1}{2}\, (1 - i\,\gamma_5)\, \chi_j \tag{3}$$

ψ_1, χ_1, ψ_2 und χ_2 entsprechen den Elektron-, Elektronneutrino-, Müon- und Müonneutrinofeldern. Ihnen ordnen wir die Hilfsfelder ψ_3, χ_3, ψ_4 und χ_4 zu. Die Massen der geladenen beziehungsweise neutralen Felder ψ_i und χ_i bezeichnen wir mit m_i und m_i'.

Für gleiche Zeiten sollen die acht Felder folgende Antikommutationsrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \left[\psi_i(x),\, \psi_i^*(x')\right]_+\Big|_{x_0 = x_0'} &= \varepsilon(i)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \left[\chi_i(x),\, \chi_i^*(x')\right]_+\Big|_{x_0 = x_0'} &= \varepsilon(i)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \tag{4}$$

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} +1 & i = 1, 2 \\ -1 & i = 3, 4 \end{cases}$$

Alle andern Antikommutatoren verschwinden.

Auf Grund dieser Lagrange-Dichte erhalten wir für den Müon-Zerfall in zweiter Ordnung folgende neun Diagramme:

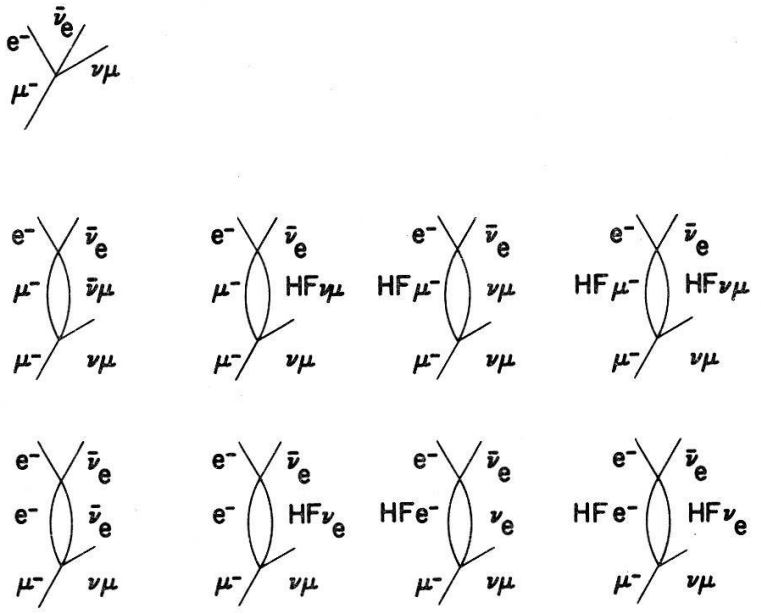

Fig. 1

Bekanntlich sind die acht Matrixelemente zweiter Ordnung (Figur 1, B und C) quadratisch divergent. Wir werden zeigen, dass sich infolge der indefiniten Metrik die Divergenzen der Summe der vier Matrixelemente (B) aufheben, sodass dieser Gruppe ein konvergentes Matrixelement zugeordnet werden kann. Dasselbe gilt für die Gruppe (C).

Die Summe der vier Matrixelemente (B) kann auf das Integral

$$\Lambda_{\lambda\varrho}(M, M', \mu', Q^2) = \int d^4 p \, Sp \left[\gamma_\lambda \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \left\{ \frac{1}{\gamma \cdot p - M} - \frac{1}{\gamma \cdot p - M'} \right\} \right.$$
$$\left. \cdot \, \gamma_\varrho \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \left\{ \frac{1}{\gamma \cdot (Q-p)} - \frac{1}{\gamma \cdot (Q-p) - \mu'} \right\} \right] \tag{5}$$

zurückgeführt werden. Dabei bezeichnet M die Masse des Müons, M' und μ' die Massen der in (B) auftretenden Hilfsfelder. Die Summe der Matrixelemente der geschlossenen Fermionlinien der Gruppe (C) führt auf dasselbe Integral; die Werte der Parameter M, M' und μ' bezeichnen in diesem Fall analog die Massen der in (C) auftretenden inneren Linien.

