Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 42 (1969)

Heft: 2

Artikel: Equations de Ginzburg-Landau et équations phénoménologiques de transport dans les supraconducteurs

Autor: Rothen, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114062

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Equations de Ginzburg-Landau et équations phénoménologiques de transport dans les supraconducteurs[1])

par **F. Rothen**

Institut für Theoretische Physik V der Philipps-Universität, Marburg (Allemagne)[2])

(26 VI 68)

Summary. It will be shown that in the neighbourhood of the critical temperature the application of the theory of irreversible processes to the supraconductors necessitates no other specific hypothesis but that of the validity of the time-dependent Ginzburg-Landau equations. Especially the vanishing of the thermoelectric effects and the particularly simple form of the thermal conductivity in supraconductors are connected with the fact that the pseudo-wave function ψ introduced by Ginzburg-Landau satisfies a diffusion equation in the mentioned temperature region.

Introduction

Dans un supraconducteur au voisinage de la température critique les relations entre courants et champs électromagnétiques sont locales, ce qui permet l'application de la théorie des phénomènes irréversibles sous forme également locale; or ce même domaine de température est domaine de validité de la théorie de Ginzburg-Landau[3]), qui doit donc pouvoir trouver place dans un cadre plus large, compte tenu des différents développements que divers auteurs lui ont donnés pour décrire également les phénomènes non stationnaires [2]. Le fait que l'équation du mouvement pour la pseudofonction d'onde $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ introduite primitivement par GL est une équation de diffusion appelle nécessairement la référence aux phénomènes irréversibles, comme Schmid l'a déjà fait [2]; il est par ailleurs souhaitable de procéder systématiquement en la matière.

Le présent travail a deux buts distincts: d'une part il tente de montrer que la théorie GL s'inscrit naturellement dans le cadre de la théorie des phénomènes irréversibles appliquée aux supraconducteurs, à laquelle elle a pour effet principal d'apporter un certain nombre de restrictions quant à la forme de certaines équations; d'autre part il montre que cette généralisation permet d'interpréter simplement l'absence d'effets thermoélectriques et la forme particulière de la conductivité thermique dans les supraconducteurs [3].

En ce qui concerne ce dernier point, il est nécessaire de faire les remarques suivantes. Le pouvoir thermoélectrique[4]) ε_T d'un *métal normal* est défini comme le rapport de la

[1]) Ce travail a été accompli grâce à l'appui financier du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

[2]) Adresse actuelle: Institut de Physique Expérimentale de l'Université, Place du Château, Lausanne (Suisse)

[3]) Nous employons dans ce qui suit la dénomination «théorie GL» aussi bien pour la théorie de Ginzburg-Landau sous sa forme primitive [1] que pour les diverses extensions qui lui ont été données par la suite.

[4]) Nous nous limitons à la discussion du pouvoir thermoélectrique, exemplaire en la matière.

différence de potentiel $\Delta\varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$ qui naît aux extrémités a et b d'une pièce de métal à la différence de température correspondante $\Delta T = T(b) - T(a)$, ceci en l'absence de courant. De la relation

$$\boldsymbol{j} = \mathfrak{L}_{nn}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\mu}{e}\right) - \mathfrak{L}_{nq}\frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T}$$

conséquence de la théorie des phénomènes irréversibles, on tire sans autre

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta\varphi}{\Delta T} = -\frac{1}{\Delta T}\int_a^b d\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\mu}{e}\right) = \frac{\mathfrak{L}_{nq}}{\mathfrak{L}_{nn}\,T}.$$

Si l'on applique cette même théorie aux supraconducteurs, on a le choix entre les deux équations

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mu_s}{e_s} + \frac{M_s v_s^2}{2\,e_s}\right) \tag{3.2b}$$

$$\boldsymbol{j}_n = \mathfrak{L}_{nn}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\mu_n}{e_n}\right) - \mathfrak{L}_{nq}\frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} \tag{3.2c}$$

décrivant respectivement le superfluide et le fluide normal caractérisés par les potentiels chimiques respectifs μ_s et μ_n. On est alors conduit à définir deux pouvoirs thermoélectriques ε_T^s et ε_T^n suivant les équations

$$\varepsilon_T^s = -\frac{1}{\Delta T}\int_a^b d\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\mu_s + 1/2\,M_s v_s^2}{e_s}\right) \tag{I.1a}$$

$$\varepsilon_T^n = -\frac{1}{\Delta T}\int_a^b d\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\mu_n}{e_n}\right) \tag{I.1b}$$

les calculs devant être effectués à courant total nul. ε_T^s est évidemment nul, ce qui n'est pas a priori le cas de ε_T^n.

L'expérience a montré depuis longtemps l'absence de pouvoir thermoélectrique dans les supraconducteurs [4]; Luttinger a utilisé l'équation (I.1a) pour expliquer ce fait [3]. Dans la seconde partie de ce travail nous montrons que les restrictions qu'apporte la théorie GL aux équations tirées de l'application de la théorie des phénomènes irréversibles a pour effet de rendre ε_T^n nul également, ce qui supprime toute contradiction apparente entre les deux définitions de ε_T.

Dans la première partie de cet article, nous appliquons la théorie des phénomènes irréversibles au supraconducteur; nous suivons à cet effet la formulation de Stueckelberg des équations de l'hydrodynamique [5] et pour ce qui est de leur application aux supraconducteurs, nous nous servons de l'exposé que nous avons déjà fait dans un précédent travail [6].

Dans la 2e partie, nous introduisons la notion de pseudofonction d'onde ψ due à GL et nous établissons les restrictions qu'impose ce modèle particulier aux équations tout à fait générales établies plus haut. Le fait que les coefficients de l'équation de diffusion pour ψ ont déjà été calculés à partir de la théorie microscopique par Gorkov [7] et certains des auteurs déjà cités [2] nous permet d'exprimer en fonction des grandeurs microscopiques le coefficient phénoménologique caractéristique des phénomènes de nucléation. Dans la dernière partie enfin nous montrons comment les restrictions apportées par la théorie GL aux équations générales déduites de la théorie des phénomènes irréversibles entraîne la disparition des effets thermoélectriques.

1. Application de la théorie des phénomènes irréversibles au modèle des 2 fluides

Lorsque l'on applique la théorie des phénomènes irréversibles à l'hydrodynamique conventionnelle, le système considéré peut être décrit par un ensemble de champs scalaires ou vectoriels, les «variables» thermodynamiques. A chaque variable correspond une équation de continuité invariante relativement au groupe de Galilée. L'une de ces variables est le champ de vitesse $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ de l'élément de fluide auquel correspond l'équation de continuité pour la quantité de mouvement correspondante $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}, t)$. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ est toujours unique, même si le système étudié est un mélange de plusieurs substances. Les vitesses particulières des différentes substances ne constituent pas alors des variables indépendantes mais permettent de définir les divers courants de diffusion en présence.

Dans le modèle des 2 fluides, à côté de $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}, t)$, champ de vitesse des excitations normales analogue à tout point de vue à $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, il existe un deuxième champ $\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x}, t)$ qui décrit le condensat ou superfluide et qui obéit à une équation du mouvement typique d'un fluide parfait: c'est à ce modèle des 2 fluides que nous appliquons dans ce paragraphe la théorie des phénomènes irréversibles dans toute sa généralité.

