L'univers dimensionnel de la physique : essai de physique contemplative

Autor(en): **Huguenin, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **62 (1989)**

Heft 2-3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-116033

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'UNIVERS DIMENSIONNEL DE LA PHYSIQUE - ESSAI DE PHYSIQUE CONTEMPLATIVE

P. HUGUENIN
Institut de Physique, rue A.-L. Breguet 1, CH-2000 Neuchâtel

1. Introduction

Si l'on veut appréhender une grandeur physique dans l'ensemble de ses réalisations possibles dans notre univers on est contraint d'utiliser des stratagèmes. Le plus utilisé est la représentation logarithmique dont nous ferons usage systématiquement dans cet essai.

Cette représentation permet d'appréhender, donc de comparer, simultanément la masse d'un électron, avec celle d'un proton, d'une voiture, du soleil, d'une galaxie ou de l'univers entier.

Sur la figure 1.1, nous avons reporté la variable m, avec la signification

$$\text{Masse de l'objet} = 10^{m} \cdot \underline{kg}$$

(Afin de pouvoir conserver les lettres minuscules ordinaires pour des variables réelles sans dimensions, les unités de mesures seront ici soulignées)

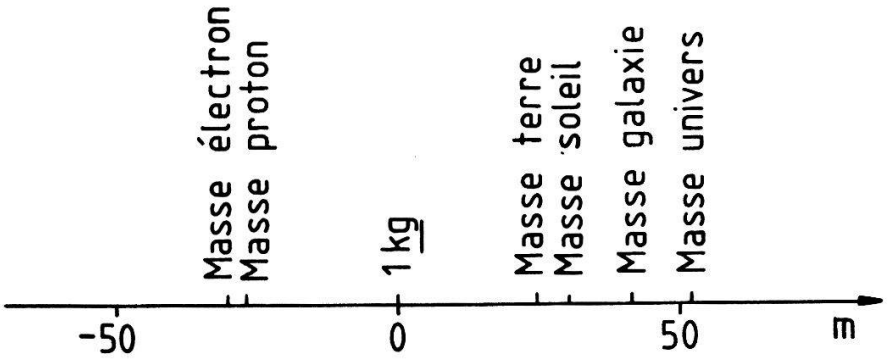


Fig. 1.1

Sur la figure 1.2, nous avons fait de même avec quelques longueurs caractéristiques mesurées en mètres.

$$\text{Distance} = 10^{\ell}\ \underline{m}$$

On peut remarquer que le rayon de la terre se trouve sur le diagramme à mi-distance entre le rayon du proton et celui de l'univers. Du moment que la représentation est logarithmique, cela signifie que le rayon de la terre correspond à la moyenne géométrique entre les rayons du proton et de l'univers.

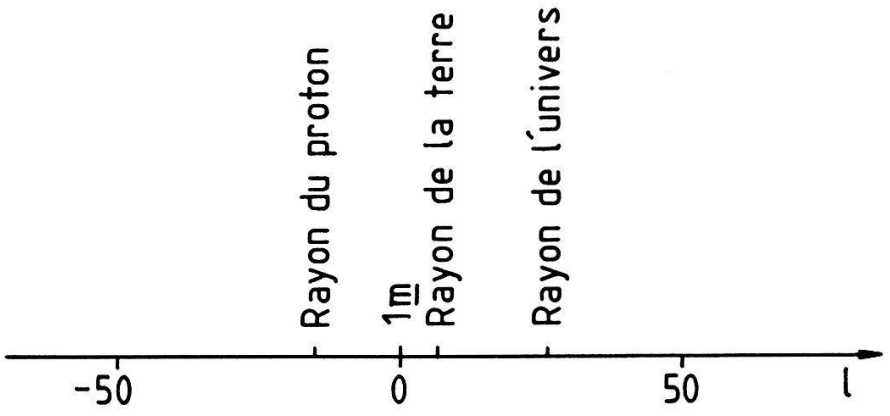


Fig. 1.2

Sur la figure 1.3, on peut comparer des intervalles de temps. La durée de vie de méson π^0 est typique d'un temps court du point de vue expérimental. Pour les interactions fortes le π^0 est considéré comme stable ! En effet, cette particule a le temps de sortir du noyau où elle a été créée pour se désintégrer par interaction électromagnétique "loin" au-dehors du noyau. Nous avons reporté :

$$\text{Intervalle de temps} = 10^t \ \underline{s}$$

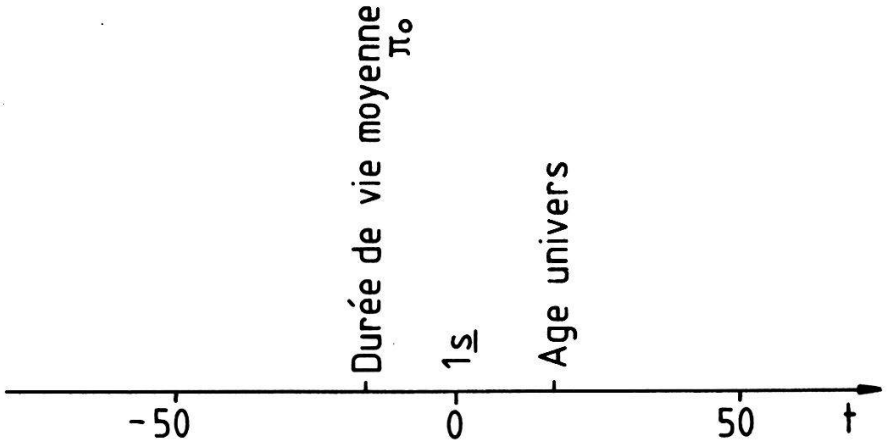


Fig. 1.3

L'idée du présent travail est de systématiser l'usage de telles représentations pour toutes les grandeurs physiques quelles que soient leurs dimensions et d'en tirer d'éventuelles conséquences.

Tout d'abord nous verrons que dans le cas de la mécanique il faut tenir compte de 3 unités physiques, ce qui conduit à considérer des variétés multidimensionnelles. Nous verrons sur l'exemple de l'électrodynamique que toute la physique actuelle peut être basée sur des systèmes à trois unités.

Nous choisirons de travailler avec une représentation projective des grandeurs physiques (ou plutôt de leurs logarithmes) où c, $\hbar$ et G sont pris comme unités fondamentales. Ceci permet d'ordonner les théories physiques autour d'un tétraèdre. Les détails techniques sont groupés dans les appendices A, B, et C.

Nous essaierons de comprendre pourquoi nous avons besoin de 3 unités physiques sur l'exemple historique du passage de la statique d'Archimède à la dynamique de Newton. Cette extension du champ d'application de la physique n'a pas fini de porter des fruits et aucune révolution de cette ampleur n'est apparue depuis lors.

2. Le cas de la mécanique et de ses limites de validité

On sait l'extraordinaire succès de la mécanique classique qui décrit le mouvement d'un grain de poussière aussi bien que celui d'une planète, voire des étoiles au sein des galaxies.

Il est important d'avoir une idée de ses limites de validité. On sait que l'équation de Newton doit être modifiée si la vitesse approche la vitesse de la lumière. D'autre part, pour de grandes distances, la géométrie de l'univers apporte d'autres corrections à l'équation de Newton.

