Comparaison entre les diverses notions de résonances

Autor(en): **Helffer, Bernard / Martinez, André**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **60 (1987)**

Heft 8

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-115882

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Helvetica Physica Acta, Vol. 60 (1987) 992–1003 0018–0238/87/080992–12$1.50 + 0.20/0
© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

Comparaison entre les diverses notions de résonances

Par Bernard Helffer

Université de Nantes, Département de Mathématiques, 2, Chemin de la Houssinière, F-44072 Nantes, France

Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Pures, F-91128 Palaiseau Cedex, France

et André Martinez

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex, France

(9. II 1987)

0. Introduction

La théorie des résonances pour l'opérateur de Schrödinger $P(h) = -h^2\Delta + V$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est développée dans un grand nombre d'articles (cf. $[\mathrm{Sim}]_2$ pour un survey). Les premières définitions mathématiques des résonances (dans un cadre non réduit à la dimension 1) furent probablement données par Lax et Phillips [La–Ph], Vainberg [Va], et (dans un cadre encore moins restrictif) par Aguilar et Combes [Ag–Co]. Cette dernière définition, qui a donné lieu à de nombreux développements (cf. Balslev–Combes [Ba–Co], Cycon [Cy], Hunziker [Hu], Simon $[\mathrm{Sim}]_3, \ldots$) s'appuie sur les techniques de dilatations analytiques, dans des versions de plus en plus générales appelées distorsions analytiques.

Dans [Hu], W. Hunziker analyse ces différentes techniques pour construire des prolongements méromorphes des éléments matriciels de la résolvante:

$$((P-z)^{-1}\varphi \mid \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

partant de $\operatorname{Im} z > 0$, où φ et ψ appartiennent à un ensemble $\mathscr{A}$ dense dans L^2, sur lequel la dilatation (ou la distorsion) analytique opère. Il montre ensuite comment vérifier l'indépendance par rapport à $\mathscr{A}$ de la notion de résonance, vue comme pôle d'un des éléments matriciels.

Dans [He–Sj], B. Helffer et J. Sjöstrand proposent, pour étudier les résonances de forme dans le cadre semi-classique, une autre définition plus microlocale: ils montrent que sous des hypothèses convenables, l'hamiltonien est un opérateur de Fredholm dans des espaces de Sobolev adaptés. Les résonances sont alors les points z de $\mathbb{C}$ pour lesquels $P(h) - z$ n'est pas bijectif dans ces

espaces de Sobolev. Ceci leur permet de traiter des problèmes typiques associés aux résonances comme le "puits dans une île", etc... (Voir aussi [Ge–Sj] et $[\mathrm{Sj}]_2$). Simultanément (cf. [C–D–K–S]) ou ultérieurement (cf. [Br–Co–Du], [Hi–Si]), des auteurs étudient le même type de problèmes avec des techniques relevant de la dilatation analytique. La question naturelle était de démontrer (ce dont personne ne doutait vraiment) que lorsque les deux techniques s'appliquent (potentiels réguliers, dilatables analytiquement), les deux définitions de résonances coïncident. C'est l'objet de cet article qui s'appuie très fortement sur le travail de Hunziker [Hu].

Au §.1, nous rappelons la définition de Helffer–Sjöstrand, et, au §.2, celle de Hunziker. Le §.1 contient aussi quelques développements préliminaires.

Au §.3, nous démontrons l'équivalence souhaitée, en considérant le point de vue "pôles de la résolvante". (Nous ne rediscutons pas de l'équivalence entre la définition de Hunziker et celles de [C–D–K–S] et [Hi–Si] qui est plus connue).

Le §.4 est consacré à l'étude des fonctions résonnantes: nous montrons qu'elles correspondent dans les deux théories, ce qui permet aussi de faire le lien avec une définition donnée par Ashbaugh et Harrell [As–Ha] dans le cas de la dimension 1 et d'un potentiel à support compact.

Nous tenons à remercier Ph. Briet qui nous a transmis l'article de Hunziker, et également P. Hislop, I. Sigal, J.-M. Combes et J. Sjöstrand avec qui nous avons eu l'occasion de discuter de ces questions.

1. Les résonances de B. Helffer et J. Sjöstrand

Soit $P(h) = -h^2\Delta + V$ l'opérateur de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, avec $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ vérifiant:

Il existe $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $M > 0$ t.q. V s'étend analytiquement près du domaine $D \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n; |\mathrm{Re}\, z| \geqq M,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqq \varepsilon_0 |\mathrm{Re}\, z|\}$ (1.1)

et y vérifie: $\lim\limits_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in D}} V(z) = 0$.

Soit $E_0 > 0$. On s'intéresse aux résonances $E(h)$ de $P(h)$ proches de E_0. Rappelons tout d'abord la définition de [He–Sj] dans cette situation. Soient

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \chi(\xi) = 1 \quad \text{dans un voisinage de } \{\xi^2 = E_0\}; \tag{1.2}$$

$$\tilde{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \tilde{\chi}(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \{|x| \geqq 3M\},\ \tilde{\chi}(x) = 1 \quad \text{dans} \quad \{|x| \geqq 4M\}; \tag{1.2'}$$

$$G(x, \xi) = \tilde{\chi}(x)\chi(\xi)(x \cdot \xi) \quad \text{pour} \quad (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}. \tag{1.3}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leqq t_0$ ($t_0 > 0$ assez petit), on introduit la famille de variétés

I-lagrangiennes (indicée par t):

$$\Lambda_{tG} = \left\{ \alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{C}^{2n}; \operatorname{Im} \alpha_\xi = -t \frac{\partial G}{\partial x} (\operatorname{Re} \alpha_x, \operatorname{Re} \alpha_\xi), \right.$$

$$\left. \operatorname{Im} \alpha_x = t \frac{\partial G}{\partial \xi} (\operatorname{Re} \alpha_x, \operatorname{Re} \alpha_\xi) \right\}. \tag{1.4}$$