Die Auswertung des Integrals ergibt:

$$\Lambda_{\lambda\varrho}(M, M', \mu', Q^2) = (-2\, i\, \pi^2) \{ f(Q^2, M, M', \mu')\, g_{\lambda\varrho} + g(Q^2, M, M', \mu')\, Q_\lambda\, Q_\varrho \} \tag{6}$$

$$-f(Q^2, M, M', \mu') = -\log \frac{M'^2 - Q^2}{M'^2} \cdot \left\{ \frac{2\,Q^6 + M'^6 - 3\,Q^4\,M'^2}{12\,Q^4} \right\} + \log \frac{M^2 - Q^2}{M^2}$$
$$\cdot \left\{ \frac{2\,Q^6 + M^6 - 3\,Q^4\,M^2}{12\,Q^4} \right\} - \log \frac{M'^2}{\mu'^2} \cdot \left\{ \frac{(M'^2 - \mu'^2)^3 + 2\,Q^6 - 3\,Q^4 (M'^2 - \mu'^2)}{12\,Q^4} \right\}$$
$$- \log \frac{M'^2 - Q^2 + \mu'^2 - \sqrt{(M'^2 - Q^2 - \mu'^2)^2 - 4\,\mu'^2\,Q^2}}{M'^2 - Q^2 + \mu'^2 + \sqrt{(M'^2 - Q^2 - \mu'^2)^2 - 4\,\mu'^2\,Q^2}} \cdot \sqrt{(M'^2 - Q^2 - \mu'^2)^2 - 4\,\mu'^2\,Q^2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{(M'^2-\mu'^2)^2+Q^2\,(M'^2+\mu'^2)-2\,Q^4}{12\,Q^4} \right\} + \log \frac{M^2}{\mu'^2} \cdot \left\{ \frac{(M^2-\mu^2)^3+2\,Q^6-3\,Q^4(M^2+\mu'^2)}{12\,Q^4} \right\}$$

$$+ \log \frac{M^2-Q^2+\mu'^2-\sqrt{(M^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}}{M^2-Q^2+\mu'^2+\sqrt{(M^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}} \cdot \sqrt{(M^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{(M^2-\mu'^2)^2+Q^2(M^2+\mu'^2)-2\,Q^4}{12\,Q^4} \right\} + \frac{\mu'^2}{2} \cdot \log \frac{M^2}{M'^2} - \frac{\mu'^2}{3\,Q^2}\,(M'^2-M^2) \tag{7}$$

$$-\,g(Q^2, M, M', \mu') = 2 \left\{ \log \frac{M'^2-Q^2}{M'^2} \cdot \left\{ \frac{Q^6+2\,M'^6-3\,M'^4\,Q^2}{12\,Q^6} \right\} - \log \frac{M^2-Q^2}{M^2} \right.$$

$$\cdot \left\{ \frac{Q^6+2\,M^6-3\,M^4\,Q^2}{12\,Q^6} \right\} - \log \frac{M'^2}{\mu'^2} \cdot \left\{ \frac{-Q^6+3\,Q^2(M'^4-\mu'^4)-2(M'^2-\mu'^2)^3}{12\,Q^6} \right\}$$

$$+ \log \frac{M'^2-Q^2+\mu'^2-\sqrt{(M'^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}}{M'^2-Q^2+\mu'^2+\sqrt{(M'^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}} \sqrt{(M'^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{-Q^4-Q^2(M'^2+\mu'^2)+2(M'^2-\mu'^2)^2}{12\,Q^6} \right\} + \log \frac{M^2}{\mu'^2} \cdot \left\{ \frac{-Q^6+3\,Q^2(M^4-\mu'^4)-2(M^2-\mu'^2)^3}{12\,Q^6} \right\}$$