Un diagramme longueur-vitesse est susceptible de délimiter des zones. (Figure 2.1)

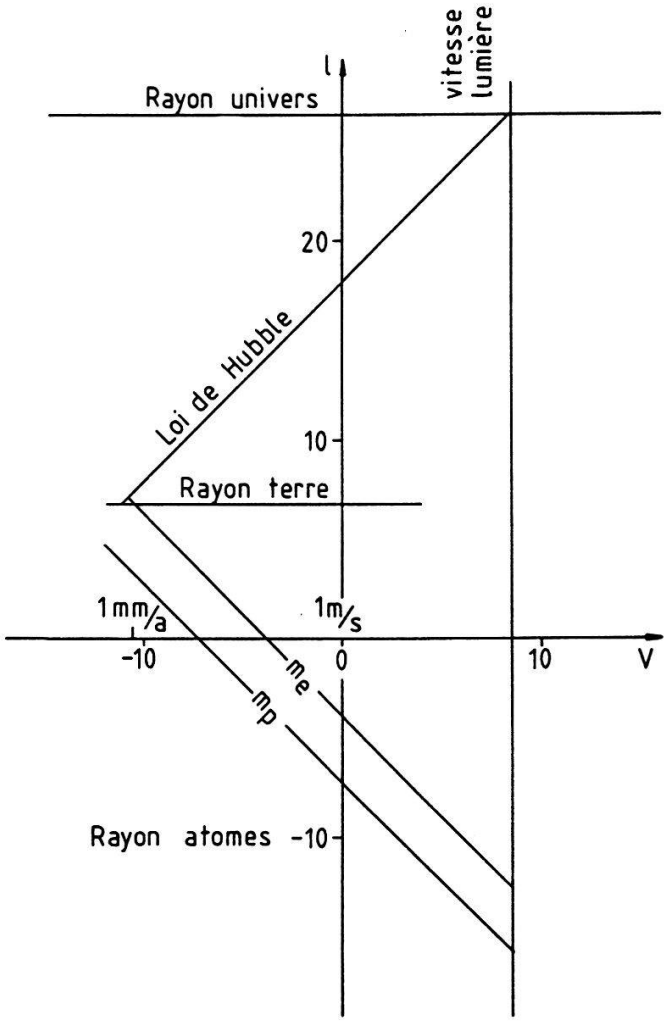


Fig. 2.1

L'axe vertical est une copie de la figure 1.2 alors que sur l'axe horizontal nous reportons v tel que

$$\text{vitesse} = 10^{v}\ \underline{m}\ \underline{s}^{-1}$$

v est donc limité par la vitesse de la lumière

$$v < \log 3 \cdot 10^{8} = 8{,}48$$

Pour les grandes distances, l'espace et le temps forment un espace courbe. La loi de Hubble entre aussi en jeu. Le prolongement de cette loi à des distances de l'ordre du rayon de la terre donne des vitesses géologiques (mm/an) Coïncidence ? Probablement.

Dans le bas du diagramme, ce sont les incertitudes d'Heisenberg qui limitent la validité de la mécanique classique. Cette limitation porte sur le

produit quantité de mouvement x longueur. Pour obtenir la quantité de mouvement à partir de la vitesse, il faut connaître la masse. La limite ne peut pas être tracée par une seule droite. Nous en avons tracé deux. Celles du proton et de l'électron.

Pour appréhender complètement ces questions il faut passer à l'espace à 3 dimensions (au moins!). L'appendice C répertorie les grandeurs et les lois physiques en cause dans ce travail.

Considérons 3 axes liés respectivement à la masse, à la longueur et au temps

$$\text{masse} = 10^{m}\ \underline{kg} \qquad \text{longueur} = 10^{\ell}\ \underline{m} \qquad \text{temps} = 10^{t}\ \underline{s}.$$

Il est facile de représenter le plan qui correspond à l'âge de l'univers et celui de son rayon.

Nous savons qu'il faut encore tracer la limite due à la relativité (vitesse<c) et celle des incertitudes quantiques (masse·vitesse·longueur>ħ).

En coordonnées logarithmiques ces deux limites donnent des plans obliques d'équations :

$$\log 10^{\ell} + \cancel{\log \underline{m}} - \log 10^{t} - \cancel{\log \underline{s}} = \log \cdot 3 \cdot 10^{8} + \cancel{\log \underline{m}} - \cancel{\log \underline{s}}$$

ou

$$\ell - t = 8{,}48$$

et

$$\log 10^{m} + \log 10^{2\ell} - \log 10^{t} + \log \underline{kg} + 2 \log \underline{m} - \log \underline{s}$$

$$= \log 1{,}05 \cdot 10^{-34} + \log \frac{\underline{kg}\ \underline{m}^2}{\underline{s}}$$

ou

$$m + 2\ell - t = -33{,}98$$

De la même manière, on peut reporter la loi de la gravitation universelle en traçant un plan qui corresponde à la constante G de la gravitation

$$10^{3\ell - m - 2t}\ \underline{m}^3\ \underline{kg}^{-1}\ \underline{s}^{-2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \underline{m}^3\ \underline{kg}^{-1}\ \underline{s}^{-2}$$

En prenant le logarithme

$$3\ell - m - 2t = 10{,}18$$

Les plans $\underline{\hbar}$, $\underline{c}$, $\underline{G}$ ne sont pas parallèles, ils forment un trièdre qui définit 3 arêtes qui se coupent en un point ℓ = 34,79 m = 7,66 t = - 43,27. Ce sont les logarithmes des valeurs des unités de Planck dans le système MKS.

La prespective de la figure 2.2 est très mal choisie parce que les plans des coordonnées sont en biais relativement aux plans liés aux constantes physiques fondamentales.

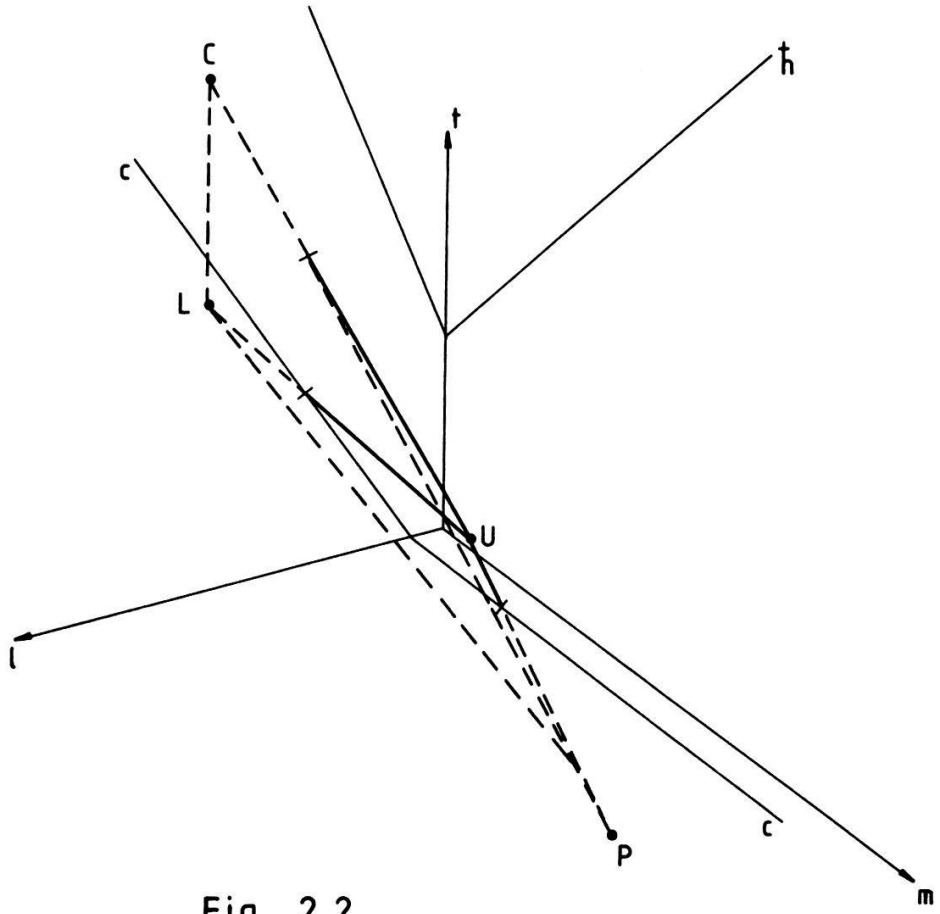


Fig. 2.2

Nous mettrons ce même dessin dans une meilleure perspective au § 3.

D'ores et déjà apparaît l'importance écrasante des concepts de la mécanique classique. Une théorie qui ne contiendrait pas cette dernière comme cas limite n'aurait aucune chance de s'imposer.

3. Le tétraèdre des théories physiques

Les diagrammes tridimensionnels basés sur le système MKS des paragraphes précédents sont peu lisibles. L'origine des coordonnées n'a aucune signification particulière, pas plus que les plans associés aux axes de coordonnées.