Le supraconducteur au voisinage de la température critique satisfait à des relations locales entre courants et champs électromagnétiques; de ce fait – par construction pourrait-on dire – il obéit au modèle des deux fluides tel qu'il est présenté ici. Mais il satisfait également à la théorie de Ginzburg-Landau qui apporte à ce modèle quelques restrictions: nous abordons ce problème au paragraphe 2.

Equations de continuité

Le système considéré ici est donc constitué de 2 *fluides*, le fluide normal et le superfluide:

Le *fluide normal*, repéré à l'aide de l'indice 0, est composé de 2 substances chimiques, les ions du réseau cristallin d'une part et les électrons normaux ou excitations normales de l'autre, désignées respectivement à l'aide des indices c et n. Les variables thermodynamiques de ce fluide sont $n_c(\boldsymbol{x}, t)$, $n_n(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{\pi}_0(\boldsymbol{x}, t)$ et $s(\boldsymbol{x}, t)$ qui sont respectivement la densité de ions, la densité d'électrons normaux, la quantité de mouvement de l'élément de fluide et la densité d'entropie. Ces 6 variables obéissent aux 6 équations de continuité correspondantes du fluide normal qui, dans un repère inertial, s'écrivent

$$\partial_t n_c + \partial_k (v_0^k n_c + J_c^k) = 0 , \tag{1.1a}$$

$$\partial_t n_n + \partial_k (v_0^k n_n + J_n^k) = \nu_n \omega \equiv q_n , \tag{1.1b}$$

$$\partial_t \pi_{0i} + \partial_k (v_0^k \pi_{0i}) - (\partial_k \tau_i^k)_0 = f_{0i} + \varkappa_{0i} , \tag{1.1c}$$

$$\partial_t s + \partial_k (v_0^k s + j_e^k) = i \geqslant 0 . \tag{1.1d}$$

Les indices i, j, k etc. repèrent les composantes cartésiennes des divers vecteurs ou tenseurs utilisés. J_c^k et J_n^k sont les courants de conduction des 2 substances présentes et j_e^k le courant de conduction d'entropie. $(\partial_k \tau_i^k)_0$ est la partie normale du terme $\partial_k \tau_i^k$ dont nous verrons qu'il se décompose en 2 termes relatifs à chacun des fluides:

$$\partial_k \tau_i^k = (\partial_k \tau_i^k)_0 + (\partial_k \tau_i^k)_s .$$

Les grandeurs $(\partial_k \tau_i^k)_0$ et $(\partial_k \tau_i^k)_s$ ne sont pas en général de la forme $\partial_k a_i^k$ où a_i^k est un tenseur (voir par exemple (1.9)). q_n décrit la source d'électrons normaux due à la conversion chimique possible d'excitations normales en paires de Cooper, processus symbolisé par l'équation

$$e_s^* \leftrightarrow 2\, e_n^* \tag{1.2}$$

qui exprime la transformation d'une paire de Cooper e_s^* en 2 quasiparticules e_n^* ou vice-versa. En conséquence, les sources d'électrons normaux q_n et de superélectrons q_s sont données par

$$q_n = \nu_n\, \omega \qquad q_s = \nu_s\, \omega$$

où ω est la vitesse de réaction du processus et ν_n et ν_s sont respectivement proportionnels à -2 et $+1$.

Dans l'équation (1.1c), $f_{0\,i} + \varkappa_{0\,i}$ désigne la force totale s'exerçant sur l'élément de volume du fluide. $f_{0\,i}$ représente la force de Lorentz[5])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_0 &\equiv (e_c\, n_c + e_n\, n_n)\, \boldsymbol{E} + [(e_c\, n_c + e_n\, n_n)\, \boldsymbol{v}_0 + e_c\, \boldsymbol{J}_c + e_n\, \boldsymbol{J}_n] \wedge \boldsymbol{B} \\ &\equiv \varrho_0\, \boldsymbol{E} + (\varrho_0\, \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}_n) \wedge \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{1.3}$$

alors que $\varkappa_{0\,i}$ est un terme supplémentaire encore inconnu et destiné à décrire une interaction éventuelle entre les deux fluides. Notons que dans l'équation (1.3) nous avons défini ϱ_0, $\boldsymbol{j}_c$ et $\boldsymbol{j}_n$, respectivement la densité de charge du fluide normal, la densité de courant électrique de conduction due au déplacement des ions et le terme électronique correspondant. e_ν désigne la charge de la particule ν ($\nu = c, n, s$).

Finalement, i est la source d'entropie, définie positive en vertu du 2e principe.

Le *superfluide*, repéré par l'indice s, est caractérisé par les 4 variables thermodynamiques $n_s(\boldsymbol{x}, t)$ et $\boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{x}, t)$; les 4 équations de continuité correspondantes s'écrivent

$$\partial_t \pi_{s\,i} + \partial_k\, (v_s^k\, \pi_{s\,i}) - (\partial_k \tau_i^k)_s = f_{s\,i} + \varkappa_{s\,i} \tag{1.4a}$$

$$\partial_t n_s + \partial_k\, (v_s^k\, n_s + J_s^k) = \nu_s\, \omega \equiv q_s\,. \tag{1.4b}$$

Il n'est pas nécessaire de préciser la signification des grandeurs introduites ici, signification évidente si l'on se réfère aux équations (1.1). Notons cependant les points suivants:

1) $\varkappa_0^i$ et $\varkappa_s^i$ décrivant l'interaction des deux fluides, on a

$$\varkappa_0^i + \varkappa_s^i = 0 \tag{1.5}$$

2) La masse et la charge étant conservées au cours de la réaction (1.2), il vient

$$\nu_n\, M_n + \nu_s\, M_s = 0\,, \tag{1.6a}$$

$$\nu_n\, e_n + \nu_s\, e_s = 0\,, \tag{1.6b}$$

$$M_c\, \boldsymbol{J}_c + M_n\, \boldsymbol{J}_n + M_s\, \boldsymbol{J}_s = 0\,. \tag{1.6c}$$

M_ν désignant la masse de la particule ν.

Notons que par souci de simplification nous négligeons les processus d'échanges entre ions et électrons; en tenir compte ne présenterait pas de difficulté de principe [6].

---

[5]) Toute polarisation tant magnétique qu'électrique est ici exclue.