La famille de poids (r, R) (cf. [He–Sj], §.1) utilisée ici est:

$$r(x) = 1, \qquad R(x) = \langle x \rangle \overset{\text{def}}{=} (1 + |x|^2)^{1/2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

On a alors $\tilde{r}(x, \xi) = \langle \xi \rangle$, et une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$ est une fonction m vérifiant:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta m(x, \xi)| \leqq C_{\alpha\beta} m(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \langle x \rangle^{-|\alpha|}. \tag{1.6}$$

Si m est une fonction d'ordre, la classe des symboles $S(m)$ est définie par:

$$a \in S(m) \Leftrightarrow |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leqq C_{\alpha\beta} m(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \langle x \rangle^{-|\alpha|} \ (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n). \tag{1.7}$$

Les espaces de Sobolev sur lesquels $P(h)$ va opérer sont définis à l'aide d'une transformation de F.B.I. de la manière suivante.

La phase de cette transformation est donnée par:

$$\Phi(x, \alpha) = (\alpha_x - x)\alpha_\xi + i \frac{\langle \alpha_\xi \rangle}{\langle \alpha_x \rangle} (x - \alpha_x)^2 \tag{1.8}$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}^{2n}$ (ou plus spécialement $\alpha \in \Lambda_{tG}$).

Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de F.B.I. de u par:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^{2n}, \qquad (Tu)(\alpha) = \int e^{i\Phi(x,\alpha)/h} t(x, \alpha, h) \chi_1\left(\frac{x - \operatorname{Re} \alpha_x}{\langle \alpha_x \rangle}\right) u(x)\, dx \tag{1.9}$$

où χ_1 est une fonction de troncature t.q. $\chi_1 \in C_0^\infty(|x| \leqq 1/C_0)$, $\chi_1 = 1$ dans $|x| \leqq 1/2C_0$ ($C_0 > 0$ assez grand), et où $t(x, \alpha, h)$ est un $(n+1)$-vecteur de symboles dans $S(h^{-3n/4} \langle \alpha_\xi \rangle^{n/4} / \langle \alpha_x \rangle^{n/4})$ (pour $|x - \operatorname{Re} \alpha_x| \leqq (1/C_0) \langle \alpha_x \rangle$), affine-linéaire en x, tel que $\det(t, \partial t/\partial x_1, \ldots, \partial t/\partial x_n)$ soit elliptique (on peut prendre par exemple $t = h^{-3n/4} \langle \alpha_\xi \rangle^{n/4} \times \langle \alpha_x \rangle^{-n/4} (1, x_1/\langle \alpha_x \rangle, \ldots, x_n/\langle \alpha_x \rangle)$).

Notons tout d'abord que sous les hypothèses (1.1), (1.2) et (1.2′), la fonction $G(x, \xi)$ est une fonction fuite pour $P(h)$ au sens de [He–Sj], §.8. En effet, on vérifie en utilisant les inégalités de Cauchy que sur la surface d'énergie $\xi^2 + V(x) = E_0$, on a

$$H_p G = 2E_0 - 2V(x) - x \cdot \nabla V(x) \geqq E_0 \text{ pour } |x| \text{ assez grand.} \tag{1.10}$$

D'autre part, G vérifie les bonnes estimations, en particulier:

$$|\nabla_x G| = |\tilde{\chi}(x)\chi(\xi)\xi + (\nabla \tilde{\chi}(x))\chi(\xi)(x \cdot \xi)| \leqq C$$

$$|\nabla_\xi G| = |(\chi(\xi)x + (x \cdot \xi)\nabla\chi(\xi))\tilde{\chi}(x)| \leqq C\langle x \rangle.$$

Toutes les conditions sont donc réunies pour définir les résonances de $P(h)$ (dont le symbole est bien dans la classe $S(\tilde{r}^2)$) au voisinage de E_0, dans les espaces de Sobolev $H(\Lambda_{tG})(t>0)$.

Rappelons d'abord que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $m = m(x)$ est une fonction d'ordre, on a, pour $N \geqq 0$:

$$H(\Lambda_f, m(x)\langle\xi\rangle^N) = \left\{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n);\ \sum_{|\alpha|\leqq N} \|(hD_x)^\alpha(me^{-f/h}u)\|_{L^2} < \infty\right\}.$$

C_0^∞ est alors dense dans cet espace, et on construit par dualité dans $\mathscr{D}'$:

$$H(\Lambda_f, m(x)\langle\xi\rangle^{-N}) \text{ est le dual de } H\left(\Lambda_{-f}, \frac{1}{m}\langle\xi\rangle^N\right).$$

Pour la suite, il nous suffira d'utiliser l'espace:

$$\tilde{H}_\varepsilon^{-N} = H(\Lambda_{\varepsilon\langle x\rangle}, \langle x\rangle^{-N}\langle\xi\rangle^{-N}). \tag{1.11}$$

La variété Λ_{tG} étant lagrangienne pour $\operatorname{Im}(d\alpha_\xi \wedge d\alpha_x)$, on y introduit une primitive de la 1-forme fermée $-\operatorname{Im}(\alpha_\xi d\alpha_x)$ par (cf. [He–Sj] formule (2.2)):

$$H_t(\alpha) = -\operatorname{Re}\alpha_\xi \cdot \operatorname{Im}\alpha_x + tG(\operatorname{Re}\alpha_x, \operatorname{Re}\alpha_\xi)$$

et un calcul simple montre alors que:

$$H_t(\alpha) = -t(\operatorname{Re}\alpha_x \cdot \operatorname{Re}\alpha_\xi)\cdot(\operatorname{Re}\alpha_\xi \cdot \nabla\chi(\operatorname{Re}\alpha_\xi))\tilde{\chi}(x) \overset{\text{déf}}{=} tH(\alpha). \tag{1.12}$$

Réécrivons maintenant la Définition 5.4 de [He–Sj] dans notre cas particulier:

Définition 1.1. Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$, et $N \geqq 0$ tel que $\langle x\rangle^{-N}\langle\xi\rangle^{-N} \leqq Cm(x, \xi)$, $\forall(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ (avec $C \geqq 0$).