Rien n'empêche d'effectuer une transformation affine telle que les axes soient les intersections des plans associés à 3 constantes physiques fondamentales indépendantes. Nous choisirons ici la vitesse c de la lumière, la constante de Planck $\hbar$ et la constante de gravitation G.

On trouve en appendice le détail du calcul du changement de repère pour passer des variables m ℓ t aux variables s a g que nous allons introduire.

La variable s est le logarithme de l'inverse d'une vitesse exprimée en partie de vitesse de la lumière

$$v = 10^{-s}\ \underline{c}$$

La variable s représente une lenteur et pour des vitesses de propagation de signaux qui transportent de l'énergie, $s \geqslant 0$.

La variable a est le logarithme de moment cinétique ou de l'intégrale d'action exprimé en unités $\hbar$. Pour les phénomènes non quantiques $a > 0$

$$\text{Moment cinétique} = 10^{a}\ \underline{\hbar}$$
$$\text{(action)}$$

La variable g concerne une grandeur mécanique qui ne semble pas avoir de nom. Elle est liée à des combinaisons de grandeurs ayant la dimension de la constante de gravitation. Appelons "indice gravitationnel" toute grandeur de dimension $M^{-1}\ L^{3}\ T^{-2}$.

$$\text{Indice gravitationnel} = 10^{g}\ \underline{G}$$

De nouveau, on attend $g > o$ parce que la gravitation engendre les accélérations les plus faibles possibles : on ne sait pas écranter la gravitation, ce qu'il faudrait pouvoir faire pour mesurer clairement des accélérations plus faibles.

Sur la figure 3.1 nous avons représenté les axes (s,a,g) avec le plan sécant correspondant à l'horizon $R = 2 \cdot 10^{26}$ m de l'univers.

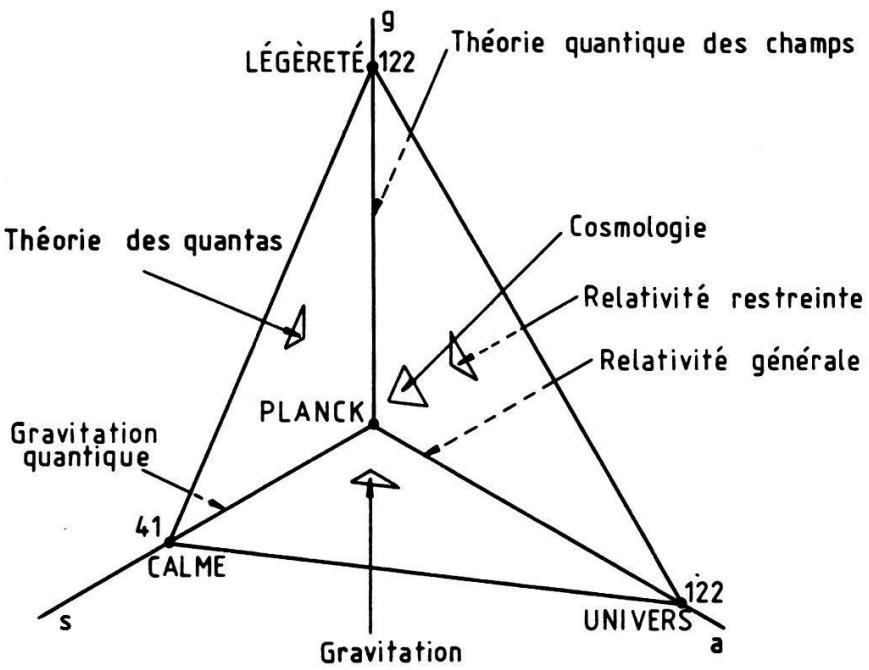


FIG. 3.1

L'intérieur du tétraèdre ainsi défini correspond à des situations classiques. En revanche, les faces nécessitent en général des théories développées ce siècle.

Le voisinage du plan s = 0 nécessite des équations relativistes.
Le voisinage du plan a = 0 appelle la mécanique quantique.
Le voisinage du plan g = 0 est gouverné par la gravitation.
Le plan sécant correspond à la cosmologie contemporaine.

Le domaine d'adéquation de la mécanique classique comporte pratiquement tout le volume du tétraèdre, alors que les théories contemporaines ne sont indispensables que sur des surfaces ou des droites "de mesure nulle".

Ces 4 théories s'organisent démocratiquement autour de la mécanique classique qui reste à la fois un modèle de théorie et une limite nécessaire (Principes de correspondances).

On peut même classer certains scénarios de science fiction. Les tachyons pour $s < 0$, les variables cachées pour $a < 0$, l'antigravitation pour $g < 0$. (Fig 3.2)

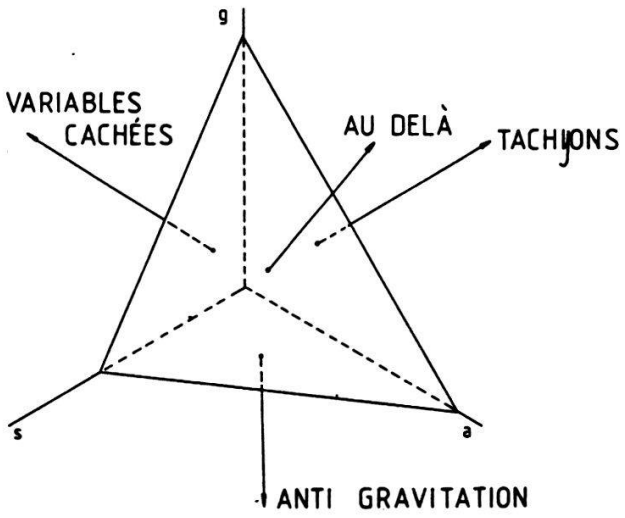


FIG. 3.2

Les arêtes nécessitent la synthèse des théories que les 2 plans qui les définissent comportent.

On aura la gravitation quantique sur l'axe s, la relativité générale sur l'axe a, la théorie quantique des champs sur l'axe g. Ces théories sont difficiles parce que les concepts mathématiques adéquats pour les 4 faces du tétraèdre sont de natures différentes.

Espaces fonctionnels pour la mécanique quantique, espace temps de métrique indéfinie pour la relativité restreinte, univers courbé [1] pour la cosmologie, géométrie pseudo Riemannienne pour la gravitation.

Si les arêtes sont des zones difficiles que dire des sommets ?

L'origine des axes correspond aux 3 unités de Planck. On peut l'appeler point de Planck. Beaucoup de cosmologues pensent qu'à l'origine du Big-Bang l'univers était concentré dans un volume caractérisé par les valeurs des coordonnées de Planck. C'est un point d'extrême agitation.

1) Si l'espace des théories cosmologiques est pratiquement plat, l'espace temps ou univers est courbe. (voisinage du rayon de Schwarzschild !)
Le point $s = s_{max}$ est un point de calme absolu.
Le point $g = g_{max}$ est un point d'extrême légèreté.
Le point $a = a_{max}$ est un point d'extrême lourdeur.

4. Le système MKS dans l'univers

Les unités internationales mètre, kilogramme, et seconde ainsi que leurs dérivés immédiats comme le joule, le Newton etc. se sont imposés comme unités pratiques à l'échelle de l'homme.

Le point MKS, intersection de tous les plans correspondants à ces unités et à leur produits à des puissances quelconques se situe bien au milieu du tétraèdre. En unités logarithmiques, l'homme est bien au centre de l'univers dimensionnel.

Quant au choix mètre, seconde, kilogramme il apparaît assez mal choisi relativement à nos critères de comparaison avec les constantes des lois fondamentales de la physique. En particulier, mètre et seconde sont certes transverses mais très loin de l'orthogonalité sur cette vue. Cela explique l'allure compliquée des diagrammes du § 2.