Mouvement du superfluide

Si l'on fait l'hypothèse de London que le superfluide est un fluide parfait sans frottement, on est conduit à identifier l'équation (1.4a) à l'équation d'Euler[6])

$$\partial_t v_{s\,i} + v_s^k\, \partial_k v_{s\,i} + \frac{1}{M_s}\, \partial_i \mu_s = \frac{e_s}{M_s}\, (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_s \wedge \boldsymbol{B})\,, \tag{1.7}$$

Compte tenu de l'identification

$$\boldsymbol{\pi}_s \equiv n_s\, M_s\, \boldsymbol{v}_s$$

(1.4a) devient

$$M_s\, v_{s\,i}\, (\partial_t n_s + \operatorname{div} \boldsymbol{v}_s\, n_s) + M_s\, n_s\, (\partial_t \boldsymbol{v}_s + (\boldsymbol{v}_s\, \nabla)\, \boldsymbol{v}_s)_i - (\partial_k\, \tau_i^k)_s = \varkappa_{s\,i} + f_{s\,i}$$

ou encore, à l'aide de (1.4b) et de la définition de $f_{s\,i}$:

$$\partial_t v_{s\,i} + v_s^k\, \partial_k v_{s\,i} - \frac{(\partial_k\, \tau_i^k)_s}{M_s\, n_s} = \frac{\varkappa_{s\,i} - M_s\, v_{s\,i}\, (\nu_s\, \omega - \operatorname{div} \boldsymbol{J}_s)}{M_s\, n_s} + \frac{f_{s\,i}}{M_s\, n_s}\,. \tag{1.8}$$

La comparaison de (1.7) et (1.8) conduit aux identifications

$$(\partial_k \tau_i^k)_s \equiv -\, (\partial_i p)_s \equiv -\, n_s\, \partial_i \mu_s\,, \tag{1.9}$$

$$\varkappa_{s\,i} \equiv M_s\, v_{s\,i}\, \nu_s\, \omega\,. \tag{1.10}$$

Dans l'équation (1.10) nous avons fait l'hypothèse supplémentaire que $\boldsymbol{J}_s = 0$, hypothèse qui se vérifiera par la suite. Nous évitons par là des complications sans objet.

Equation pour l'énergie

L'équation de continuité pour l'énergie est une équation de continuité supplémentaire à laquelle doivent satisfaire les différentes variables thermodynamiques; elle doit donc pouvoir se déduire des autres équations de continuité par identification [5]. On pose alors

$$\begin{aligned}
m_\alpha &\equiv M_\alpha\, n_\alpha\ (\alpha = c, n, s) & \boldsymbol{v}_\alpha &= \begin{cases} \boldsymbol{v}_s\ (\alpha = s) \\ \boldsymbol{v}_0\ (\alpha = c, n) \end{cases} \\
m_0 &= M_c\, n_c + M_n\, n_n & h_\alpha &\equiv \frac{\partial h}{\partial n_\alpha} \qquad \mu_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial n_\alpha} \\
h &= u + \sum_\alpha \frac{m_\alpha\, v_\alpha^2}{2} & h_s &\equiv \frac{\partial h}{\partial s} \equiv T \\
w &= n_s \mu_s + n_c \mu_c + n_n \mu_n + T s & h_{Ai} &\equiv \frac{\partial h}{\partial \pi_A^i}\ (A = 0, s)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

h est la densité d'énergie totale, u la densité d'énergie interne, T la température et μ_α les différents potentiels chimiques. w est la densité d'enthalpie; on remarque que la forme de w permet de la décomposer en deux termes relatifs à chacun des deux fluides:

$$\begin{aligned}
w &= w^{(s)} + w^{(0)} \\
w^{(s)} &\equiv n_s\, \mu_s \qquad w^{(0)} = n_c\, \mu_c + n_n\, \mu_n + T s\,.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

[6]) Il est bien connu, et nous l'indiquerons plus bas, que cet Ansatz est une conséquence de la théorie de Ginzburg-Landau dépendant du temps. μ_s est le potentiel chimique des super-électrons: voir équation (1.11).

Dans ces conditions, il vient (voir Appendice)

$$\begin{aligned}\partial_t h = &- \partial_k \left\{\left[\frac{m_s v_s^2}{2} + w^{(s)}\right] v_s^k + \left[\frac{m_0 v_0^2}{2} + w^{(0)}\right] v_0^k \right.\\ &\left. + \mu_c J_c^k + \mu_n J_n^k + T j_e^k - v_{0i} \tau_0^{(f)ik}\right\} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{j}_{\text{total}} + i T\\ &- v_{0ik} \tau_0^{(f)ik} + \boldsymbol{j}_n \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\mu_n}{e_n} + \frac{M_n}{e_n}\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} - (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{B})\right)\\ &+ \boldsymbol{j}_c \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\mu_c}{e_c} + \frac{M_c}{e_c}\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} - (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{B})\right) + \boldsymbol{j}_e \boldsymbol{\nabla} T\\ &+ \left[\left(\mu_s + M_s \frac{(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2}{2}\right) \nu_s + \mu_n \nu_n\right] \omega\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dans cette équation $\tau_0^{(f)ik}$ est défini comme la contribution au tenseur des tensions qui est responsable du frottement:

$$\partial_i \tau_0^{(f)ik} \equiv (\partial_i \tau^{ik})_0 + (\partial^k p)_0 \qquad (\partial^i p)_0 \equiv n_c\, \partial^i \mu_c + n_n\, \partial^i \mu_n + s\, \partial^i T$$

$(\partial^i p)_0$ est la contribution «normale» au gradient de la pression, gradient défini de la façon usuelle

$$\partial_k p \equiv n_s\, \partial_k \mu_s + n_c\, \partial_k \mu_c + n_n\, \partial_k \mu_n + s\, \partial_k T \equiv (\partial_k p)_s + (\partial_k p)_0\,. \tag{1.14}$$

Pour sa part, $\partial_i \tau_0^{(f)ik}$ est bien la divergence d'un tenseur; en effet, à cause de (1.9)

$$(\partial_k \tau^{ik})_s + (\partial^i p)_s = 0\,.$$

Ainsi

$$\partial_k \tau^{ik} + \partial^i p = (\partial_k \tau^{ik})_0 + (\partial_k \tau^{ik})_s + (\partial^i p)_0 + (\partial^i p)_s = \partial_k \tau_0^{(f)ik}\,.$$

Il convient de remarquer que nous n'avons nullement fait l'hypothèse que l'énergie interne u, la pression p et le tenseur des tensions τ_{ik} se décomposent en une somme de termes relatifs à chacun des fluides; cette hypothèse est parfaitement superflue. La décomposition de w et $\boldsymbol{\nabla} p$ ne résulte que de la définition générale de ces grandeurs et ne constitue pas une restriction à la généralité des expressions obtenues.

$\boldsymbol{j}_{\text{total}}$ représente le courant électrique total:

$$\boldsymbol{j}_{\text{total}} \equiv \varrho_s \boldsymbol{v}_s + \varrho_0 \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}_n\,.$$

Il convient encore de remarquer que dans l'équation (1.13) la somme

$$\boldsymbol{j}_n \frac{M_n}{e_n}\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} + \boldsymbol{j}_c \frac{M_c}{e_c}\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}$$

est nulle, comme conséquence de la conservation de la masse. Son introduction est donc arbitraire mais obéit néanmoins à un souci de cohérence interne (voir équations (3.3) et (3.4)).