$$- \log \frac{M^2-Q^2+\mu'^2-\sqrt{(M^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}}{M^2-Q^2+\mu'^2+\sqrt{(M^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}} \sqrt{(M^2-Q^2-\mu'^2)^2-4\,\mu'^2\,Q^2}$$

$$\left. \cdot \left\{ \frac{-Q^4-Q^2(M^2-\mu'^2)+2(M^2-\mu'^2)^2}{12\,Q^6} \right\} + \frac{2\,\mu'^2}{3\,Q^4}\,(M'^2-M^2) \right\}. \tag{8}$$

Damit folgt für das totale Matrixelement der Prozesse A, B und C:

$$\langle e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_e \mid R \mid \mu^- \rangle = \frac{(-i\,G)}{(2\,\pi)^2} \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{q_{10} \cdot q_{40}}} \cdot \delta^4(q_2+q_3+q_4-q_1)$$

$$\cdot \left\{ \tilde{u}^{\beta}_{\nu\mu}(\boldsymbol{q}_2)\,\gamma^\lambda\,\frac{1}{2}\,(1-i\,\gamma_5)\,u^{\alpha}_{\mu}(\boldsymbol{q}_1) \right\} \left\{ \tilde{u}^{\delta}_{e}(\boldsymbol{q}_4)\,\gamma^\varrho\,\frac{1}{2}\,(1-i\,\gamma_5)\,v^{\gamma}_{\nu e}(\boldsymbol{q}_3) \right\}$$

$$\cdot \left\{ g_{\lambda\varrho} - \frac{i\,G}{(2\,\pi)^4}\,[\Lambda_{\lambda\varrho}(\mu)+\Lambda_{\lambda\varrho}(e)] \right\} \tag{9}$$

$$\Lambda_{\lambda\varrho}(\mu) = \Lambda_{\lambda\varrho}(m_2, m_4, m_4', Q^2)$$

$$\Lambda_{\lambda\varrho}(e) = \Lambda_{\lambda\varrho}(m_1, m_3, m_3', Q^2) \tag{10}$$

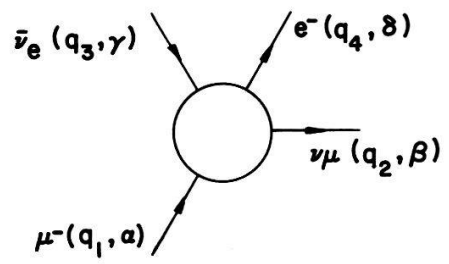

Fig. 2

Die Impulse und Polarisationen gehen aus Figur 2 hervor; Q bezeichnet den Impulsübertrag auf die geschlossenen Fermionlinien.

In üblicher Weise erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit des zerfallenden Müons:

$$N(q_4, \theta)\, dq_{40} \sin\theta\, d\theta = \frac{(2\pi)^3}{V \cdot T} \int d^3q_2\, d^3q_3\, d^3q_4\, |\langle e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_e \mid R \mid \mu^- \rangle|^2 \tag{11}$$

θ ist der Winkel zwischen dem Müonspin und dem Impuls des emitierten Elektrons.

Im Ruhesystem des Müons führt die Auswertung der Spuren auf das Integral:

$$N(q_4, \theta) \sin\theta\, d\theta\, dq_{40} = \frac{G^2 \sin\theta\, d\theta\, dq_{40}}{(2\pi)^3\, 16\, m_2^2} \int\limits_{Q^2|_\pi}^{Q^2|_0} d(Q^2)\, F(Q^2, q_4, \theta) \tag{12}$$