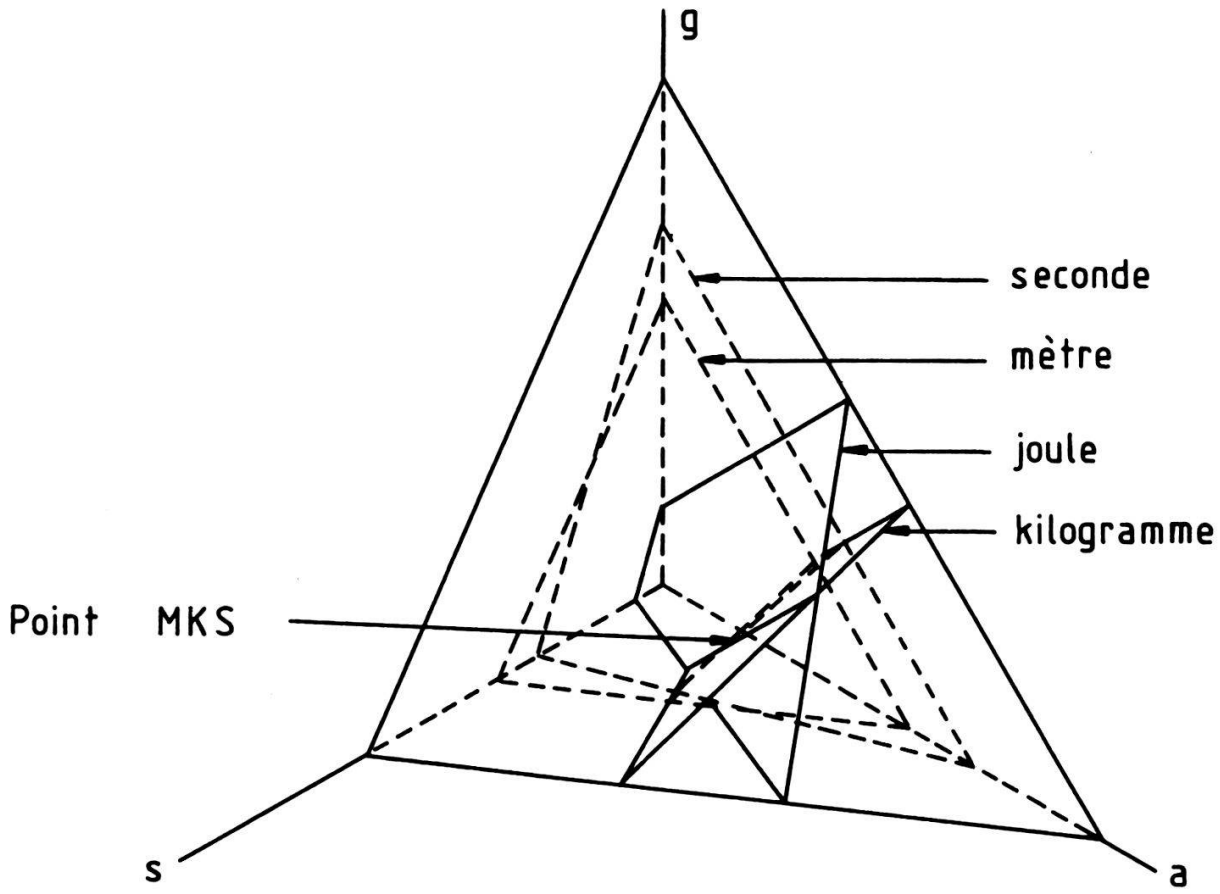


Fig. 4.1

5. Les plans des masses

Sur la fig. 5.1, sont reportés deux plans parallèles qui correspondent à la masse m_e de l'électron et l'unité de 1 kg. Ces deux masses ont des propriétés physiques qualitativement différentes parce que l'électron a une masse plus faible que la masse de Planck et que le kg est une masse plus élevée que la masse de Planck.

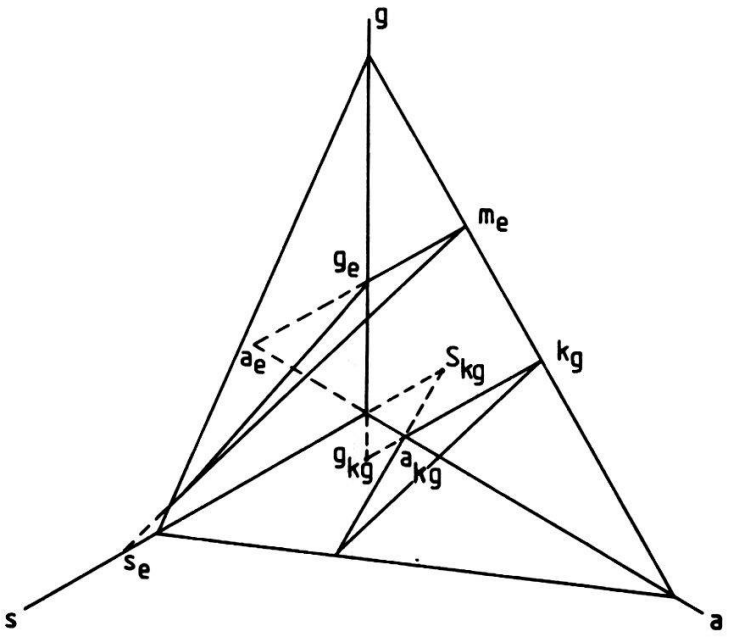


Fig. 5.1

Pour expliciter cette différence qualitative considérons les intersections des axes s, a et g avec ces plans. Ces points sont identifiés à l'aide d'une notation évidente sur la figure. On dira qu'une telle intersection est physique si elle est située sur une arête du tétraèdre et non physique si elle se situe sur un prolongement. On lit sur la figure

	s	a	g
masse électron m_e	non physique	non physique	physique
masse unité 1 kg	non physique	physique	non physique
		Schwarzschild	Compton

L'intersection avec l'axe a nous met dans un domaine gravitationnel relativiste. On vérifie qu'un tel point génère un système d'unités dont la

longueur est le rayon de Schwarzschild de la solution des équations d'Einstein. S'il est possible de concentrer ce kg de matière à l'intérieur d'un tel rayon, on aura un trou noir.

En revanche, le point de Schwarzschild de l'électron est loin au-dehors du tétraèdre et si on tentait de comprimer un électron dans un volume si petit, il s'évaporerait par effet tunnel quantique.

L'intersection avec l'axe g nous met dans un domaine relativiste et quantique, dominé par la longueur ou la fréquence de Compton. Ces grandeurs sont physiquement significatives pour l'électron mais ne le sont pas pour l'unité de masse. Des effets gravifiques domineraient d'éventuels effets quantiques relativistes.

Les points s_{m_e} et s_{kg} représentent les caractéristiques de l'atome de Bohr gravitationnel qu'on formerait avec 2 masses ponctuelles électriquement neutres de masses correspondantes. Pour 2 électrons, ce rayon de Bohr dépasse le rayon de l'univers et pour des masses de l'ordre du kg l'atome gravitionnel devient plus petit que la longueur de Planck !

Sur la figure 5.2 sont reportés les plans de quelques masses caractéristiques. Il s'agit de plans parallèles allant de la masse m_γ du photon (limite cosmique) à la masse totale de l'univers qui coïncide avec le sommet a_{max} du tétraèdre.

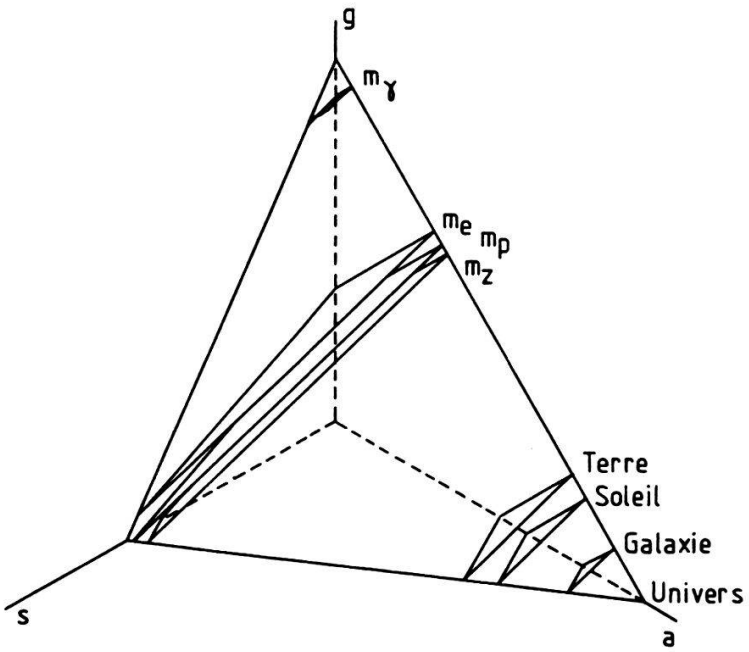


Fig. 5.2

Sur ce dessin apparaît une coïncidence intéressante. Les masses des particules qui constituent la matière sont telles que leurs plans représenta-

tifs coupent l'axe s en des points voisins de l'infiniment CALME ou limite statique.