Soit aussi $\varepsilon > 0$ assez petit. Alors, pour $|t| \leqq t_0$ on définit l'espace $H(\Lambda_{tG}, m)$ comme étant l'ensemble des u dans $\tilde{H}_\varepsilon^{-N}(\mathbb{R}^n)$ tels que:

$$\int_{\Lambda_{tG}} |Tu(\alpha, h)|^2 (m(\operatorname{Re}\alpha))^2 e^{-2tH(\alpha)/h}\, d\alpha < +\infty. \tag{1.13}$$

(Ici, $d\alpha$ est la mesure canonique sur Λ_{tG} qui est $\mathbb{R}$-symplectique, mais en paramétrant Λ_{tG} par $\operatorname{Re}\alpha$, on ne modifie pas la définition en remplaçant $d\alpha$ par $d\operatorname{Re}\alpha$).

Pour $z \in \mathbb{C}$, proche de E_0, $P(h) - z$ peut alors être considéré comme un opérateur continu de $H(\Lambda_{tG}, 1)$ dans $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$, qui est une bijection pour z en dehors d'un ensemble discret où c'est un opérateur de Fredholm d'indice 0 (cf. Théorème 8.3 de [He–Sj]).

On pose la définition suivante des résonances:

Définition 1.2. Soit $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C};\ |\operatorname{Re} z - E_0| < 1/C_1,\ -t/C_1 < \operatorname{Im} z < T_0\}$ où on a choisi $C_1 > 0$ assez grand et $T_0 > 0$ assez petit.

Alors, pour $t_0 > 0$ assez petit, et $t \in]0, t_0]$, on définit l'ensemble des résonances $\Gamma^1(h)$ de $P(h)$ dans $\Omega_t(h)$ pour h assez petit ($h \in]0, h_t]$ où $h_t > 0$ dépend de t) par:

$$E \in \Gamma^1(h) \Leftrightarrow P(h) - E : H(\Lambda_{tG}, 1) \to H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2}) \text{ n'est pas une bijection.} \tag{1.14}$$

On a aussi une définition équivalente à partir des pôles de la résolvante:

Définition 1.2 bis. Soit $E \in]-1/C_1 + E_0, E_0 + 1/C_1[+ i\,]-t_0/C_1, T_0[$. Alors, $E \in \Gamma^1(h)$ ssi il existe $t > 0$ avec $h \leqq h_t$ tel que pour tout contour γ_E assez petit entourant E et situé dans Ω_t, il existe $u_1 \in H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$ et $u_2 \in H(\Lambda_{-tG}, 1)$ tels que:

$$\int_{\gamma_E} \langle (P_t - z)^{-1} u_1, u_2 \rangle_t \, dz \neq 0, \tag{1.15}$$

où P_t désigne l'opérateur $P(h)$ opérant de $H(\Lambda_{tG}, 1)$ dans $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$ et où $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_t$ est le crochet de dualité entre $H(\Lambda_{tG}, 1)$ et $H(\Lambda_{-tG}, 1)$ (comme défini dans la proposition 8.8 de [He–Sj]).

L'équivalence des définitions ne pose pas de problème particulier: si E vérifie (1.14), E étant isolée on peut trouver γ_E dans Ω_t entourant E, et tel que $\Gamma^1(h) \backslash E$ soit à l'extérieur de γ_E. Alors, pour $u_1 \in \operatorname{Ker}(P_t - E) \subset H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$, et $u_2 \in H(\Lambda_{-tG}, 1)$ tels que $\langle u_1, u_2 \rangle \neq 0$, on obtient (1.15). Inversement, supposons la propriété (1.15) satisfaite; alors, si $E \notin \Gamma^1(h)$, $\langle (P_t - z)^{-1} u_1, u_2 \rangle_t$ serait holomorphe dans un voisinage de l'intérieur du contour γ_E, pour tout γ_E assez près de E et tout (u_1, u_2) dans $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2}) \times H(\Lambda_{tG}, 1)$. ■

Remarque 1.3. On peut affaiblir la Définition 1.2 bis en y remplaçant les espaces $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$ et $H(\Lambda_{tG}, 1)$ par des ensembles $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ qui sont respectivement denses dans $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$ et $H(\Lambda_{tG}, 1)$.

Remarque 1.4. Soient $t_0 > 0$ et $h_0 > 0$ assez petits, ainsi que $\mathscr{A}_1 \subset \bigcap_{|t| \leqq t_0} H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$ et $\mathscr{A}_2 \subset \bigcap_{|t| \leqq t_0} H(\Lambda_{tG}, 1)$ des ensembles denses dans chacun des $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^{-2})$ (resp. $H(\Lambda_{tG}, 1)$) (par exemple $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$). Alors, pour $(u_1, u_2) \in \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$, on a:

$$\text{L'application } \left]E_0 - \frac{1}{C_1}, E_0 + \frac{1}{C_1}\right[+ i \left]\frac{T_0}{2}, T_0\right[\ni z \to \langle (P_t - z)^{-1} u_1, u_2 \rangle$$

$$\text{est une fonction holomorphe, indépendante de } t \in [-t_0, t_0], \tag{1.16}$$

et pour tout $h \in]0, h_0]$.