$$Q^2\,|_0 = \frac{m_2(m_2 \mid \boldsymbol{q}_4 \mid - m_1^2 + m_2\, q_{40})}{m_2 - q_{40} + \mid \boldsymbol{q}_4 \mid} \qquad Q^2\,|_\pi = \frac{m_2(-m_2 \mid \boldsymbol{q}_4 \mid - m_1^2 + m_2\, q_{40})}{m_2 - q_{40} - \mid \boldsymbol{q}_4 \mid}\,. \tag{13}$$

$$\begin{aligned} F(Q^2, q_4, \theta) = &- \left(1 - \frac{G}{(2\pi)^2} \operatorname{Re}\,[f(Q^2, \mu) + f(Q^2, e)]\right) \\ &\cdot \Big\{ [Q^2 + m_1^2 - 2\, m_2\, q_{40}]\, [Q^2 + m_2^2 - 2\, m_2\, q_{40}] - 2\, [Q^2 + m_1^2 - 2\, m_2\, q_{40}] \\ &\cdot \left[\frac{1}{2 \mid \boldsymbol{q}_4 \mid} [m_2^2\, q_{40} - m_2 \cdot m_1^2 - Q^2(m_2 - q_{40})] + m_2^2 \mid \boldsymbol{q}_4 \mid\right] \cdot \cos\theta \Big\} \\ &- \frac{G}{2(2\pi)^2} \operatorname{Re}\,[g(Q^2, \mu) + g(Q^2, e)] \Big\{ m_1^2\, m_2^2\, [m_2^2 + m_1^2 - 2\, m_2\, q_{40}] \\ &+ m_1^2\, m_2 \left[(Q^2 - m_2^2) \mid \boldsymbol{q}_4 \mid - \frac{(m_2 - q_{40})}{\mid \boldsymbol{q}_4 \mid}\right. \\ &\cdot \left.[m_2^2\, q_{40} - m_2\, m_1^2 - Q^2(m_2 - q_{40})]\right] \cos\theta \Big\}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Die verbleibende, nichttriviale Integration über Q^2 wird im Rahmen einer Näherung im Abschnitt IV ausgeführt. Bevor wir auf diese Näherung eintreten, wollen wir kurz die Auswirkungen der Annahme einer indefiniten Metrik auf die Unitaritätsbeziehung für das eben berechnete Matrixelement untersuchen.

III. Unitarität

Da der vorliegenden Theorie ein Hilbertraum mit indefiniter Metrik zugrunde liegt, ist die S-Matrix auch im Unterraum der Zustände mit positiver Norm nicht unitär, sondern pseudounitär. Beschränkt man sich auf Übergänge zwischen physikalischen Zuständen (Zustände mit positiver Norm), so schliesst im allgemeinen die in der Pseudo-Unitaritätsbeziehung auftretende Summation über Zwischenzustände auch solche negativer Norm ein. Diese Beiträge, die die normale Unitarität verletzen, treten jedoch erst auf, wenn die Produktionsschwelle für Hilfsteilchen erreicht ist.

Im Folgenden soll explicite geprüft werden, dass das berechnete Matrixelement für den Müon-Zerfall in der Tat der normalen Unitaritätsbeziehung genügt, wenn die Hilfsmassen genügend gross sind.

Die Pseudounitarität der S-Matrix lässt sich durch folgende Gleichung für die t-Matrix ausdrücken:

$$- i(t^{(2)} - N_f N_i t^{(2)*})_{fi} = - \int_m N_f \cdot N_m t^{(1)*}_{im} t^{(1)*}_{mi} \delta^4(P_m - P_i) \tag{15}$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \delta^4 (P_f - P_i) t_{fi}$$

$$N = \begin{cases} +1 \text{ Felder mit positiver Norm} \\ -1 \text{ Felder mit negativer Norm} \end{cases}$$

Die Wechselwirkung (3) ermöglicht Prozesse der Art

$$\mu^- \to H F \mu + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$$

$$\mu^- \to H F e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \qquad \text{usw.}$$

Damit das Müon gegenüber diesen unphysikalischen Zerfällen stabil ist, müssen die Hilfsmassen den Bedingungen

$$m_4 \geqslant m_2$$

$$m_3 \geqslant m_1$$

$$m_3' \geqslant m_2 - m_1$$

$$m_4' \geqslant m_2 - m_1 \tag{16}$$

genügen.