L'équation (1.13) a la forme d'une équation de continuité pour l'énergie à condition que[7])

$$\begin{aligned} i = \frac{1}{T}\Big\{ & v_{0ik} \tau_0^{(f)ik} + \boldsymbol{j}_n \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \wedge \left(\boldsymbol{B} + \frac{M_n}{e_n} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_0\right)\right.\\ & \left. - \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mu_n}{e_n} + \frac{M_n v_0^2}{2 e_n}\right) - \frac{M_n}{e_n}\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t}\right) - \boldsymbol{j}_e \boldsymbol{\nabla} T\\ & - \left[\left(\mu_s + \frac{M_s}{2}(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2\right) \nu_s + \mu_n \nu_n\right]\omega\Big\}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

---

[7]) L'accélération substantielle $d\boldsymbol{v}_0/dt$ se transforme suivant la formule

$$\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{v}_0^2}{2}\right) - \boldsymbol{v}_0 \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_0\,.$$

Dans l'équation (1.15), nous avons omis le terme proportionnel à $\boldsymbol{j}_c$; l'équation (1.6c) montre que $|\boldsymbol{j}_c|/|\boldsymbol{j}_n| = M_n/M_c < 10^{-5}$. Il faut noter qu'au point de vue expérimental il n'est pas possible de différencier par exemple $\varrho_0 \boldsymbol{v}_0$ et $\varrho_0 \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{j}_c$ qui sont pratiquement confondus.

L'irréversibilité i est dans l'approximation linéaire une forme positive définie dans les courants ou les flux; à cet effet on pose[8]) (le cas isotropique est seul considéré ici):

$$\tau_0^{(f)\,ik} = \overset{\circ}{\tau}{}_0^{(f)\,ik} + \frac{1}{3}\, g^{ik}\, \tau_0^{(f)\,l}{}_l \Big| \; \overset{\circ}{\tau}{}_{0\,ik}^{(f)} = \eta\, \overset{\circ}{v}_{0\,ik} \tag{1.16a}$$

$$v_0^{ik} = \overset{\circ}{v}{}_0^{ik} + \frac{1}{3}\, g^{ik}\, v_{0\,l}^{l} \quad \Big| \; \tau_0^{(f)\,l}{}_l = 3\,\xi\, v_{0\,l}^{l} \tag{1.16b}$$

$$\omega = -\,\zeta \left\{ \left[\mu_s + \frac{M_s}{2}\, (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2 \right] \nu_s + \mu_n\, \nu_n \right\} \tag{1.16c}$$

$$\boldsymbol{j}_n = e_n\, L_{n\,n}\, \tilde{\boldsymbol{E}}_n - e_n\, T\, L_{n\,q}\, \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} \equiv \mathfrak{L}_{n\,n}\, \tilde{\boldsymbol{E}}_n - \mathfrak{L}_{n\,q}\, \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} \tag{1.16d}$$

$$\boldsymbol{j}_q \equiv T\, \boldsymbol{j}_e = -\, T^2\, L_{q\,q}\, \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} + e_n\, T\, L_{q\,n}\, \tilde{\boldsymbol{E}}_n \equiv -\, \mathfrak{L}_{q\,q}\, \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} + \mathfrak{L}_{q\,n}\, \tilde{\boldsymbol{E}}_n\,. \tag{1.16e}$$

La décomposition de $\tau_0^{(f)\,ik}$ et v_0^{ik} est la décomposition usuelle d'un tenseur du 2e ordre en termes irréductibles. Les coefficients phénoménologiques η, ξ, ζ, $\mathfrak{L}_{nn}$, $\mathfrak{L}_{nq}$, $\mathfrak{L}_{qn}$ et $\mathfrak{L}_{qq}$ satisfont aux conditions habituelles propres à rendre la forme i définie positive.

Enfin $\tilde{\boldsymbol{E}}_n$ est défini par

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_n \equiv \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \wedge \left(\boldsymbol{B} + \frac{M_n}{e_n}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}_0 \right) - \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\mu_n}{e_n} + \frac{M_n}{e_n}\, \frac{v_0^2}{2} \right) - \frac{M_n}{e_n}\, \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t}\,. \tag{1.17}$$

Il faut rapprocher de cette expression le vecteur $\tilde{\boldsymbol{E}}$, qui est l'analogue de $\tilde{\boldsymbol{E}}_n$ pour le superfluide et qui s'annule en vertu de l'équation (1.7):

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_s \equiv \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_s \wedge \left(\boldsymbol{B} + \frac{M_s}{e_s}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}_s \right) - \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\mu_s}{e_s} + \frac{M_s}{e_s}\, \frac{v_s^2}{2} \right) - \frac{M_s}{e_s}\, \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} = 0\,. \tag{1.18}$$

A l'équilibre, bien sûr, $\tilde{\boldsymbol{E}}_s$ est nul. L'objet des 2 paragraphes suivants est de montrer que pourvu que l'état soit stationnaire, c'est encore le cas en dehors de l'équilibre. Celui-ci est caractérisé par les équations

$$v_{0\,ik} = 0 \qquad v_{0\,l}^{l} = 0 \tag{1.19a}$$

$$\left[\mu_s + \frac{M_s}{2}\, (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2 \right] \nu_s + \mu_n\, \nu_n = 0 \tag{1.19b}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_n = \tilde{\boldsymbol{E}}_s = 0 \tag{1.19c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} T = 0\,. \tag{1.19d}$$

Un point mérite encore d'être signalé à propos de l'équation de continuité pour l'énergie. Compte tenu de (1.15), celle-ci s'écrit

$$\partial_t h + \partial_k \left\{ \left[\frac{m_s\, v_s^2}{2} + w^{(s)} \right] v_s^k + \left[\frac{m_0\, v_0^2}{2} + w^{(0)} \right] v_0^k \right.$$
$$\left. - \, v_{0\,i}\, \tau_0^{(f)\,ik} + T\, j_e^k + \mu_c\, J_c^k + \mu_n\, J_n^k \right\} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}_{\mathrm{total}}\,.$$

---

[8]) Nous négligeons volontairement les termes d'interférence entre les effets dissipatifs de compression $v_{0\,l}^{l}$ et les processus chimiques.

Il est donc possible de définir un courant de chaleur $T\,\boldsymbol{j}_e$ et un courant d'énergie chimique $\mu_c\,\boldsymbol{J}_c + \mu_n\,\boldsymbol{J}_n$; au contraire, $p^{(s)}$ ni $p^{(0)}$ n'étant séparément définis, il n'est pas possible de décomposer les autres termes comme somme de 2 courants de convection $(m_s\,v_s^2/2 + u^{(s)})\,\boldsymbol{v}_s + (m_0\,v_0^2/2 + u^{(0)})\,\boldsymbol{v}_0$ et d'un courant de travail, $u^{(s)}$ et $u^{(0)}$ résultant de la décomposition hypothétique de la densité d'énergie en 2 contributions relatives à chacun des fluides. Ce fait n'a d'ailleurs rien qui puisse inquiéter; la possibilité d'une décomposition ne constitue en aucune façon une nécessité pour la théorie des phénomènes irréversibles.