En effet, on remarque d'abord que pour $\operatorname{Im} z \in]T_0/2, T_0[$, et $t \in [-t_0, t_0]$, le symbole $(p\,|_{\Lambda_{tG}} - z)^{-1}$ (où $p(x, \xi) \overset{\text{déf}}{=} \xi^2 + V(x)$) est bien défini partout sur Λ_{tG}, ce qui permet par le calcul pseudodifférentiel (comme dans la démonstration du Théorème 8.3 de [He–Sj]) de construire $(P_t - z)^{-1}$ et d'assurer l'holomorphie de l'application (1.16).

L'indépendance par rapport à t provient du résultat de régularité suivant:

$$\text{Si} \quad \operatorname{Im} z > \frac{T_0}{2},\ u \in H(\Lambda_{tG}, 1), \quad \text{et} \quad (P-z)u \in \bigcap_{|s| \leqq t_0} H(\Lambda_{sG}, \tilde{r}^{-2}),$$

$$\text{alors } u \in \bigcap_{|s| \leqq t_0} H(\Lambda_{sG}, 1) \text{ dès que } h \leqq h_0. \tag{1.17}$$

La démonstration se fait comme celle du Théorème 8.5 de [He–Sj], mais, compte tenu de l'ellipticité uniforme de $P|_{\Lambda_{tG}} - z$ pour $\operatorname{Im} z > T_0/2$, $|t| \leqq t_0$, on n'a pas de restriction sur t. Ceci termine la démonstration de (1.16).

On aura enfin besoin d'un deuxième résultat de régularité qui se démontre comme précédemment, et qui est l'analogue pour $t \neq 0$ de la théorie classique des opérateurs h-admissibles sur $\mathbb{R}^n$ (cf. [He–Ro]).

$$\text{Si} \quad \operatorname{Im} z > \frac{T_0}{2}, \quad \text{alors:}$$

$$\left.\begin{array}{l} u \in H(\Lambda_{tG}, 1) \\ (P-z)u \in H(\Lambda_{tG}, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^2). \tag{1.18}$$

La conséquence est que si $u_1, u_2 \in \bigcap_{|t| \leqq t_0} H(\Lambda_{tG}, 1)$, alors pour $|t| \leqq t_0$:

$$\langle (P_t - z)^{-1} u_1, u_2 \rangle_t = \langle (P-z)^{-1} u_1, u_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.19}$$

où $(P-z)^{-1}$ est la résolvante de l'opérateur auto-adjoint P de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Les résonances de J. Aguilar et J.-M. Combes d'après W. Hunziker

On s'inspire ici de l'article [Hu] où W. Hunziker définit les résonances à l'aide de "distorsions analytiques" de la manière suivante:

Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ vérifiant:

$$\begin{array}{l} |v(x) - v(y)| \leqq |x-y| \text{ pour tout } (x, y),\ v(x) = x \text{ dans} \\ \{|x| \geqq 3M\}, \text{ et } v(x) = 0 \text{ dans } \{|x| \leqq 2M\}. \end{array} \tag{2.1}$$

Pour φ holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \varepsilon_1$ (avec $\varepsilon_1 > 0$ assez petit), on introduit l'opérateur U_λ défini par:

$$(U_\lambda \varphi)(x) = \varphi_\lambda(x) \overset{\text{déf}}{=} J(x, \lambda)^{1/2} \varphi(x + \lambda v(x)) \tag{2.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $J(x, \lambda) = \det(\delta_{ij} + \lambda\, \partial v_i / \partial x_j)_{i,j}$, les v_i étant les composantes de v. (Pour λ réel, il est clair que U_λ se prolonge en un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$).

Hunziker présente deux définitions des résonances, dont il démontre l'équivalence dans son Théorème 4. (En fait, Hunziker se restreint au cas de potentiels coulombiens, mais ses méthodes se généralisent sans problème à notre situation).

Définition 2.1. L'opérateur $p(h, \lambda) = U_\lambda P(h) U_\lambda^{-1}$, qui est bien défini pour $\lambda \in]-1, 1[$, admet un prolongement analytique pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \varepsilon_1$ (où $\varepsilon_1 > 0$ dépend du ε_0 de l'hypothèse (1.1)), et on définit l'ensemble $\Gamma^2(h)$ des résonances de $P(h)$ comme la réunion des spectres discrets des $P(h, \lambda)$, $|\lambda| < \varepsilon_1$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

Soit maintenant $\mathscr{A}$ un sous-espace des fonctions entières sur $\mathbb{C}^n$ tel que:

$\forall \psi \in \mathscr{A}$, l'application $\lambda \to U_\lambda \psi$ est une fonction analytique dans $\{|\lambda| < \varepsilon_1\}$, à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; (2.3)

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \varepsilon_1$, l'image de $\mathscr{A}$ par U_λ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. (2.4)

On considère alors la:

Définition 2.1. bis. Pour tout $u_1, u_2 \in \mathscr{A}$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} z > 0$, on considère la fonction $z \to ((P(h) - z)^{-1} u_1, u_2)_{L^2}$.

L'identité $((P(h) - z)^{-1} u_1, u_2)_{L^2} = ((P(h, \lambda) - z)^{-1} U_\lambda u_1, (U_{\bar{\lambda}}) u_2)_{L^2}$ permet d'étendre méromorphiquement cette fonction à travers $\operatorname{Im} z = 0$ dans un domaine $G(\lambda)$ (complémentaire du spectre essentiel de $P(h, \lambda)$). En notant $((P(h) - z)^{-1} u_1, u_2)_{G(\lambda)}$ la fonction méromorphe ainsi obtenue, on a:

$$\Gamma^2(h) = \bigcup_{\substack{|\lambda| < \varepsilon_1 \\ \operatorname{Im} \lambda > 0}} \bigcup_{u_1, u_2 \in \mathscr{A}} \{\text{pôles de } ((P(h) - z)^{-1} u_1, u_2)_{G(\lambda)}\}.$$

De l'équivalence de ces deux définitions, on déduit l'indépendance par rapport à v et $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\Gamma^2(h)$, puisque la première ne fait pas intervenir $\mathscr{A}$, et la seconde, de par l'unicité du prolongement méromorphe, est indépendante du choix de v.