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen tragen zur rechten Seite der Gleichung (15) nur noch die Prozesse

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

bei.

Der Zwischenzustand enthält also nur noch Felder mit positiver Norm

$$N_t = N_i = N_z = 1 .$$

Die linke Seite der Gleichung (15) berechnen wir aus dem totalen Matrixelement in zweiter Ordnung. Mit den Hilfsmassenbedingungen folgt:

$$- i(t^{(2)} - t^{(2)*})_{fi} = \frac{G^2 \pi}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{q_{10} \cdot q_{40}}}$$
$$\cdot \left[\frac{2 Q^6 + m_1^6 - 3 Q^4 m_1^2}{12 Q^4} g_{\lambda\varrho} - \frac{Q^6 + 2 m_1^6 - 3 Q^2 m_1^4}{6 Q^6} Q_\lambda Q_\varrho \right] . \tag{17}$$

Durch Berechnung der rechten Seite der Gleichung (15) bestätigt man, dass die Amplitude in zweiter Ordnung der Unitaritätsbedingung im physikalischen Unterraum in der Tat genügt, falls die Hilfsmassenbedingungen erfüllt sind.

IV. Näherungen

Die theoretischen Ergebnisse über den μ-Zerfall in erster Näherung der Störungsrechnung stimmen mit der experimentellen Information sehr gut überein. Beim Beitrag der zweiten Ordnung kann es sich somit nur um kleine Korrekturen handeln. Kleine Diskrepanzen zwischen den experimentellen und den theoretischen Resultaten wurden festgestellt [2], doch kann es sich hier nicht darum handeln, die Parameter der Sudarshanschen Theorie an die experimentellen Resultate anzupassen, dazu ist die experimentelle Information zu spärlich.

Im Folgenden soll lediglich die Grössenordnung der Hilfsmassen aus der Bedingung abgeschätzt werden, dass die Abweichungen von den Resultaten der ersten Ordnung nicht mehr als einige Prozent betragen sollen.

Für eine erste grobe Abschätzung wollen wir voraussetzen, dass alle Hilfsmassen von gleicher Grössenordnung seien. Man erhält in $F(Q^2, q_4, \theta)$ (14) zum Beispiel für die Grössenordnung des ersten Terms der Beiträge zweiter Ordnung:

$$\frac{G\, m_2^2}{4(2\pi)^2}\left[\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^4 \log\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_3}{m_2}\right)^4 \log\left(\frac{m_3}{m_2}\right)^2\right].$$

Diese Korrektur hängt stark von der Grösse der Hilfsmassen ab. Vorausgesetzt, dass keine zufälligen Kompensationen auftreten, dürfen die Hilfsmassen 30 Müonmassen nicht übersteigen, wenn die Korrekturen innerhalb einiger Prozent liegen sollen.

Das Elektronenspektrum, die Lebenszeit und das Elektronenrichtungsspektrum wurden für verschiedene Werte der Hilfsmassen numerisch ausgewertet, wobei die Voraussetzung gemacht wurde, dass sämtliche Hilfsmassen grösser als fünf Müonmassen sind. Wie üblich vernachlässigen wir die Elektronenmasse gegenüber der Masse des Müons.