2. La théorie de Ginzburg-Landau dépendant du temps

Depuis la formulation de la théorie de Ginzburg-Landau, un certain nombre d'auteurs ont cherché à la généraliser aux processus non stationnaires [2]. Si l'on tient compte des effets dissipatifs qui sont indispensables à notre propos, on peut schématiser les résultats obtenus de la manière suivante:

L'état supraconducteur est caractérisé par l'existence d'une pseudofonction d'onde à valeurs complexes, $\psi(\boldsymbol{x}, t)$, qui à l'équilibre joue le rôle d'un paramètre d'ordre pour la transition de phase état normal – état supraconducteur. Dans le cadre d'un modèle des deux fluides tel que nous l'avons introduit ici, on peut formuler les équations de GL dépendant du temps de la façon suivante:

$$\boldsymbol{j}_s = \frac{e_s}{2\,M_s}\left[\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\,\boldsymbol{\nabla} - e_s\,\boldsymbol{A}\right)\psi + \psi\left(-\frac{\hbar}{i}\,\boldsymbol{\nabla} - e_s\,\boldsymbol{A}\right)\psi^*\right] \tag{2.1a}$$

$$\tilde{\mu}_s = \frac{1}{2\,|\psi|^2}\left[\psi^*\left(-\frac{\hbar}{i}\,\partial_t - e_s\,\phi\right)\psi + \psi\left(\frac{\hbar}{i}\,\partial_t - e_s\,\phi\right)\psi^*\right] \tag{2.1b}$$

$$\gamma\,[-\hbar\,\partial_t - i\,(e_s\,\phi + \tilde{\mu}_s)]\,\psi = \frac{\delta}{\delta\psi^*}\,G[\psi] \tag{2.1c}$$

ϕ est ici le potentiel scalaire du champ électrique; $G[\psi]$ représente le potentiel de Gibbs du système, fonctionnelle de ψ et ψ^*: $\delta G/\delta\psi^*$ symbolise la dérivée fonctionnelle de G relativement à ψ^*. Le coefficient γ est réel et défini dans la littérature [2]. Le second membre de l'équation (2.1c) est écrit sous forme générale, la forme exacte de $G[\psi]$ important peu.

Le lexique qui permet d'interpréter le modèle des deux fluides à l'aide des équations (2.1) est constitué par les équations suivantes:

$$n_s \equiv |\psi|^2\,, \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{v}_s \equiv \frac{\boldsymbol{j}_s}{e_s\,n_s} \tag{2.2b}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = 0 \tag{2.2c}$$

$$\mu_s + \frac{M_s\,v_s^2}{2} \equiv \tilde{\mu}_s\,. \tag{2.2d}$$

L'équation (2.2b) correspond à l'hypothèse que nous avons déjà faite et selon laquelle le supercourant total $\boldsymbol{j}_s$ ne comporte pas de terme de conduction de la forme $e_s\,\boldsymbol{J}_s$. L'équation (2.2c) rend compte du fait que (2.1c) n'est valable que dans un référentiel fixe relativement au fluide normal.

Il faut noter un certain arbitraire dans le choix des équations (2.1) qui ne peuvent se déduire de la théorie microscopique de façon univoque. La présence au premier

membre de l'équation (2.1c) de la somme $(e_s \phi + \tilde{\mu}_s)$ s'explique par des considérations d'invariance de jauge et par la volonté de faire de l'équation de diffusion (2.1c) une équation pour $|\psi|^2$ seulement, alors que (2.1b) est une relation pour ψ où n'intervient que la phase de celle-ci. Le choix même de μ_s plutôt que de μ_n dans les équations (2.1) est également arbitraire dans la mesure où il n'est pas conditionné par la théorie microscopique; on peut le considérer comme une hypothèse supplémentaire qui trouve sa justification dans les conséquences qu'entraîne cet Ansatz.

Notons encore que l'équation (2.2b) comporte parfois dans la littérature d'autres termes encore, soit par exemple la densité de charge totale ϱ_t du supraconducteur. Néanmoins nous préférons éviter d'introduire ϱ_t dont la contribution numérique est de toutes façons peu importante. Quant à l'équation (2.1c), elle est valable pour $T \sim T_c$ alors que pour $T = 0$ ψ satisfait à une équation de type ondulatoire. Dans la région intermédiaire, il n'est pas possible d'écrire pour ψ une équation du mouvement qui soit simple (voir ABRAHAMS et TSUNETO [2]).

Il est reconnu que ce sont les équations (2.1a et b) qui sont essentielles pour la phénoménologie de la supraconductivité; on considère généralement que (2.1c) joue avant tout un rôle dans les processus de relaxation (nucléation, résistance des supraconducteurs de type II due au déplacement des filaments normaux de la structure d'ABRIKOSOV [8]). Nous voulons montrer au paragraphe 3 que *la forme de l'équation (2.1c) est compatible avec l'absence d'effets thermoélectriques dans un supraconducteur.*

Détermination du coefficient de relaxation ζ

A l'équilibre, l'équation pour ψ s'écrit simplement

$$\frac{\delta}{\delta\psi^*} G[\psi] = 0 .$$

C'est l'équation obtenue primitivement par GL qui posèrent explicitement dans ce cas

$$G[\psi] \equiv G_0 + \int dV \left[\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2M_s}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - e_s \boldsymbol{A}\right)\psi\right|^2\right]. \tag{2.3}$$

Or si l'on soumet $G[\psi]$ à une variation $\delta\psi^*$ quelconque, il faut tenir compte de la condition «chimique»

$$e_s\,\delta n_s + e_n\,\delta n_n = 0 .$$

Dans ces conditions

$$\delta G[\psi] \equiv \int dV \left(\left(\mu_s + \frac{M_s \boldsymbol{v}_s^2}{2}\right)\delta n_s + \mu_n \delta n_n\right) = \int dV \left[\nu_s\left(\mu_s + \frac{M_s \boldsymbol{v}_s^2}{2}\right) + \nu_n \mu_n\right]\frac{\delta n_s}{\nu_s} = \int dV \left[\nu_s\left(\mu_s + \frac{M_s \boldsymbol{v}_s^2}{2}\right) + \nu_n \mu_n\right]\frac{\psi}{\nu_s}\,\delta\psi^* .$$

Nous avons fait usage du fait que $G[\psi]$ comprend un terme cinétique qui dans l'équation (2.3) prend la forme $1/2\, M_s\, |(\hbar/i)\,\boldsymbol{\nabla} - e_s\,\boldsymbol{A})\,\psi|^2$; dès lors $\delta/\delta n_s\, G[\psi]$ est égale à $\mu_s + 1/2\, M_s\, \boldsymbol{v}_s^2$ et non à μ_s. (2.1c) peut ainsi se récrire

$$H[\psi] \equiv -\gamma\,(\hbar\,\partial_t + i\,(e_s\,\phi + \tilde{\mu}_s))\,\psi - \left[\nu_s\left(\mu_s + \frac{M_s \boldsymbol{v}_s^2}{2}\right) + \nu_n \mu_n\right]\frac{\psi}{\nu_s} = 0 .$$

Si l'on évalue alors $\psi^*\, H[\psi] + \psi\, H^*[\psi]$, il vient

$$\partial_t n_s = -\frac{2}{\hbar\,\gamma\,\nu_s}\left[\nu_s\left(\mu_s + \frac{M_s \boldsymbol{v}_s^2}{2}\right) + \nu_n \mu_n\right] n_s . \tag{2.4}$$

Par identification avec l'équation de continuité (1.4b) on obtient, la condition (2.2c) étant maintenant supprimée,

$$\nu_s \omega = -\frac{2\,|\psi|^2}{\hbar \gamma \nu_s}\left(\nu_s\left(\mu_s + \frac{M_s\,(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2}{2}\right) + \nu_n \mu_n\right) \tag{2.5}$$

alors que l'équation de continuité pour n_s se décompose elle-même en deux équations séparées[9])

$$\partial_t n_s + (\boldsymbol{v}_0 \nabla)\, n_s = \nu_s \omega \tag{2.6a}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)\, n_s = 0\,. \tag{2.6b}$$

La comparaison avec (1.16c) permet de déterminer le coefficient de relaxation du système

$$\zeta = \frac{2\,|\psi|^2}{\hbar \gamma \nu_s^2}\,. \tag{2.7}$$

D'autre part (2.4) assure que l'*équilibre chimique*

$$\nu_s\left[\mu_s + \frac{M_s\,(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2}{2}\right] + \nu_n \mu_n = 0 \tag{2.8}$$

est conservé dans tout processus stationnaire, même en dehors de l'équilibre.