Remarquons aussi que, le spectre essentiel de $P(h, \lambda)$ étant décrit par $\{z; \arg z = -2 \arg (1 + \lambda)\}$, la famille d'ensembles $\{\text{pôles de } ((P(h) - z)^{-1} u_1, u_2)_{G(\lambda)}\}_{|\lambda| < \varepsilon_1}$ croît avec $\operatorname{Im} \lambda$.

Hunziker propose comme choix de $\mathscr{A}$ le sous-espace:

$$\mathscr{A}_1 = \left\{ f \text{ entière sur } \mathbb{C}^n \text{ t.q. } \forall \varepsilon > 0, \forall N > 0, \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ |\operatorname{Im} z| \leqq (1-\varepsilon)|\operatorname{Re} z|}} (\operatorname{Re} z)^N f(z) = 0 \right\}. \tag{2.5}$$

Pour la commodité de nos démonstrations on préfèrera par la suite utiliser plutôt le sous-espace:

$$\mathscr{A}_2 = \left\{ f \text{ entière sur } \mathbb{C}^n \text{ t.q. } \exists \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0, \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ |\operatorname{Im} z| \leqq \varepsilon_3 |\operatorname{Re} z|}} e^{\varepsilon_2 z^2} f(z) = 0 \right\}. \tag{2.6}$$

Celui-ci vérifie bien (2.3), (2.4) d'après [Hu].

3. Comparaison des deux ensembles de résonances

La comparaison entre $\Gamma^1(h)$ et $\Gamma^2(h)$ peut s'opérer de deux manières, selon que l'on adopte le point de vue "fonctions résonnantes" (cf. Définitions 1.2 et

2.1), ou le point de vue "pôles de la résolvante" (cf. Définitions 1.2 bis et 2.1 bis). C'est ce dernier point de vue que l'on adopte dans cette section: il a l'avantage de donner une démonstration courte du résultat que l'on cherche. Cependant, la comparaison entre les états résonnants associés à $\Gamma^1(h)$ et $\Gamma^2(h)$ n'est pas sans intérêt, et sera traitée dans la section suivante.

Théorème 3.1. *Si V vérifie* (1.1), $E_0>0$, *et $t>0$ est assez petit pour que* $\Omega_t \subset \{z \in \mathbb{C};\ \arg z \in]-2\arg(1+\lambda),\ \pi/2[\}$ (*où comme avant* $\Omega_t =]E_0 - 1/C_1, E_0 + 1/C_1[+i] - t/C_1,\ T_0[$, $C_1>0$ *assez grand,* $T_0>0$ *assez petit, et où* $|\lambda|<\varepsilon_1$, $\operatorname{Im}\lambda>0$), *alors* $\Gamma^1(h)\cap\Omega_t = \Gamma^2(h)\cap\Omega_t$ *pour* $h \in]0, h_t]$.

Compte tenu des remarques de la fin du §.1, il suffit de montrer:

Lemme 3.2. *Il existe un sous-espace $\mathscr{A}$ vérifiant* (2.3)–(2.4) *et qui est dense dans $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^N)$ pour tout t tel que $|t|<t_0$ et tout $N \in \mathbb{Z}$.*

(On remarquera le parallèle qui existe entre la densité dans les $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^N)$ et la condition (2.4)).

Démonstration. Montrons que l'espace $\mathscr{A} = \mathscr{A}_2$ défini en (2.6) convient.

Soit $\varphi \in \tilde{H}_\varepsilon^N$ et $\Phi(x, \alpha)$ donnée en (1.8).

Comme $\partial\Phi/\partial x(x, \alpha) \neq 0$ lorsque $\alpha_\xi \neq 0$ et $(x, \alpha_x) \in \operatorname{Supp}\chi_1((x - \operatorname{Re}\alpha_x)/\langle\alpha_x\rangle)$, et compte tenu du fait que $t(x, \alpha, h)$ est d'ordre $n/4$ en $\langle\alpha_\xi\rangle$, on peut gagner par des intégrations par parties en x un nombre arbitraire de puissances de $\langle\alpha_\xi\rangle$ dans l'expression de $T\varphi(\alpha)$:

$$T\varphi(\alpha) = \langle\alpha_\xi\rangle^{-k} \sum_{|\beta|\leqq k} \int e^{i\Phi(x,\alpha)/h} t_{k,\beta}(x, \alpha, h)\chi_1\left(\frac{x - \operatorname{Re}\alpha_x}{\langle\alpha_x\rangle}\right)\partial_x^\beta\varphi(x)\,dx$$

où les $t_{k,\beta}$ sont des symboles (vectoriels) d'ordre $h^{-3n/4}\langle\alpha_x\rangle^{-n/4}$. D'autre part, pour $\alpha \in \Lambda_{tG}$ et $|x - \operatorname{Re}\alpha_x| \leqq (1/C_0)\langle\alpha_x\rangle$, on remarque que:

$$\exists C>0 \quad \text{t.q.} \quad |tH(\alpha)| - \operatorname{Im}\varphi(x, \alpha) \leqq C\,|t \operatorname{Re}\alpha_x|$$

de sorte que, pour tout $\varepsilon_2>0$:

$$|\langle\alpha_\xi\rangle^N e^{-tH(\alpha)/h} T\varphi(\alpha)| \leqq C(h, \varepsilon_2)\langle\alpha_\xi\rangle^{N-k} e^{C|t \operatorname{Re}\alpha_x|/h} \times$$
$$\times\, e^{-\varepsilon_2(\operatorname{re}\alpha_x)^2} \sup_{|\beta|\leqq k} \|e^{2\varepsilon_2 x^2}\,\partial_x^\beta\varphi(x)\|_{L^2}$$

et donc, en prenant k assez grand:

$$\|\langle\alpha_\xi\rangle^N e^{-tH(\alpha)/h} T\varphi(\alpha)\|_{L^2(\Lambda_{tG})} \leqq C'(h, \varepsilon_2) \sup_{|\beta|\leqq k} \|e^{2\varepsilon_2 x^2}\,\partial^\beta\varphi\|_{L^2}. \tag{3.1}$$