Ainsi, l'échelle des masses des particules constituantes de la matière de l'univers semble telle que les "atomes gravitationnels" qu'elle pourrait former auraient un rayon de Bohr voisin du rayon de l'univers. En formule, cette coïncidence dit que les 4 grandeurs m_p, R, $\hbar$, G sont reliées par une relation simple :

$$\frac{m_p^3 RG}{\hbar^2} \simeq 6 \cdot 10^3$$

Sous cette forme, la vitesse de la lumière n'intervient pas dans cette relation non relativiste extrême.

La valeur $6 \cdot 10^3$ doit être considérée comme voisine de l'unité si l'on pense que la masse typique apparaît au cube, que le rayon de l'univers est entaché d'erreur et qu'une théorie qui dépasserait l'analyse dimensionnelle faite ici devrait fixer des facteurs géométriques contenant des puissances 2π ou même 4π. En particulier, si nous voulions appliquer cette formule à la masse des quarks constituants du proton, de masse de l'ordre 10^{-2} mp, le nombre sans dimensions passerait à 10^{-3} environ.

De telles relations entre l'infiniment petit et l'infiniment grand ont passionné physiciens et astronomes sans déboucher sur une interprétation universellement reconnue.

La relation ci-dessus, isssue de notre observation géométrique d'intersection de différents plans s'obtient aussi à partir des remarques de Dicke qui considère, à la suite de Dirac, la coïcidence de 3 grands nombres

$$\frac{\hbar c}{m_p^2 G} \approx 2 \cdot 10^{38} \qquad (1)$$

$$T \frac{m_p c^2}{\hbar} \approx 10^{42} \qquad (2)$$

$$\frac{M}{m_p} \simeq 10^{80} \qquad (3)$$

(1) est une mesure de la relative faiblesse de l'interaction gravitationnelle vis-à-vis des autres ($\hbar c$ a la dimension d'une charge électrique au carré).

(2) est le nombre d'oscillations Compton d'un proton sur une durée égale à l'âge de l'univers.

(3) est pratiquement le nombre de particules massiques dans l'univers accessible.

La parenté numérique de ces grands nombres fait l'objet de passionnantes spéculations. Les plus crédibles mettent en évidence la nécessité de ces coïncidences pour assurer l'existence d'êtres pensants dans l'univers. [Voir R.H. Dike, Nature 192 (4) 440 (1961)]. En effectuant le produit de (1) avec (2) on obtient notre relation géométrique à condition d'identifier R à cT.

Du côté des grandes masses, on voit sur la figure 5.2 que le plan masse de l'univers frôle le point a_{max}. En d'autres termes le rayon de Schwarzschild de l'univers entier coïncide pratiquement avec le rayon de l'univers. Sommes-nous à l'intérieur d'un trou noir ?

Encore une coïncidence vertigineuse pour l'esprit ?

6. La charge électrique et l'électron

Jusqu'ici, nous n'avons pas parlé des unités électriques. Il s'agit d'une question où les conventions jouent un rôle si important que d'excellents esprits vous diront que ce n'est qu'une question de convention.

Pour conserver notre représentation des grandeurs physiques par des plans d'un espace à 3 dimensions, il convient d'utiliser un artifice analogue aux définitions utilisées dans le système CGS de Gauss.

Dans le système MKSA il apparaît deux constantes physiques "universelles" ε_0 et μ_0 liées à la vitesse de la lumière

(6.1) $$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cong \frac{1}{\underline{c}^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}}\ \underline{m}^{-2}\ \underline{s}^2$$

On choisit μ_0 numériquement avec ses dimensions

(6.2) $$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \underline{kg}\ \underline{m}\ \underline{s}^2\ \underline{A}^2$$

Cela définit le courant en ampères. On introduit la tension électrique en volts V de manière à avoir une puissance en watts

(6.3) $$1\ VA = 1\ \underline{kg}\ \underline{m}^2\ \underline{s}^{-3}$$

On peut réécrire (6.2) sous forme plus électrique

(6.4) $$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A\ m}$$

Avec (6.1)
(6.5) $$\varepsilon_0 \simeq \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{A\ s}{V \cdot m}$$

Les grandeurs fondamentales qui apparaissent dans les équations de Maxwell ont les dimensions :

(6.6)
$$[\vec{E}] = Vm^{-1} \qquad [\vec{D}] = \frac{A\ s}{m^2} \qquad [\vec{B}] = \frac{V\ s}{m^2}$$
$$[\vec{H}] = \frac{A}{m} \qquad [\varrho] = \frac{A\ s}{m^3} \qquad [\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$$

Si on considère les changements d'unités

(6.7)
$$\check{\vec{E}} = \sqrt{4\pi\ \varepsilon_0}\ \vec{E} \qquad \check{\vec{D}} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \qquad \check{\varrho} = \frac{\varrho}{\sqrt{4\pi\ \varepsilon_0}}$$
$$\check{\vec{B}} = \frac{4\pi}{\mu_0}\ \vec{B} \qquad \check{\vec{H}} = \sqrt{4\pi\ \mu_0}\ \vec{H} \qquad \check{\vec{j}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\ \varepsilon_0}}\ \vec{j}$$

On vérifie sans peine que

(6.8)
$$[\check{\vec{E}}] = [\check{\vec{B}}] = [\check{\vec{D}}] = [\check{\vec{H}}] = \frac{\text{Joule}}{m^3} = \underline{kg}^{\frac{1}{2}}\ \underline{m}^{-\frac{1}{2}}\ \underline{s}^{-1}$$
$$[\check{\varrho}] = \underline{kg}^{\frac{1}{2}}\ \underline{m}^{-\frac{3}{2}}\ \underline{s}^{-1} \qquad [\check{\vec{j}}] = \underline{kg}^{\frac{1}{2}}\ m^{-\frac{1}{2}}\ s^{-2}$$

Les unités spécifiquement électriques ont disparu des grandeurs et aussi des équations de Maxwell qui s'écrivent pour les nouveaux champs

(6.9)
$$\operatorname{div} \check{\vec{B}} = 0 \qquad \operatorname{div} \check{\vec{D}} = 4\pi\ \check{\varrho}$$
$$\operatorname{rot} \check{\vec{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \check{\vec{B}}}{\partial t} = 0 \qquad \operatorname{rot} \check{\vec{H}} - \frac{\partial \check{\vec{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\ \check{\vec{j}}\ .$$

Ces relations sont identiques aux équations de Maxwell écrites dans le système CGS de Gauss. Les facteurs 4π simplifient les lois de forces mais

compliquent les équations. La vitesse de la lumière apparaît de façon naturelle dans le jeu entre l'électrostatique et le magnétisme, correction relativiste du 1e ordre de l'électrostatique.

C'est donc une formulation cohérente ne faisant apparaître aucune nouvelle constante fondamentale.

Au contraire, la charge électrique a la dimension

$$[\check{Q}] = (\mathrm{kg\ m^3\ s^{-3}})^{1/2} = [\mathrm{Joule} \cdot \mathrm{m}]^{1/2} = [\hbar \cdot c]^{1/2} \quad ,$$

et il existe donc déjà une unité naturelle de charge électrique !

Si nous appelons $\check{e}$ la charge de l'électron, on a

$$\alpha = \frac{\check{e}^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} = \text{Nombre pur} \tag{6.10}$$

C'est la célèbre constante de la structure fine de Sommerfeld.

