Sur les déterminants des matrices quaternioniennes

Autor(en): **Praag, Paul van**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **62 (1989)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-116026

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Helvetica Physica Acta, Vol. 62 (1989) 42–46 0018–0238/89/010042–05$1.50 + 0.20/0
© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur les déterminants des matrices quaternioniennes

par Paul Van Praag

Université de l'Etat à Mons, Faculté des Sciences, Avenue Maistriau, 15, 7000 Mons, Belgique.

(24. VI. 1988, revised 26. VIII. 1988)

Résumé: le déterminant de Moore d'une matrice presque hermitienne quaternionienne est un représentant du déterminant de Dieudonne de cette matrice. Ceci répond à une question de Freeman Dyson ([1], conclusions, question 2).

1. Terminologie, notations et résultats utilisés

Dans cette note, C est un corps commutatif et H est un corps de rang 4 sur C.

$H^{\cdot}$ est le groupe multiplicatif de H et $[H^{\cdot}, H^{\cdot}]$ est le sous-groupe des commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$ de $H^{\cdot}$. Si $q \in H^{\cdot}$, on note $\bar{q}$ l'élément $q[H^{\cdot}, H^{\cdot}]$ du groupe quotient $H^{\cdot}/[H^{\cdot}, H^{\cdot}]$. Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans H, on note $\det A$ le déterminant de Dieudonne de A défini par exemple dans [1].

Ce déterminant prend ses valeurs dans $H^{\cdot}/[H^{\cdot}, H^{\cdot}] \cup \{\bar{0}\}$, où $\bar{0}$ est un zéro adjoint à $H^{\cdot}/[H^{\cdot}, H^{\cdot}]$.

$\det A = \bar{0}$ si et seulement si A est non inversible.

On utilisera les propriétés suivantes de ce déterminant, prouvées par exemple dans [2]:

$\det(AA_1) = \det A \det A_1$ lorsque les deux membres ont un sens (1)

Si A_1 est la matrice obtenue à partir de A en permutant deux lignes et les colonnes correspondantes, alors $\det A_1 = \det A$. (2)

Si A_1 est la matrice obtenue à partir de A en additionnant à une ligne de A un multiple à gauche dans H d'une autre ligne de A, alors $\det A_1 = \det A$. (3)

Si $\alpha \in H$, alors

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & W \\ 0 & A \end{pmatrix} = \bar{\alpha} \det A$$

quelle que soit la ligne $W \in H^{1 \times n}$. (4)

On note * l'involution canonique de H et A^+ la matrice définie par $(A^+)_{ij} = A^*_{ji}$.

On dit que A est hermitienne si et seulement si $A = A^+$, et qu'elle est presque hermitienne si elle ne diffère d'une matrice hermitienne que par une ligne et la colonne correspondante.

Jusqu'à la fin de cette note, T est une matrice hermitienne $n \times n$ à coefficients dans H.

Eliakim H. Moore a défini [3] un déterminant que nous noterons ici $m(T)$ qui est une expression polynômiale en les T_{ij} et qui prend ses valeurs dans C. On prouve dans [4] les résultats suivants:

$m(T) = 0$ si et seulement si T est non inversible (5)

Si T_1 est la matrice obtenue à partir de T en permutant deux lignes et les colonnes correspondantes, alors $m(T_1) = m(T)$. (6)

Si T^{adj} est la matrice adjointe de T([3], 16.4), alors

$$(\alpha T)^{\mathrm{adj}} = \alpha^{n-1} T^{\mathrm{adj}} \text{ si } \alpha \in C \tag{7}$$

$$TT^{\mathrm{adj}} = m(T) 1_n = T^{\mathrm{adj}} T \tag{8}$$

$m(T + WW^+) = m(T) + W^+ T^{\mathrm{adj}} W$ pour toute colonne $W \in H^{n \times 1}$ (9)

Le rang de T^{adj} est n si et seulement si T est inversible, il est 1 si le rang de T est $n-1$, il est nul si celui de T est inférieur à $n-1$. (10)

On étend ([4], 18.1) la définition de m aux matrices presque hermitiennes: soit A une telle matrice.