Il convient de remarquer que l'équation (2.8) est une conséquence particulière de la forme de l'équation de mouvement (2.1c) pour ψ. Si γ était imaginaire pur ((2.1c) serait alors une sorte d'équation de Schroedinger), l'équation de continuité pour $|\psi|^2 \equiv n_s$ ne se décomposerait pas en 2 termes (équation (2.6)) et (2.8) ne serait valable qu'à l'équilibre.

En utilisant les résultats de la théorie microscopique, il est aisé d'exprimer ζ en fonction de T près de la température critique. Si l'on se rappelle que dans un supraconducteur de type I $|\psi|^2$ est pratiquement égal en tout point à

$$|\psi|^2 \cong |\psi_0|^2 \equiv -\frac{\alpha}{\beta} \tag{2.9}$$

il vient

$$\zeta \cong \zeta_0 \equiv \frac{-2\,\alpha}{\hbar \gamma \nu_s^2 \beta}\,. \tag{2.10}$$

Les 3 coefficients α, β et γ peuvent se calculer à partir de la théorie microscopique. Si l'on prend par exemple les valeurs calculées par Schmid [2], il vient

$$\zeta_0 = \frac{56\,\zeta(3)\,N\,\varepsilon_F}{3\,\pi^2\,\hbar\,\nu_s^2}\,\frac{T_c - T}{k\,T_c^2}\,.$$

N est ici la densité à l'équilibre des électrons dans l'état normal, ε_F et T_c sont respectivement l'énergie de Fermi et la température de transition du métal. Enfin k est la constante de Boltzmann et $\zeta(3) = 1{,}202$.

Les équations (2.1c) et (2.4) permettent de définir un temps de relaxation τ_R qui caractérise l'évolution de $|\psi|^2$ vers l'équilibre. On vérifie sans peine que[10])

$$\tau_R = \frac{\hbar \gamma}{-2\,\alpha} = \frac{1}{\zeta\,\nu_s^2\,\beta}\,.$$

---

[9]) Les équations (2.6) ne prennent cette forme simple que si $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = 0$, ce qui n'est strictement vrai qu'à l'équilibre.

[10]) τ_R peut être calculé directement à partir de la théorie microscopique sans faire un appel explicite à la théorie de GL. C'est ce qu'ont fait par exemple Lucas et Stephen [9] ainsi que Woo et Abrahams [10] en considérant les processus de relaxations dus à l'interaction électrons-phonons. Lucas et Stephen donnent d'ailleurs une formule analogue à (2.4).

3. Phénomènes stationnaires; conductivité thermique et effet thermoélectrique

Nous avons vu plus haut que l'équation de diffusion pour $|\psi|^2$ entraîne la décomposition de l'équation de continuité pour n_s en deux équations indépendantes (2.6a) et (2.6b). Il est bien connu que les 2 équations (2.1a) et (2.1b) définissant $\boldsymbol{j}_s$ et $\tilde{\mu}_s$ décomposent l'équation

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_s \equiv \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_s \wedge \left(\boldsymbol{B} + \frac{M_s}{e_s} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_s\right) - \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mu_s}{e_s} + \frac{M_s v_s^2}{2 e_s}\right) - \frac{M_s}{e_s} \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} = 0 \tag{1.18}$$

également en 2 nouvelles équations, les *équations de London*[11]). Si l'on pose en effet $\psi = |\psi| e^{i\alpha}$ et que l'on élimine α entre les 2 équations (2.1a) et (2.1b), il vient

$$\frac{M_s}{e_s} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.1a}$$

$$\frac{M_s}{e_s} \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mu_s}{e_s} + \frac{M_s v_s^2}{2 e_s}\right) - \boldsymbol{E} = 0 \tag{3.1b}$$

(3.1) est évidemment une solution particulière de (1.18).

Dans le cas stationnaire, les équations (3.1), (1.16), (1.17) et (2.8) entraînent

$$\operatorname{rot} \frac{M_s}{e_s} \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.2a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mu_s}{e_s} + \frac{M_s v_s^2}{2 e_s}\right) - \boldsymbol{E} = 0 \tag{3.2b}$$

$$\boldsymbol{j}_n = \mathfrak{L}_{nn} \tilde{\boldsymbol{E}} - \mathfrak{L}_{nq} \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} \tag{3.2c}$$

$$\boldsymbol{j}_q \equiv - \mathfrak{L}_{qq} \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} + \mathfrak{L}_{qn} \tilde{\boldsymbol{E}}_n \tag{3.2d}$$

$$\nu_s \left(\mu_s + \frac{(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2 M_s}{2 e_s}\right) + \nu_n \mu_n = 0 \tag{3.2e}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = 0 \quad \partial_k v_{0i} + \partial_i v_{0k} = 0 . \tag{3.2f}$$

Si l'on exprime $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{B}$ à l'aide de (3.2a), (3.2b), (3.2e) et (1.6), il vient successivement:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{M_s v_s^2}{2 e_s} + \frac{\mu_s}{e_s}\right) - \boldsymbol{v}_0 \wedge \operatorname{rot} \frac{M_s}{e_s} \boldsymbol{v}_s \\
&= \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{M_n v_s^2}{2 e_n} - \frac{M_n}{2 e_n} (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)^2 + \frac{\mu_n}{e_n}\right) - \boldsymbol{v}_0 \wedge \operatorname{rot} \frac{M_n}{e_n} \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{M_n (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0) \boldsymbol{v}_0}{e_n}\right) \\
&\quad - \boldsymbol{v}_0 \wedge \operatorname{rot} \frac{M_n}{e_n} (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{\nabla} \frac{\mu_n}{e_n} + \frac{M_n}{e_n} (\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v}_0 .
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_n = \frac{M_n}{e_n} \left[\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{v}_0 (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)) - \boldsymbol{v}_0 \wedge \operatorname{rot} (\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_0)\right] . \tag{3.3}$$

A l'équilibre, $\tilde{\boldsymbol{E}}_n$ est nul. Comme nous l'avons déjà noté dans *T I*, la classe suivante de champs de vitesses annule $\tilde{\boldsymbol{E}}_n$:

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{\omega}_s \wedge \boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{r} . \tag{3.4}$$

---

[11]) Les équations (3.1) sont équivalentes aux équations de GL. Si nous nous leur donnons le nom de London, c'est à cause de leur similitude formelle avec les véritables équations introduites à l'origine par London [10].