Sur la figure 6.1, la charge et la masse de l'électron sont représentées. En pointillé, le produit $\hbar c$, mesure universelle d'interaction entre particules.

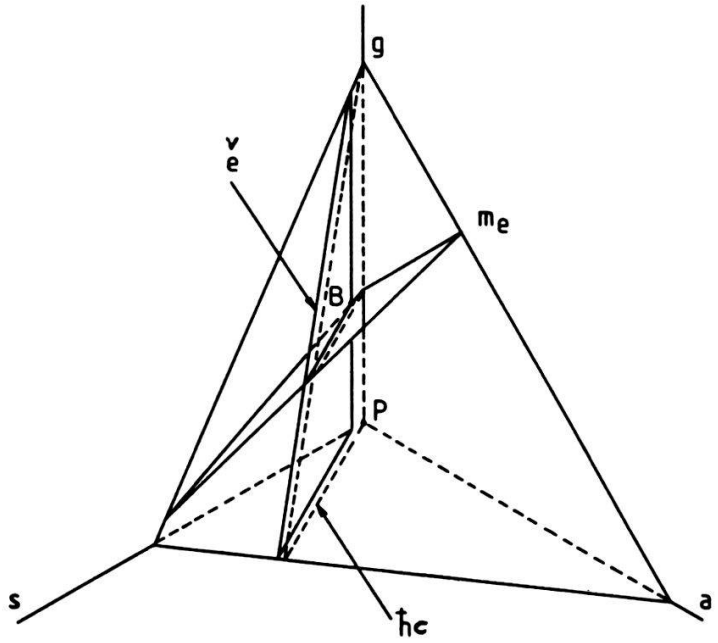


Fig. 6.1

L'intersection des plans $\check{Q} = \check{e}$, $m = m_e$, $a = 0$ définit un point, que nous appelerons B pour rappeler Niels Bohr. Il définit des unités utiles en physique atomique : rayon de Bohr, énergie de liaison de l'hydrogène, l'unité de vitesse $\frac{1}{137}$ montre que les corrections relativistes ne sont pas trop importantes pour les atomes.

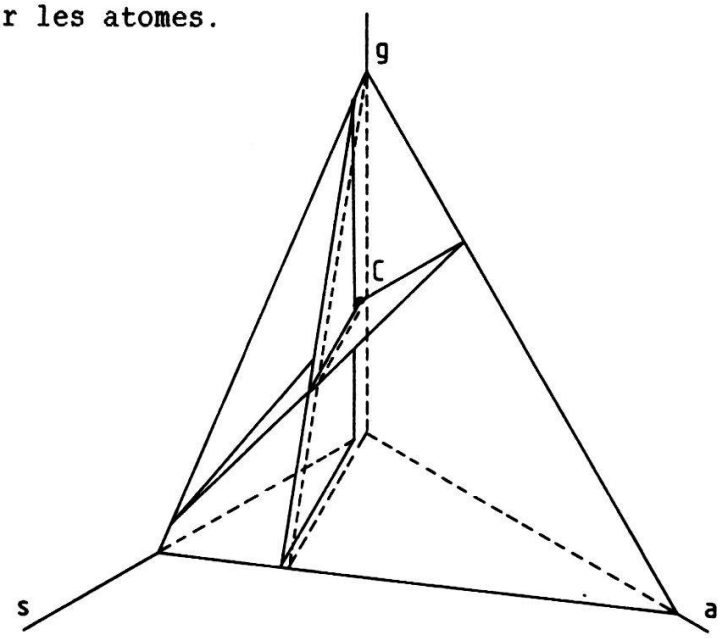


Fig. 6.2

Le point classique de l'électron

L'intersection des plans $\check{Q} = \check{e}$, $m = m_e$, $s = 0$ définit un point C (mis pour classique) au-dehors du tétraèdre. Il est reporté sur la figure 6.2. Avec $s = 0$, c'est un système d'unités relativistes dans le domaine dit des "variables cachées" au § 3. L'unité de longueur est alors le rayon classique de l'électron

$$\frac{\check{e}}{m_e\, c^2} = a$$

On peut étendre les unités électromagnétiques que nous avons définies aux grandeurs typiques de la théorie des circuits électriques : résistance, self et capacité. On remarque alors rapidement que les valeurs des paramètres ne sont pas limitées au tétraèdre universel.

Par exemple, la résistance électrique a la dimension de l'inversse d'une vitesse. Cette vitesse n'est pas physique donc pas limitée par la vi-

tesse de la lumière. Pour avoir une vitesse physique, il faut considérer le nombre de porteurs de charges qui peut varier par des facteurs de l'ordre de 10^{20}.

7. Les nombres purs

Ce sont des grandeurs physiques dites sans dimensions, c'est-à-dire dont les exposants des unités $\underline{m}^{\alpha}$ $\underline{kg}^{\beta}$ $\underline{s}^{\delta}$ sont nuls : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$.

On obtient, par exemple, un nombre pur par division de deux grandeurs de même nature (mêmes exposants α, β, δ). Dans notre représentation, il s'agit de 2 plans parallèles.

Pour représenter ces objets il faut adjoindre un axe réel à l'espace de nos plans. En effet, l'espace à l'infini de notre représentation projective est une droite réelle.

Notre tétraèdre des grandeurs physiques est donc incomplet. Il faut y adjoindre un axe disjoint pour y reporter les nombres purs, ou plutôt leurs logarithmes.

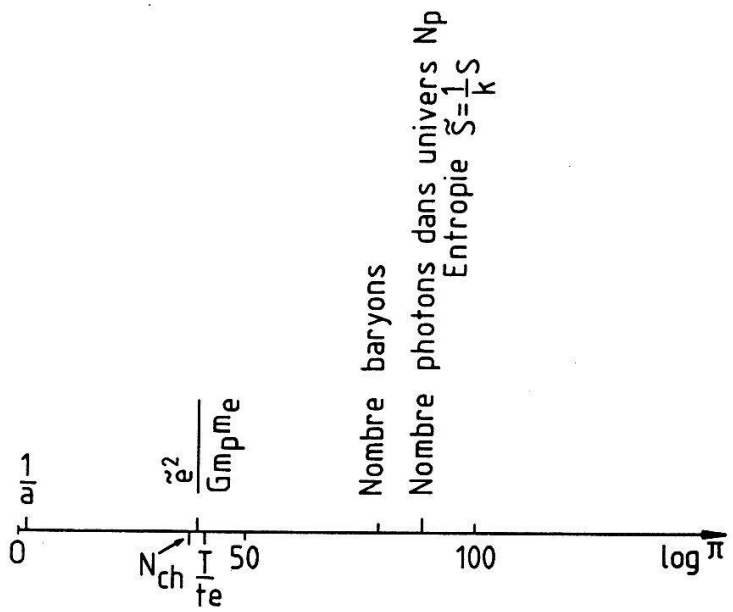
On peut convenir de prendre l'inverse des nombres purs < 1. Dans ce cas, la représentation n'utilisera que le ½ axe R_+.

Les nombres purs sont les enfants chéris de l'analyse dimensionnelle. On peut les ajouter, multiplier et diviser sans aucune restriction. On recommande souvent de ne considérer que des fonctions de nombres purs, ce que nous avons fait dans ce travail à l'exception des manipulations avec les logarithmes qui forment une classe spéciale en vertu de leurs propriétés.

Les nombres purs suivants s'imposent à l'esprit et il est assez remarquable que leurs logarithmes se groupent autour de zéro, quarante et quatre-vignt.

Ainsi, physiquement 10^{120} est un grand nombre pur. Il est intéressant de remarquer que les mathématiciens n'hésitent pas à aller bien au-delà ! Par exemple, la numérotation des symboles, expressions et théorèmes au moyen de nombres premiers et la multiplication de tels nombres dans la démonstration des théorèmes de Goedel fait apparaître des nombres beaucoup plus élevés encore.