On ne nuit pas à la généralité de ce qui suit en écrivant:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & V \\ U & T \end{pmatrix} \tag{11}$$

où $\alpha \in C$, $U \in H^{n \times l}$ et $V \in H^{l \times n}$. On pose alors

$$m(A) = \alpha m(T) - V T^{\mathrm{adj}} U.$$

Si $V = U^+$, on retrouve la définition initiale de $m(A)$. Soit $T_{\cdot j}$ la j^e-colonne de T, on pose

$$T^{\cdot j} = T + T_{\cdot j} T_{\cdot j}^+ \tag{12}$$

qui est aussi une matrice hermitienne.

2. Proposition. *Le déterminant de Moore d'une matrice presque hermitienne est un représentant du déterminant de Dieudonne de cette matrice.*

Lemme. $\overline{m(T)} = \det T$.

Preuve du lemme. Par induction. On peut supposer que T est inversible. Si $n = 1$, il n'y a rien à prouver. Soit $n > 1$. On peut supposer que $T_{11} \neq 0$:

1°) si l'un des éléments de la diagonale de T n'est pas nul, on applique (3) et (5).

2°) Si tous les T_{ii} sont nuls, soit $T_{1j} \neq 0$. Dès lors:

$$\begin{aligned} m(T^j) &= m(T) + T^+_{\cdot j} T^{\mathrm{adj}} T_{\cdot j} \\ &= m(T) + (m(T)T)_{ij} && \text{(par (12) et (9))} \\ &= m(T), && \text{(par (8))} \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\det(T^j) = \det T \qquad \text{(par (3))}$$

Soit donc

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & J^+ \\ J & B \end{pmatrix},$$

où $0 \neq T_{11} \in C$. Dès lors

$$\begin{aligned} \det T &= \det \begin{pmatrix} T_{11} & J^+ \\ 0 & B - JT_{11}^{-1}J^+ \end{pmatrix} && \text{(par (3))} \\ &= \overline{T_{11}} \det(B - JT_{11}^{-1}J^+) && \text{(par (4))} \\ &= \overline{T_{11}}\, m(B - JT_{11}^{-1}J^+) && \text{(induction)} \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} m(B - JT_{11}^{-1}J^+) &= m(B) - T_{11}^{-1}J^+B^{\mathrm{adj}}J && \text{(par (9) et (7))} \\ &= T_{11}^{-1}m(T) \end{aligned}$$

Remarque $[H^\cdot, H^\cdot] \cap C = \{\pm 1\}$, donc le déterminant de Moore d'une matrice hermitienne peut être défini comme le représentant central du déterminant de Dieudonne de cette matrice qui attribue la valeur 1 à toute matrice unité. Des conséquences sont écrites dans [5]

Preuve de la proposition. Soit donc A définie par (11).

1. Soit $m(T) \neq 0$. On a:

$$\begin{pmatrix} \alpha & V \\ U & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(T) & 0 \\ -T^{\mathrm{adj}}U & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(A) & V \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

donc

$$(\det A)\overline{m(T)} = \overline{m(A)} \det T;$$

mais

$$\overline{m(T)} = \det T \qquad \text{(lemme)},$$

donc

$$\overline{m(A)} = \det A.$$

2. Le rang de T est $n-1$, on distingue trois cas:
2.1. Soit $U^+T^{\mathrm{adj}}U \neq 0$, dès lors

$$\begin{pmatrix} \alpha & V \\ U & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & U^+ \\ -T^{\mathrm{adj}}U & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(A) & \alpha U^+ + V \\ 0 & T + UU^+ \end{pmatrix} \quad (13)$$

mais

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 0 & U^+ \\ -T^{\mathrm{adj}}U & 1_n \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1_n & -T^{\mathrm{adj}}U \\ U^+ & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1_n & -T^{\mathrm{adj}}U \\ 0 & U^+T^{\mathrm{adj}}U \end{pmatrix} \\ &= \overline{U^+T^{\mathrm{adj}}U} && (\neq \bar{0}) \\ &= \overline{m(T+UU^+)} && (\text{par } (9)) \\ &= \det(T+UU^+) && (\text{lemme}) \end{aligned}$$