Für diese Spektren und die Lebenszeit erhält man durch Entwicklung von $F(Q^2, q_4, \theta)$ nach Q^2:

$$\begin{aligned} N(x)\,dx \cong \frac{G^2 m_2\, dx}{32(2\pi)^3}\Bigg\{&\left[1+\frac{G\,B}{(2\pi)^3}\right]\left[x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right)+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^4\right] \\ &+\frac{G\,A}{12(2\pi)^2}\left[x^2\left(3-2\log\left[x^2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]\right)-2x\left(1-\log\left[x^2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]\right)\right. \\ &\left.+\frac{1}{x^2}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^4+\frac{2}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]+\frac{G\cdot D}{(2\pi)^2}\,\frac{(1-x)\,(x^2-(m_1/m_2)^2)}{x}\Bigg\} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\tau \cong \frac{192(2\pi)^3}{G^2 m_2}\,(1-\varepsilon) \tag{19}$$

und

$$N(\theta)\sin\theta\, d\theta \cong \frac{G^2 m_2}{2\cdot 192(2\pi)^3}\,(1+\varepsilon)\left[1-\frac{1}{3}\cdot\xi\cos\theta\right]\sin\theta\, d\theta \tag{20}$$

wobei

$$x = \frac{p_{40}}{p_{40\,\max}}$$

$$\varepsilon = \frac{G}{(2\pi)^2}\left\{B-\frac{A}{2}\left[\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\log\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]+D\right\}$$

$$\xi = 1+\varrho;\ \varrho = \frac{G}{(2\pi)^2}\left\{A\left[\frac{107}{18}-\frac{8}{3}\log\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]-10\,D\right\}$$

$$A = m_4^4 + m_3^4 - 4(m_3'^2 m_3^2 + m_4'^2 m_4^2) + (m_4^4 - m_4'^4) \log \left(\frac{m_4}{m_4'}\right)^2$$
$$+ (m_3^4 - m_3'^4) \log \left(\frac{m_3}{m_3'}\right)^2 - m_4'^4 \log m_4^2$$
$$B = \frac{1}{2} \left[- m_4'^2 \log m_4^2 - m_3'^2 \log \left(\frac{m_3}{m_1}\right)^2\right]$$
$$D = -2 m_4^4 + \frac{4}{3} (m_4'^2 m_4^2 + m_3'^2 m_3^2) - \frac{1}{3} \left[m_3^4 + (m_4^4 - m_4'^4)\right.$$
$$\left. \cdot \log \left(\frac{m_4}{m_4'}\right)^2 + (m_3^4 - m_3'^4) \log \left(\frac{m_3}{m_3'}\right)^2 - m_4'^4 \log m_4'^2 + m_3'^4 \log \left(\frac{m_1}{m_3'}\right)^2\right].$$

Die Massen in A, B und D sind auf die Müonmasse normiert.

V. Numerische Auswertung

Wir wollen nun das Verhalten der Korrekturen ε und ϱ für einige charakteristische Hilfsmassensätze untersuchen. Da in A, B und D die Hilfsmassen nur in geraden Potenzen auftreten, können wir uns auf positive Hilfsmassen beschränken. Zudem ist das relative Vorzeichen von G nicht bestimmt, sodass auch die Vorzeichen der Korrekturen A, B, D, ε und ϱ nicht bestimmt sind. Wir setzen in der Folge voraus, G sei positiv.

Die Tabelle I gibt eine Übersicht über die Abhängigkeit der Korrekturen ε und ϱ als Funktion der Hilfsmassen. Für Hilfsmassen zwischen 4–6 Müonmassen sind die