DESIGNATION	SYMBOLE	NOMBRE	LOG
Nombre de photons dans l'univers $N = 0.244 \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \cdot V$	$N_{Photons}$	$1.4 \cdot 10^{88}$	88,14
Nombre de baryons dans l'univers $N_B = \frac{M}{m_p}$	$N_{Baryons}$	$8 \cdot 10^{78}$	78,90
Constante de structure fine $\alpha = \frac{\check{e}^2}{\hbar c}$	$\frac{1}{\alpha}$	137	2.137
Quotient de l'énergie de Coulomb par énergie de gravitation des atomes $\frac{\check{e}^2}{G\ m_p\ m_e}$		$2.27 \cdot 10^{+39}$	39,35
Age de l'univers en unité "naturelle" t_e $t_e = \frac{\check{e}^2}{m_e c^3}$	$\frac{T}{t_e}$	$5,4 \cdot 10^{40}$	40,73
Combinaison sans dimension qui fixe le nombre de baryons des étoiles à la limite de Chandrasekar $\frac{\hbar c}{G\ m_p^2}$	$N_{Chandr.}$	$1,69 \cdot 10^{38}$	38,22
Entropie de l'univers due au rayonnement $\frac{1}{k} S_{Univers} = \check{S}_{Photons}$	$\check{S}_{Photons}$	$4,7 \cdot 10^{88}$	88,67



Nombres purs

Fig. 7.1

Devant ces nombres de pensée pure, le physicien que je suis ressent comme un vertige. Qu'est-ce-qu'un nombre qui ne peut plus être compté à la manière d'un boulier même en faisant usage de chaque atome de l'univers ?

8. Considérations concernant le nombre minimum d'unités indépendantes

Actuellement, l'ensemble des grandeurs physiques se laisse décrire avec trois unités fondamentales indépendantes. Il est inutile d'en rajouter et le système de Planck a beau faire apparaître des nombres sans dimensions, il faut constamment savoir ce que l'on écrit et éviter d'ajouter une masse à un moment cinétique par exemple. La variété des grandeurs physiques est à quatre dimensions actuellement et elle semble vouloir le rester.

Est-ce une propriété analogue à notre espace ambiant dont chacun admet qu'il est à 3 dimensions, mais personne ne réussit à en donner la raison ?

Est-il imaginable qu'une découverte inattendue nous oblige à introduire de nouvelles unités indépendantes ?

Nous avons vu dans le cas de l'électromagnétisme que la charge électrique peut se contenter des 3 unités traditionnelles. Pour la thermodynamique il a été nécessaire de formaliser les questions de la température et de la quantité de chaleur. Finalement à l'aide de la mécanique statistique, température et chaleur ont trouvé leur interprétation en termes d'énergie. Il n'est pas indispensable d'ajouter le °K à la liste des unités.

Il est instructif de méditer sur le passage de la physique d'Archimède à celle de Newton du point de vue des dimensions. Ce point de vue est anti-historique puisque l'analyse dimensionnelle n'a été inventée que bien plus tard, ce qui n'en diminue pas l'intérêt !

La mécanique statique d'Archimède a besoin d'une unité de longueur et d'une unité de force (le poids). Ainsi il pouvait énoncer les lois des leviers et de l'hydrostatique. Avec ces éléments on peut déjà parler de travail, donc d'énergie, et aussi de moment de force.

Avec Galilée, la notion de temps entre dans la mécanique, mais il faut le génie de Newton pour passer de la statique à la dynamique. Pour cela il avait besoin d'une autre grandeur encore, la masse.

Ainsi, à la longueur et à la force, Newton a ajouté le temps et la masse. Il lui fallait au départ 4 unités et il pouvait énoncer que

$$\text{Force} \propto \text{Masse} \cdot \text{Accélération}$$

Pour faire de cette proportionnalité une égalité, il suffit d'une constante universelle λ_{Newton} de dimensions Force (Temps)^2 / Masse · Longueur. Il est habituel de choisir l'unité de force de telle manière que λ_{Newton} vaille numériquement 1. Nous avons alors le système à 3 unités.

Il est remarquable que la physique du 20e siècle s'est trouvée confrontée à la relativité qui impose une inégalité $v < c$ et à la théorie des quantas qui en impose une autre $\Delta_p \Delta_q > \hbar$. Ainsi $\hbar$ et c ont un statut tout-à-fait différent de λ_{Newton} qui impose une égalité et fait passer d'un système à 4 unités à un système à 3 unités.

3 unités de base : convention, commodité, loi physique, la discussion n'est pas close. Imaginer une nouvelle théorie portant sur des objets nouveaux nécessitant une nouvelle unité physique est un exercice fascinant pour l'esprit.

J'ai tenté l'exercice et je suis arrivé à la conclusion que sur le plan de l'analyse dimensionnelle aucune découverte de l'importance de celle

de Newton n'a été faite en dépit des apparences. Les succès ont plutôt été de réduire des lois portant sur d'autres domaines (température, quantité de chaleur, etc.) aux 3 unités fondamentales.

J'aurais tendance à affirmer que les 3 unités sont reliées à l'existence de 3 constantes c, ħ, G qui dominent la relativité, la mécanique quantique et la gravitation, constantes qui correspondent à des lois fixant des inégalités.

9. Remarques finales

Le lecteur attentif n'aura pas manqué d'être surpris par la discrétion des références à la thermodynamique. Je ne suis pas parvenu à l'intégrer au tétraèdre des lois physiques qui concerne plus particulièrement les lois microscopiques réversibles.

Dans l'interprétation statistique des phénomènes thermiques les nombres purs (nombre de particules ou de degrés de libertés) jouent un rôle déterminant. Ce n'est pas un hasard si la seule mention de l'entropie se trouve au § 7 où l'on parle de nombres purs.

La description complète de l'univers dimensionnel de la physique nécessite donc un récipient tétraèdrique gradué sur les arêtes et une règle divisée !

Remerciements

Ma gratitude va à mes collègues qui ont supporté mes longues divagations sur l'algèbre dimensionnelle avec tolérance et intérêt. Un merci tout spécial à M. Ch. Nussbaum qui a créé spécialement un programme d'ordinateur pour dessiner des plans sécants dans n'importe quelle perspective.

APPENDICES

A. Structure géométrique de la représentation

Les grandeurs physiques peuvent s'écrire sous la forme :

(A.1) $$q = 10^d \, \underline{m^\alpha \, kg^\beta \, s^\delta}$$

(Nous considérons uniquement les valeurs absolues)

Pour les représenter nous prenons le logarithme

$$\log q = \alpha \log \underline{m} + \beta \log \underline{kg} + \delta \log \underline{s} + d$$

$$= (\log \underline{m},\ \log \underline{kg},\ \log \underline{s},\ 1) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix}$$

Il y a une relation biunivoque entre la grandeur physique q et la liste de 4 réels :

$$q \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix} \in R_4$$

Nous avons un espace vectoriel parce que

$$q = q_1 \cdot q_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

et

$$q = q_0^{\lambda} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \delta_0 \\ d_0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in R$$

La somme de deux grandeurs physiques est plus compliquée. Si q_1 et q_2 sont de même dimensionnalité

$$q_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d_1 \end{pmatrix} \qquad q_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d_2 \end{pmatrix}$$

alors la somme a un sens et

$$q = q_1 + q_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \log\ (10^{d_1} + 10^{d_2}) \end{pmatrix}$$

Ce logarithme est donné en 1e approximation par le plus grand $d \tilde{=} \text{Max}\ (d_1, d_2)$. En effet, supposons $d_1 > d_2$

$$d = \log 10^{d_1} (1 + 10^{d_2-d_1}) = \underbrace{\log 10^{d_1}}_{d_1} + \underbrace{\log (1 + 10^{d_2-d_1})}_{<\log 2 = 0,3}$$

Représentation projective

Pour visualiser les relations d'ordres de grandeurs il est nécessaire d'appréhender cet espace de dimension 4 au moyen de diverses projections. Il y aura nécessairement perte d'information. Je choisis de considérer le vecteur (α,β,δ,d) comme les coordonnées homogènes d'un plan de coordonnées (ℓ,m,t) de l'espace R_3

(A.2) $$a\ell + \beta m + \delta t = d$$

Visiblement, le plan ainsi construit ne détermine pas complétement la grandeur physique q. En effet, si $\lambda \neq 0$

$$q^{\lambda} \rightarrow a\ell + \beta m + \delta t = d$$

plan indépendant de λ.