En particulier, les deux membres de (3.1) sont finis si $\varphi \in \mathscr{A}_2$ et si on a pris ε_2 assez petit.

De plus, du fait que C_0^∞ est dense dans $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^N)$ (cf. [He–Sj], Proposition 5.8), il suffit d'après (3.1) de montrer que tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ peut être approché

par un élément de $\mathscr{A}_2$ pour la norme $\sum_{|\beta|\leqq k} \|e^{2\varepsilon_2 x^2} \partial^\beta \varphi\|_{L^2}$, et on aura alors la densité de $\mathscr{A}_2$ dans les $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^N)$. Cela se fait simplement par régularisation gaussienne, ou encore en approchant $e^{3\varepsilon_2 x^2}\psi$ par des combinaisons linéaires de fonctions d'Hermite, dont on connait la densité dans les espaces de Sobolev usuels grâce à l'étude de l'oscillateur harmonique. □

INSTITUT DE PHYSIQUE Université de Neuchâtel

4. Comparaison entre les états résonnants

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \varepsilon_1$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, et soient $t > 0$ assez petit et E une résonance dans $\Gamma^2(h) \cap \Omega_t = \Gamma^1(h) \cap \Omega_t$. On peut alors définir de manière naturelle les deux espaces suivants:

– l'espace des états résonnants au sens de Hunziker, décrit par $\operatorname{Im}\tilde{\Pi}_\lambda$

$$\text{où} \quad \tilde{\Pi}_\lambda = \frac{1}{2i\Pi}\int_{\gamma_E} (z - P(\lambda, h))^{-1}\, dz$$

– l'espace des états résonnants au sens d'Helffer–Sjöstrand, décrit par $\operatorname{Im}\Pi_t$

$$\text{où} \quad \Pi_t = \frac{1}{2i\Pi}\int_{\gamma_E} (z - P_t(h))^{-1}\, dz,$$

(γ_E désigne un contour fermé simple assez petit autour de E, tel que $\Gamma^1(h)\backslash E$ soit à l'extérieur de γ).

On se propose de démontrer:

Théorème 4.1. ***Sous les hypothèses précédentes, on a:***

$u_\lambda \in \operatorname{Im}\tilde{\Pi}_\lambda \Leftrightarrow \exists v_t \in \operatorname{Im}\Pi_t$ *tel que* $U_\lambda v_t = u_\lambda$.

Remarque 4.2. Si $v_t \in \operatorname{Im}\Pi_t$, alors $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(P(h) - E)^k v_t = 0$. A l'aide de déformations non-caractéristiques (cf. [Bo–Sc]), on peut alors montrer que v_t se prolonge en une fonction holomorphe dans $\tilde{D} = \{z; |\operatorname{Re} z| \geqq 2M, |\operatorname{Im} z| < \varepsilon_0 |\operatorname{Re} z|\}$: il suffit en effet de considérer la famille d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$:

$$\mathscr{H}_\varepsilon^N = \{z \in \mathbb{C}^n; |\operatorname{Im} z| = \varepsilon f_N(|\operatorname{Re} z| - M - N),\ M < |\operatorname{Re} z| < M + 2N\}$$

($0 \leqq \varepsilon < 1$, $N \geqq 1$) où $f_N(t) = N - 1/2 - t^2/2$ sur $[0, 1]$, $f_N(t) = N - t$ sur $[1, N]$, $f_N(-t) = f_N(t)$. Ces hypersurfaces sont toutes non-caractéristiques pour Δ, au sens que $[\partial/\partial z(|\operatorname{Im} z| - \varepsilon f_N(|\operatorname{Re} z| - M - N))]^2 \neq 0$ sur $\mathscr{H}_\varepsilon^N$, donc aussi pour P–E là où V est holomorphe, et le théorème de Zerner (voir [Bo–Sc], [Ma]) permet de prolonger v_t à tous les $\{z \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Im} z| < \varepsilon f_N(|\operatorname{Re} z| - M - N), M < |\operatorname{Re} z| < M + 2N\} \cap \{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon_0 |\operatorname{Re} z|\}$ et donc à $\{z \in \mathbb{C}^n; |\operatorname{Im} z| < \operatorname{Min}(|\operatorname{Re} z| - M, \varepsilon_0 |\operatorname{Re} z|), |\operatorname{Re} z| > M\}$, qui contient (du fait qu'on a pris $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$) $\{|\operatorname{Re} z| > 2M, |\operatorname{Im} z| < \varepsilon_0 |\operatorname{Re} z|\}$. Par suite, $U_\lambda v_t$ est bien définie comme distribution sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du Théorème 4.1 va se faire en plusieurs étapes:

Lemme 4.3. *Soit* $P_t(\lambda, h)$ *la réalisation de* $P(\lambda, h)$ *sur* $H(\Lambda_{tG}, 1)$ *avec*