Ici $\boldsymbol{\omega}_s$ et $\boldsymbol{\omega}_0$ sont des vecteurs uniformes et parallèles. Néanmoins (3.4) ne constituerait une solution de l'ensemble des équations caractérisant l'équilibre – parmi lesquelles les équations de Maxwell – que si $e_s = e_n = 0$. De ce fait,

$$\boldsymbol{v}_0 = 0$$

est la seule solution à l'équilibre (il faut noter que nous nous sommes placés dans un référentiel tel que la quantité de mouvement totale du système s'annule, comme le prouve l'équation (1.11)).

Supposons maintenant que l'on soumette à un gradient thermique un supraconducteur dans un état stationnaire tel que $\boldsymbol{v}_0$ soit nul. L'équilibre chimique étant conservé, l'expression (3.3) est encore valable et de ce fait $\tilde{\boldsymbol{E}}_n$ s'annule comme à l'équilibre. Les équations (3.2c) et (3.2d) s'écrivent alors

$$\boldsymbol{j}_n = -\mathcal{L}_{nq} \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} \tag{3.5a}$$

$$\boldsymbol{j}_q = -\mathcal{L}_{qq} \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} . \tag{3.5b}$$

Pour déterminer la conductivité thermique $\varkappa$, on mesure $\boldsymbol{j}_q$ à courant total nul. L'existence du gradient thermique donne naissance à un courant normal $\boldsymbol{j}_n$ qui doit être compensé par un supercourant $e_s\, n_s\, \boldsymbol{v}_s$; mais l'absence d'échanges chimiques empêche les deux courants de s'annihiler mutuellement à l'intérieur du supraconducteur: ce sont les conditions aux limites qui assurent que le courant total s'annule. La relation (3.5b) n'en est pas pour autant modifiée et l'on retrouve bien le résultat de Luttinger

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}_{qq}}{T} . \tag{3.6}$$

Par ailleurs, il vient également

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_n \equiv \boldsymbol{E} - \operatorname{grad} \frac{\mu_n}{e_n} = 0$$

ce qui montre bien que les 2 pouvoirs thermoélectriques ε_T^s et ε_T^n définis par l'équation (I.1) sont nuls

$$\varepsilon_T^s = -\frac{1}{\Delta T} \int_a^b d\boldsymbol{x}\, \tilde{\boldsymbol{E}}_s = 0 ,$$

$$\varepsilon_T^n = -\frac{1}{\Delta T} \int_a^b d\boldsymbol{x}\, \tilde{\boldsymbol{E}}_n = 0 . \tag{3.7}$$

Il convient de noter que les relations (3.6) et (3.7) sont valables en présence de champs électromagnétiques et que l'emploi des équations de GL suggère leur validité également pour des dimensions très faibles. Enfin, comme les résultats de TI le suggèrent, ces relations sont encore valables pour un système en rotation uniforme à condition que le système reste stationnaire.

Avant de conclure, il vaut la peine de se demander quelle est la répartition des courants dans un système stationnaire soumis seulement à un gradient de température.

A l'équation de London (3.2a) s'ajoute la relation d'Ampère[12])

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \boldsymbol{j}_{\text{total}} \equiv n_s\, e_s\, \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{j}_n .$$

[12]) μ_0 est la permittivité du vide.

Dans l'approximation linéaire, $\boldsymbol{j}_n$ est irrotationnel. Par conséquent la combinaison de ces deux équations conduit à

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{M_s}{e_s^2\, n_s\, \mu_0}\, \boldsymbol{j}_{\text{total}} + \boldsymbol{j}_{\text{total}} = 0\,.$$

Dans l'approximation de London

$$\frac{M_s}{e_s^2\, n_s\, \mu_0} \equiv \delta^2 = c\,t\,e$$

on retrouve ainsi les équations bien connues qui décrivent l'effet Meissner

$$\Delta \boldsymbol{j}_{\text{total}} = \delta^{-2}\, \boldsymbol{j}_{\text{total}}\,, \tag{3.8a}$$

$$\Delta \boldsymbol{B} = \delta^{-2}\, \boldsymbol{B}\,. \tag{3.8b}$$

L'équation (3.8a) doit être résolue avec la condition aux limites suivante: $\boldsymbol{j}_{\text{total}} \perp$ est nul sur toute la surface extérieure du système. Si celui-ci est simplement connexe, la seule solution de (3.8a) est la solution triviale[13])

$$\boldsymbol{j}_{\text{total}} = 0\,. \tag{3.9}$$

Dans cette approximation, il y a donc découplage complet entre phénomènes thermiques et électriques, ce qui correspond bien à l'absence de pouvoir thermoélectrique.

En conclusion, l'auteur tient à remercier le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour son aide financière.

Appendice: l'équation de continuité pour l'énergie

Si l'on s'en tient aux notations (1.11), il vient, compte tenu des équations (1.1) et (1.4)

$$\begin{aligned}
\partial_t h \equiv{} & \sum_\alpha h_\alpha\, \partial_t n_\alpha + h_s\, \partial_t s + \sum_A h_{Ai}\, \partial_t\, \pi_A^i \\
= {} & -\sum_\alpha h_\alpha\, \partial_k (v_\alpha^k\, n_\alpha) - \sum_\alpha h_\alpha\, \partial_k J_\alpha^k + \sum_\alpha h_\alpha\, \nu_\alpha\, \omega - h_s\, \partial_k (v_0^k\, s) \\
& - h_s\, \partial_k j_e^k + h_s\, i - \sum_A h_{Ai}\, \partial_k\, (v_A^k\, \pi_A^i) + \sum_A h_{Ai}\, (\partial_k \tau^{ki})_A \\
& + \sum_A h_{Ai}\, [\varkappa_A^i + f_A^i] = -\,\partial_k \Big[\sum_A h_{Ai}\, \pi_A^i\, v_A^k + \sum_\alpha h_\alpha\, n_\alpha\, v_\alpha^k + h_s\, s\, v_0^k \\
& + \sum_\alpha h_\alpha\, J_\alpha^k + h_s\, j_e^k\Big] + \sum_\alpha v_\alpha^k\, n_\alpha\, \partial_k h_\alpha + \sum_A v_A^k\, \pi_A^i\, \partial_k h_{Ai} \\
& + v_0^k\, s\, \partial_k h_s + \sum_\alpha J_\alpha^k\, \partial_k h_\alpha + j_e^k\, \partial_k h_s + \sum_A h_{Ai}\, (\partial_k \tau^{ik})_A + \sum_\alpha h_\alpha\, \nu_\alpha\, \omega \\
& + h_s\, i + \sum_A h_{Ai}\, (f_A^i + \varkappa_A^i) = -\,\partial_k \Big[\sum_A \frac{\pi_A^2\, v_A^k}{2\, m_A} + \sum_\alpha \mu_\alpha\, n_\alpha\, v_\alpha^k \\
& + v_0^k\, T s + \sum_\alpha \mu_\alpha\, J_\alpha^k + T\, j_e^k\Big] + \sum_\alpha v_\alpha^k\, n_\alpha\, \partial_k \mu_\alpha + v_0^k\, s\, \partial_k T \\
& + \sum_\alpha J_\alpha^k \Big[\partial_k \mu_\alpha + M_\alpha\, \frac{dv_{0k}}{dt}\Big] + j_e^k\, \partial_k T + \sum_\alpha h_\alpha\, \nu_\alpha\, \omega \\
& + i\, T + \sum_A v_{Ai}\, [f_A^i + \varkappa_A^i] + \sum_A v_{Ai}\, (\partial_k \tau^{ik})_A\,.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

---

[13]) Il va sans dire que le champ $\boldsymbol{B}$ doit également s'annuler à l'infini, ce qui correspond à une condition aux limites supplémentaire.