Si $\alpha = \beta = \delta = 0$ (nombre pur) le plan dégénère en la droite à l'infini.

On obtient l'équation du plan qui correspond à une grandeur physique en étudiant les possibilités d'obtenir sa valeur par produits de grandeurs des différentes unités choisies comme base. Dans le système MKS, on écrira :

(A.3) $$q = (10^{\ell}\ \underline{m})^{\alpha}\ \ (10\ \ \underline{kg})^{\beta}\ \ (10\ \ \underline{s})^{\delta}$$

Qui doit être égal à (A.1). En prenant les logarithmes de ces deux écritures; on retrouve (A.2)

(A.2) $$d = \alpha\ell + \beta m + \delta t$$

Les expressions formelles log $\underline{m}$, log $\underline{kg}$ et log $\underline{s}$ disparaissent. Quant à d, il vaut

(A.4) $$d = \log \frac{q}{\underline{m}^{\alpha}\ \underline{kg}^{\beta}\ \underline{s}^{\delta}}$$

Au produit de deux grandeurs correspond un plan qui passe par l'intersection des plans correspondants aux facteurs. Cette intersection commune est un axe. Il n'est malheureusement pas possible de préciser davantage parce que la correspondance quantité physique - plan Euclidien n'est pas univoque. Les puissances d'une quantité physique sont appliquées sur le même plan.

Les points de notre espace sont donnés par l'intersection de 3 plans, donc par 3 grandeurs indépendantes. A un système d'unités, correspond donc un point.

B. Relations entre unités MKS et de Planck

Le système de Planck donne le rôle d'unités à la vitesse de la lumière c, à la constante de Planck ħ, et à la constante de gravitation G. Physiquement c est une limite supérieure, alors que ħ et G sont des limites inférieures, aussi, c'est l'inverse de c que nous considérerons comme unité pour notre description. Pour les besoins de cet appendice, nous noterons par une barre supérieure la valeur numérique d'une grandeur exprimée en unités MKS. Les constantes physiques c, ħ et G prennent le statut d'unités et elles seront soulignées.

$$\underline{c} = \bar{c}\ \underline{m}\ \underline{s}^{-1} \qquad \bar{c} = 3 \cdot 10^{8} \qquad = 10^{8.477}$$

(B.1) $$\underline{\hbar} = \bar{\hbar}\ \underline{m}^{2}\ \underline{kg}\ \underline{s}^{-1} \qquad \bar{\hbar} = 1{,}0546 \cdot 10^{-34} \qquad = 10^{-33.977}$$

$$\underline{G} = \bar{G}\ \underline{m}^{3}\ \underline{kg}^{-1}\ \underline{s}^{-2} \qquad \bar{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \qquad = 10^{-10.176}$$

En analogie ave (A.3) on posera

(B.2) $$q = (10^{s}\ \underline{c}^{-1})^{\xi}\ (10^{a}\ \underline{\hbar})^{\eta}\ (10^{g}\ \underline{G})^{\zeta} = 10^{D}\ \underline{c}^{-\xi}\ \underline{\hbar}^{\eta}\ \underline{G}^{\zeta}$$

Ce qui livre l'équation du plan dans ces coordonnées en prenant le logarithme

(B.3) $$D = d\ \xi + a\ \hbar + g\ \zeta$$

A l'aide de (B.1) on peut exprimer log q dans le repère MKS et égaler au logarithme de (A.1)

$$\log q = D + \xi \log \frac{1}{\underline{c}} + \eta \log \underline{\hbar}\ 11\ \zeta \log \underline{G}$$

$$
\begin{aligned}
&= D + \xi(-\log \bar{c} - \log \underline{m} + \log \underline{s}) \\
(B.4) \qquad &= \quad + \eta(\log \bar{\hbar} + 2 \log \underline{m} + \log \underline{kg} - \log \underline{s}) \\
&= \quad + \zeta(\log \bar{G} + 3 \log \underline{m} + \log \underline{kg} - 2 \log \underline{s}) \\
&= d + \alpha \log \underline{m} + \beta \log \underline{kg} + \delta \log \underline{s}
\end{aligned}
$$

(B.4) est une identité symbolique et il faut annuler les coefficients des logarithmes des unités.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\xi + 2\eta + 3\zeta \\
\beta &= \eta - \zeta \\
\delta &= \xi - \eta - 2\zeta \\
d &= -\xi \log \bar{c} + \eta \log \bar{\hbar} + \zeta \log \bar{G} + D
\end{aligned}
$$

C'est une relation linéaire que nou pouvons mettre sous forme matricielle

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -\log \bar{c} & \log \bar{\hbar} & \log \bar{G} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ D \end{pmatrix}
$$

D'inverse

$$
\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 2,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ \log \dfrac{\bar{c}^{3/2}}{\bar{\hbar}^{1/2}\,\bar{G}^{1/2}} & \log \dfrac{\bar{G}^{1/2}}{\bar{c}^{1/2}\,\bar{\hbar}^{1/2}} & \log \dfrac{\bar{c}^{\,5/2}}{\bar{\hbar}^{1/2}\,\bar{G}^{1/2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ d \end{pmatrix}
$$

On retrouve les expressions des unités de Planck

$$
l = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \qquad m = \left(\frac{c\hbar}{G}\right)^{1/2} \qquad \tau = \left(\frac{\hbar\, G}{c^5}\right)^{1/2}
$$

auxquelles on peut adjoindre l'unité de force qui en dévrive

$$
f = \frac{c^4}{G} = 1,2 \cdot 10^{36} \text{ Newton}
$$

Cette force est une limite physique supérieure.

C. Répertoire des lois et grandeurs physiques citées

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} = \text{vitesse de la lumière}$$

On sait qu'il s'agit d'une vitesse limite infranchissable qui peut jouer le rôle d'unité intrinsèque de vitesse. c domine la relativité.

$$\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1} = \text{constante de Planck}$$

Cette constante domine la mécanique quantique. On se souviendra des incertitudes d'Heisenberg

$$\Delta p \, \Delta q = m \, \Delta v \cdot \Delta q \geqslant \hbar$$

qui limitent l'applicabilité des concepts de la mécanique classique au niveau microscopique.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = \text{constante de gravitation}$$

Elle donne la force d'attraction entre 2 masses m_1 et m_2 distantes de r par la loi de Newton

$$f = -\frac{G \, m_1 m_2}{r^2}$$

$$H = 2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = \text{constante de Hubble}$$

Elle mesure la vitesse moyenne de fuite des galaxies en raison de leur distance selon la loi de Hubble

$$V = H \, d$$

Elle définit une distance (R = rayon de l'univers) à partir de laquelle aucun signal ne peut nous parvenir dès que $v \geqslant c$ = vitesse de la lumière. Ce rayon définit l'horizon

$$R = c \, H^{-1}$$

L'ordre de grandeur de l'âge de l'univers est donné par l'inverse de H. Sans plus de détails, on admettra ici

$$T = H^{-1} \cong 5 \cdot 10^{17} \text{ s} = \text{Age de l'univers.}$$

Certains nombres purs sont abordés au § 7. Je ne les discute pas à nouveau dans cet appendice.

Pour en savoir plus:

Analyse dimensionnelle

- Encyclopaedia Universalis, Paris 1984, Vol. 6, p. 221

Mécanique classique

- R.H. Abraham and C.D. Shaw, Dynamics (5 vols) R.H. Abrahm éd., University of California, Santa Cruz, 1983
- V. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions de Moscou, 1976
- P. Huguenin et J. Beiner, Cours de mécanique, Université de Neuchâtel, 1978

Mécanique quantique

- A.B. Migdal, Qualitative Methods in Quantum Theory, W.A. Benjamin ed. IMC 1977

Relativité

- L. Landau et E. Lifchitz, Théorie des champs, Editions MIR, Moscou 1970

Cosmologie

- G. Contopoulos and D. Kotsakis, Cosmology, the Structure and Evolution of the Universe, Springer Verlag, 1987