$\operatorname{Im}\lambda > 0$. *On peut alors définir, pour $t > 0$ assez petit, le projecteur*:

$$\Pi_t(\lambda) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{\gamma_E} (z - P_t(\lambda, h))^{-1}\, dz$$

et on a:

$$\operatorname{Im}\tilde{\Pi}_\lambda = \operatorname{Im}\Pi_t(\lambda).$$

Démonstration. Pour $s \in [0, 1]$, notons $G_s = sG$. Du fait que $L^2(\mathbb{R}^n) = H(\Lambda_0, 1)$, il suffit de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t|$ assez petit, si $z \in \Omega_{|t|}$, et $h > 0$ est assez petit, on *a*:

$$\begin{cases} u \in H(\Lambda_{tG}, 1) \\ (P(\lambda, h) - z)u \in \bigcap_{0 \leqq s \leqq 1} H(\Lambda_{tG_s}, \tilde{r}^{-2}) \end{cases} \Rightarrow u \in \bigcap_{0 \leqq s \leqq 1} H(\Lambda_{tG_s}, 1). \tag{4.1}$$

Soit $p_\lambda(x, \xi)$ le symbole principal de $P(\lambda, h)$. Si l'on note $1 + \lambda = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho \in]1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1[$, $\theta > 0$ petit), on a, pour $(x, \xi) \in \Lambda_{tG_s}$ et $|x|$ assez grand:

$$\begin{aligned} p_\lambda(x, \xi) - z &= \rho^{-2}e^{-2i\theta}\xi^2 + V(\rho e^{i\theta}x) - z \\ &= \rho^{-2}(\operatorname{Re}\xi)^2(\cos 2\theta - i\sin 2\theta + \mathcal{O}(ts)) + V(\rho e^{i\theta}x) - z. \end{aligned} \tag{4.2}$$

On en déduit, pour $|x|$ assez grand, $z \in \Omega_{|t|}$, $|t|$ assez petit:

$$|p_\lambda(x, \xi) - z| \geqq \frac{1}{C}|\theta|\,\langle\xi\rangle^2 \quad \text{sur} \quad \Lambda_{tG_s}, \qquad \forall s \in [0, 1] \quad \text{où} \quad C > 0. \tag{4.3}$$

La démonstration se termine alors comme celle du Théorème 8.5 de [He–Sj] relatif à l'indépendance de $\Gamma^1(h)$ par rapport au choix de la fonction fuite G: on applique le calcul pseudo-différentiel de [He–Sj] pour inverser $P(\lambda, h) - z$ modulo un opérateur K dont le symbole est à support compact uniformément par rapport à s, ce qui conduit à une inégalité a priori de la forme:

$$\|u\|_{H(\Lambda_{tG_s}, 1)} \leqq C(\|(P(\lambda, h) - z)u\|_{H(\Lambda_{tG_s})} + \|Ku\|_{H(\Lambda_{tG_s})}) \quad \text{où } C > 0$$

est indépendant de $s \in [0, 1]$. □

On fixe maintenant $\lambda_0 \in \{|\lambda| < \varepsilon_1,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\}$, et on sait d'après (3.1) que $U_{\lambda_0}(\mathcal{A}_2)$ est inclus dans $H(\Lambda_{tG}, 1)$ pour $|t|$ assez petit (on pourrait même montrer qu'il est dense). D'autre part, il est clair que les résonances de $P_t(\lambda_0, h)$, $P(\lambda_0, h)$, $P_t(h)$ coïncident près de E_0 et que pour z différent de ces résonances, les noyaux des résolvantes correspondantes coïncident aussi, par unicité du prolongement méromorphe à partir de la région $\operatorname{Im} z > T_0/2$.

En fait, on a sur Λ_{tG}, et pour $|x|$ assez grand (en notant $1 + \lambda = \rho e^{i\theta}$):

$$\begin{aligned} p_\lambda(x, \xi) - z = \rho^{-2}(\operatorname{Re}\xi)^2(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) - itH_pG(\operatorname{Re}x, \operatorname{Re}\xi) \\ + V(\rho e^{i\theta}x) - z + \mathcal{O}(t^2 + \theta^2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

On en déduit comme précédemment que les résonances de $P_t(\lambda, h)$ coïncident pour tous les t, λ assez petits tels que $\operatorname{Im}\lambda > -t/C$ avec $C > 0$ assez grande, ainsi que les résolvantes correspondantes.

Soit $u_{\lambda_0} \in \operatorname{Im} \tilde{\Pi}_{\lambda_0}$. Du fait que $U_{\lambda_0}(\mathscr{A}_2)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (cf. [Hu]), on *a*:

$$u_{\lambda_0} = \tilde{\Pi}_{\lambda_0} U_{\lambda_0} \psi \quad \text{avec} \quad \psi \in \mathscr{A}_2,$$

et d'après ce qui précède, on peut écrire:

$$u_{\lambda_0} = \Pi_t(\lambda_0) U_{\lambda_0} \psi$$

avec $t > 0$ assez petit, puis si on pose:

$$u_\lambda = \Pi_t(\lambda) U_\lambda \psi$$

alors la famille $(u_\lambda)_{\operatorname{Im}\lambda > -(t/C),\ |\lambda| < \varepsilon_1}$ est holomorphe en λ à valeurs dans $H(\Lambda_{tG}, 1)$. De plus, si λ est réel, on peut écrire:

$$u_\lambda = \Pi_t(\lambda) U_\lambda \psi = U_\lambda \Pi_t \psi. \tag{4.5}$$

Par unicité du prolongement analytique, on en déduit que la relation (4.5) reste vraie pour λ complexe, et en particulier pour $\lambda = \lambda_0$ on obtient:

$$u_{\lambda_0} = U_{\lambda_0} v_t \quad \text{avec} \quad v_t = \Pi_t \psi \in \operatorname{Im} \Pi_t.$$