(13) implique alors $\det A = \overline{m(A)}$
2.2. $U^+T^{\mathrm{adj}}U = 0$ et $U^+T^{\mathrm{adj}} \neq 0$.
Il existe alors $\beta \in H$ tel que

$$VT^{\mathrm{adj}} = \beta U^+T^{\mathrm{adj}},$$

puisque le rang de T^{adj} est 1 (10). Donc

$$\begin{aligned} -m(A) &= VT^{\mathrm{adj}}U \\ &= \beta U^+T^{\mathrm{adj}}U \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mais

$$(0 \quad U^+T^{\mathrm{adj}})\begin{pmatrix} \alpha & V \\ U & T \end{pmatrix}$$

est la ligne nulle de $H^{1\times(n-1)}$, donc $\det A = \bar{0}$.
2.3. Soit $U^+T^{\mathrm{adj}} = 0$. Dès lors $T^{\mathrm{adj}}U = 0$ et donc $m(A) = 0$. Mais

$$(0 \quad T^{\mathrm{adj}})\begin{pmatrix} \alpha & V \\ U & T \end{pmatrix}$$

est la matrice nulle de $H^{n\times(n+1)}$, donc $\det A = \bar{0}$.
3. Le rang de T est inférieur à $n-1$, donc $T^{\mathrm{adj}} = 0$ (10), donc $m(A) = 0$. Si $n = 2$, il n'y a rien à prouver. Si $n \geqslant 3$, alors $\det A = \bar{0}$.

Corollaire 1 (conjecture 2 de [1] pour les corps de quaternions). *Si A est une*

matrice presque hermitienne à coefficients dans H, alors $m(A) = 0$ si et seulement si il existe $0 \neq v \in H^{(n+1)\times 1}$ pour lequel $Av = 0$.

Preuve. Cette dernière relation se traduit par la nullité d'une combinaison linéaire à droite non triviale des colonnes de A, ce qui est équivalent, comme pour les matrices à coefficients dans un corps commutatif (voir par exemple [2], chapitre 1) à la non inversibilité de A. La définition du déterminant det et la proposition permettent de conclure.

Corollaire 2 (énoncé 4.14 de la conjecture 2 de [1] pour les corps de quaternions): *Sous la même hypothèse que le corollaire* 1: $m(AA)^+ = m(A)m(A^+)$.

Preuve. On peut supposer A inversible. La proposition et (1) impliquent alors que $m(AA^+)$ et $m(A)m(A^+)$ diffèrent multiplicativement par un élément de $C \cap [H^\cdot, H^\cdot] = \{\pm 1\}$. La définition du déterminant m permet alors de conclure.

3. Je remercie le Dr. Pasquale Mammone pour m'avoir appris l'existence de [1], et le Professeur Freeman Dyson pour m'avoir précisé dans une première correspondance mes erreurs relatives à sa présentation du déterminant de Moore et aux conjectures 1 et 2 mentionnées plus haut.

REFERENCES

[1] F. Dyson, *Quaternion Determinants*, Helvetica Physica Acta, **45** (1972), 289–302.
[2] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publ., New York, 1957.
[3] E. H. Moore, *Bull. Am. Math. Soc.* **28,** (1922), p. 1961.
[4] E. H. Moore and R. W. Barnard, *General Analysis, Part* 1, *Memoirs of the American Philosophical Society, Philadelphia*, 1935.
[5] P. Van Praag, Sur la norme réduite du déterminant de Dieudonné des matrices quaternioniennes, à paraître.