Nous avons fait usage de la définition suivante:

$$m_0 \equiv n_c M_c + n_n M_n$$

ainsi que des égalités

$$h_\alpha = \frac{\partial}{\partial n_\alpha}\left(\frac{\pi_\alpha^2}{2\, m_\alpha}\right) + \mu_\alpha = -\frac{M_\alpha v_\alpha^2}{2} + \mu_\alpha \qquad \text{a)}$$

$$\sum_\alpha h_\alpha J_\alpha^k = h_c J_c^k + h_n J_n^k = -\frac{v_0^2}{2}(M_c J_c^l + M_n J_n^k) + \sum_\alpha \mu_\alpha J_\alpha^k = \mu_c J_c^k + \mu_n J_n^k \qquad \text{b)}$$

$$\sum_\alpha n_\alpha \partial_k h_\alpha + \sum_\alpha \pi_A^i \partial_k h_{Ai} = -\sum_\alpha M_\alpha n_\alpha \partial_k \frac{v_\alpha^2}{2}$$
$$+ \sum_\alpha M_\alpha n_\alpha v_\alpha^i \partial_k v_{\alpha i} + \sum_A n_\alpha \partial_k \mu_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha \partial_k \mu_\alpha \qquad \text{c)}$$

$$h_{0i}\pi_0^i + h_c n_c + h_n n_n = v_{0i}\pi_0^i - \left(\frac{M_n n_n}{2} + \frac{M_c n_c}{2}\right) v_0^2 + \mu_n n_n$$
$$+ \mu_c n_c = \frac{m_0 v_0^2}{2} + \mu_n n_n + \mu_c n_c \qquad \text{d)}$$

$$\sum_\alpha J_\alpha^k \partial_k \mu_\alpha = \sum_\alpha J_\alpha^k \left(\partial_k \mu_\alpha + M_\alpha \frac{d\, v_{0k}}{dt}\right). \qquad \text{e)}$$

Dans la première égalité,

$$\boldsymbol{v}_\alpha \equiv \begin{cases} \boldsymbol{v}_s & \text{si } \alpha = s \\ \boldsymbol{v}_0 & \text{si } \alpha = c, n \end{cases}$$

Dans les égalités b), d) et e), il a été fait usage des équations (1.6), conséquences de la conservation de la masse.

Si l'on pose

$$w = w^{(s)} + w^{(0)} \text{ et } \partial_k p = (\partial_k p)_s + (\partial_k p)_0$$

w étant la densité d'enthalpie et p la pression du système, avec

$$w^{(s)} \equiv n_s \mu_s \qquad w^{(0)} = n_c \mu_c + n_n \mu_n + T s$$
$$(\partial_k p)_s \equiv n_s \partial_k T \qquad (\partial_k p)_0 = n_c \partial_k \mu_c + n_n \partial_k \mu_n + s\, \partial_k T$$

l'équation (A.1) se transforme suivant

$$\partial_t h = -\partial_k \left[\left(\frac{m_s v_s^2}{2} + w^{(s)}\right) v_s^k + \left(\frac{m_0 v_0^2}{2} + w^{(0)}\right) v_0^k + \mu_c J_c^k + \mu_n J_n^k\right.$$
$$\left. + T j_e^k\right] + v_s^k (\partial_k p)_s + v_0^k (\partial_k p)_0 + j_n^k \left[\frac{\partial_k \mu_n}{e_n} + \frac{M_n}{e_n}\frac{dv_{0k}}{dt}\right] + j_e^k \partial_k T$$
$$+ \left(\mu_s \nu_s + \mu_n \nu_n - \frac{M_s v_s^2 \nu_s}{2} - \frac{M_n v_0^2 \nu_n}{2}\right)\omega + i\, T + v_{si} M_s v_s^i \nu_s \omega$$
$$- v_{0i} M_s v_s^i \nu_s \omega + v_{si}(e_s n_s E^i + e_s n_s (\boldsymbol{v}_s \wedge \boldsymbol{B})^i) + v_{0i} \varrho_0 E^i$$
$$+ v_{0i}[(\varrho_0 \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}_n) \wedge \boldsymbol{B}]^i - v_{si}(\partial^i p)_s + v_{0i}(\partial_k \tau^{ik})_0 .$$

On pose alors

$$(\partial_k \tau^{ik})_0 + (\partial^i p)_0 = \partial_k \tau_0^{(f)\,ik}$$

où $\tau_0^{(f)\,ik}$ est la contribution de τ^{ik} responsable de la dissipation[14]; on obtient alors sans autre l'équation (1.13).

---

[14]) Pour ce qui est de l'existence d'un tenseur $\tau_0^{(f)\,ik}$, voir page 215.

Bibliographie

[1] V. L. Ginzburg et L. D. Landau, Zh. eksp. teor. Fiz. *20*, 1064 (1950).
[2] P. W. Anderson et A. H. Dayem, Phys. Rev. Lett. *13*, 195 (1964); M. J. Stephen et H. Suhl, Phys. Rev. Lett. *13*, 797 (1964); P. W. Anderson, N. R. Werthamer et J. M. Luttinger, Phys. Rev. *138*, A1157 (1965); J. Rüfenacht, Phys. Lett. *15*, 298 (1965); E. Jakeman et E. R. Pike, Phys. Lett. *20*, 593 (1966); E. Abrahams et T. Tsuneto, Phys. Rev. *152*, 416 (1966); A. Schmid, Phys. kondens. Mat. *5*, 302 (1966).
[3] J. M. Luttinger, Phys. Rev. *136*, A1481 (1964).
[4] D. Shoenberg, *Superconductivity* (Cambridge University Press 1952).
[5] E. C. G. Stueckelberg de Breidenbach, Helv. phys. Acta *36*, 875 (1963).
[6] F. Rothen, Helv. phys. Acta *41*, 591 (1968).
[7] L. P. Gorkov, Sov. Phys. JETP *9*, 1364 (1959).
[8] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP *5*, 1174 (1957).
[9] G. Lucas et M. J. Stephen, Phys. Rev. *154*, 349 (1967).
[10] J. W. F. Woo et E. Abrahams, Phys. Rev. *169*, 407 (1968).
[11] F. London, *Superfluids* (John Wiley & Sons 1950), vol. 1.