Tabelle I

m_4	m_4'	m_3	m_3'	ε	ϱ
4	6	4	6	$-0{,}239 \cdot 10^{-4}$	$0{,}687 \cdot 10^{-3}$
6	4	6	4	$-0{,}209 \cdot 10^{-4}$	$0{,}263 \cdot 10^{-3}$
4	6	6	4	$-0{,}576 \cdot 10^{-4}$	$0{,}293 \cdot 10^{-3}$
6	4	4	6	$0{,}126 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}127 \cdot 10^{-4}$
4	6	6	4	$-0{,}576 \cdot 10^{-4}$	$0{,}964 \cdot 10^{-3}$
6	6	6	4	$-0{,}239 \cdot 10^{-4}$	$0{,}687 \cdot 10^{-3}$
8	6	6	4	$-0{,}141 \cdot 10^{-3}$	$0{,}195 \cdot 10^{-2}$
10	6	6	4	$-0{,}145 \cdot 10^{-3}$	$0{,}195 \cdot 10^{-2}$
15	7	6	5	$-0{,}143 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}461 \cdot 10^{-2}$
20	7	6	5	$0{,}186 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}463 \cdot 10^{-1}$
25	7	6	5	$0{,}736 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}159 \cdot 10^{-3}$
30	7	6	5	$0{,}194 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}398 \cdot 10^{-2}$
35	7	6	5	$0{,}420 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}838 \cdot 10^{-2}$
15	23	23	35	$0{,}452 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}201$
20	23	23	35	$0{,}395 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}142$
25	23	23	35	$0{,}331 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}610 \cdot 10^{-1}$
30	23	23	35	$0{,}278 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}146 \cdot 10^{-1}$
35	23	23	35	$0{,}252 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}402 \cdot 10^{-1}$
40	30	60	50	$0{,}113 \cdot 10^{-1}$	$0{,}183 \cdot 10$
50	30	60	50	$0{,}844 \cdot 10^{-2}$	$0{,}151 \cdot 10$
60	30	60	50	$0{,}559 \cdot 10^{-1}$	$0{,}749 \cdot 10^{-1}$
70	30	60	50	$0{,}195$	$-0{,}330 \cdot 10$
80	30	60	50	$0{,}481$	$-0{,}967 \cdot 10$

Korrekturen kleiner als ein Promille. Wir stellen fest, dass die Asymmetriekorrektur ϱ wesentlich empfindlicher auf die Wahl der Hilfsmassen reagiert als die Korrektur ε der Lebenszeit. Die obere Grenze für die Hilfsmassen ergibt sich daher aus der Forderung, dass die Asymmetriekorrektur den experimentellen Werten nicht widerspricht. Sie liegen etwa bei 25 Müonmassen.

Da die funktionelle Abhängigkeit der Korrekturen von den Hilfsmassen von ziemlich komplexer Struktur ist, können grundsätzlich auch bei sehr grossen Hilfsmassen noch zufällige Kompensationen auftreten, sodass die Korrekturen in der Lebenszeit und in der Asymmetrie wieder klein werden können. Ein Beispiel ist am Schluss der Tabelle I angeführt. Solche zufallsartige Kompensationen sind jedoch aus zwei Gründen nicht zulässig. Erstens treten sie im Elektronenspektrum nicht auf, da der Term B monoton von den Hilfsmassen abhängt. Sind zweitens die Absolutwerte der Korrekturterme zu gross, so tragen höhere Ordnungen der Störungsrechnung wesentlich bei. Eine zufällige Kompensation kann sich nicht in allen Ordnungen aufrechterhalten.

Die Grössenordnung der Korrekturen und ihre ungefähre Abhängigkeit von der Grösse der Hilfsmassen geht aus Tabelle I hervor.

Eine eingehendere numerische Analyse ist erst dann sinnvoll, wenn die experimentell festgelegten Abweichungen von den Voraussagen der ersten Ordnung der Störungstheorie mit wesentlich höherer Genauigkeit bekannt sind.

Herr Prof. Dr. E. C. G. SUDARSHAN hat die vorliegende Arbeit vorgeschlagen, wofür ich ihm bestens danke. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. A. MERCIER für die freundliche Aufnahme im Institut für theoretische Physik der Universität Bern sowie den Herren Dr. V. GORGÉ und Dr. H. LEUTWYLER für die wertvollen Diskussionen und Hinweise.

Literatur

[1] E. C. G. SUDARSHAN, Nuovo Cimento *21*, 7 (1961).
[2] R. P. FEYNMAN, Intern. Conf. High Energy Phys. Rochester 501 (1960).