Inversement, si $v_t \in \operatorname{Im} \Pi_t$, alors (par densité de $\mathscr{A}_2$ dans $H(\Lambda_{tG}, 1)$), v s'écrit $v = \Pi_t \psi$ avec $\psi \in \mathscr{A}_2$, et on en déduit comme ci-dessus et en utilisant le Lemme 4.3 que pour λ complexe, $|\lambda| < \varepsilon_1$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$, on *a*:

$$U_\lambda v_t = \Pi_t(\lambda) U_\lambda \psi \in \operatorname{Im} \tilde{\Pi}_\lambda. \quad \square$$

Remarque 4.4. Dans le cas où $n = 1$ et où V est à support compact, Ashbaugh et Harrell ont donné dans [As–Ha] une autre définition des résonances qui s'écrit:

$$E \text{ est une résonance} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists u \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } Pu = Eu \text{ et} \\ u(x) = \begin{cases} \alpha e^{i\sqrt{E}x/h} \text{ pour } x \text{ assez grand} \\ \beta e^{-i\sqrt{E}x/h} \text{ pour } -x \text{ assez grand} \end{cases} \\ \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}. \end{cases}$$

D'après le Théorème 4.1, il est alors clair que cette notion coïncide avec celle de [He–Sj] et que l'on a $u \in H(\Lambda_{tG}, 1)$ avec $t > 0$. Notons seulement que ce dernier résultat peut se retrouver par un calcul direct à partir de la Définition 1.1.

REFERENCES

[Ag–Co] J. Aguilar, J.-M. Combes, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Comm. Math. Phys., *22* (1971), p. 269–279.

[As–Ha] M. Ashbaugh, E. M. Harrell, *Perturbation theory for shape resonances and large barrier potentials*, Comm. Math. Phys., *83* (1982), p. 151–170.

[Ba–Co] E. Balslev, J-M. Combes, *Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions*, Comm. Math. Phys., *22* (1971), p. 280–294.

[Bo–Sc] J.-M. Bony, P. Schapira, *Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles*, Inv. Math. *17* (1972), p. 95–105.

[Br–Co–Du] Ph. Briet, J-M. Combes, P. Duclos, *On the location of resonances for Schrödinger operators in the semi-classical limit I, II*, Preprint Marseille CPT *85*/P, 1829 et CPT *86*/P, 1884.

[C–D–K–S] J.-M. COMBES, P. DUCLOS, M. KLEIN, R. SEILER, *The shape resonance*, Preprint Marseille CPT *85*/P, 1797, et à paraître dans Comm. Math. Phys.

[Cy] H. CYCON, *Resonances defined by modified dilations*, Helv. Phys. Acta *58* (1985), p. 969–981.

[Ge–Sj] C. GÉRARD, J. SJÖSTRAND, *Semi-classical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type*, Preprint Lund (Suède), 1986, et à paraître dans Comm. in Math. Phys.

[Ha–Si] E. M. HARRELL, B. SIMON, *The mathematical theory of resonances whose widths are exponentially small*, Duke Math. J., Vol. *47*, n° 4, Déc. 1980.

[He–Ro] B. HELFFER, D. ROBERT, *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*, J, Func. Anal., *53*, n°3 (1983), p. 246–268.

[He–Sj] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, *Résonances en limite semi-classique*, Mémoires de la S.M.F., (1986), Tome 114-Fasc. 3.
(Annoncé dans: [Sj] Contribution to the Workshop and Symposium on hyperbolic equations and related topics, Katada and Kyoto, 1984. [He–Sj] Nato Conferences in Castelvecchio, 1985. [He] IAMP, Actes du colloque international de Marseille, 1986).

[Hi–Si] P. HISLOP, I. M. SIGAL, *Shape resonances in quantum mechanics*, Proceedings of the International Conferences on Differential Equations and Math. Phys., Birmingham (Alabama), Mars 1986.

[Hu] W. HUNZIKER, *Distorsion analyticity and molecular resonance curves*, Annales de l'I.H.P., (Section Physique Théorique), (1986).

[La–Ph] P.D. LAX, R. PHILLIPS, *Scattering theory for transport*, Proc. Conf. on Func. Anal., Univ. of California at Irvine, 1966.

[Ma] A. MARTINEZ, *Prolongement des solutions holomorphes de problèmes aux limites*, Ann. Inst. Fourier, 35, *1* (1985), p. 93–116.

[Re–Si] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. IV, Academic Press, New-York 1978.

[Sig] I. M. SIGAL, *Complex transformation method and resonances in one-body quantum systems*, Ann. I. H. P., *41* (1984), p. 103–114.

[Sim] B. SIMON, [1] *Resonances in n-body quantum systems with dilation analytic potentials and the foundations of time-dependant perturbation theory*, Ann. of Math., *97* (1973), p. 247–274. [2] *Resonances and complex scaling, a rigorous overview*, Int. J. quantum chemistry, *14* (1978), p. 529–542. [3] *The definition of molecular resonance curves by the method of exterior complex scaling*, Phys. Lett., *71* A (1979), p. 211–214.

[Sj] J. SJÖSTRAND, [1] *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n° 95 (1982). [2] *Semiclassical resonances generated by non-degenerate critical points*, Preprint Lund (Suède), 1986, et à paraître aux Actes de la rencontre d'Oberwolfach sur les opérateurs pseudo-différentiels, (Fév. 1986).

[Va] B. R. VAINBERG, [1] *On the analytic properties of the resolvent for a certain class of operator-pencils*, Mat. Sb., *77* (119), (1968), n° 2, Math. USSR Sb., *6* (1968), n° 2. [2] *On exterior elliptic problems* . . . Mat. Sb., *92* (134), (1973), n° 2, Math. USSR sb., *21* (1973), n° 2.