Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 71 (1998)

Heft: 5

Artikel: Localisation des états de surface pour une classe d'opérateurs de Schrödinger discrets à potentiels de surface quasi-périodiques

Autor: Boutet de Monvel, Anne / Surkova, Anna

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-117117

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Helv. Phys. Acta 71 (1998) 459 – 490
0018-0238/98/050459-32 $ 1.50+0.20/0
© Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

Helvetica Physica Acta

Localisation des états de surface pour une classe d'opérateurs de Schrödinger discrets à potentiels de surface quasi-périodiques

par

Anne Boutet de Monvel

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 9994, Physique mathématique et Géométrie
Université Paris 7, case 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05
& Mathematical Division, B. Verkin Instit., 47 Lenin Av., 310164, Kharkiv, Ukraine

et Anna Surkova

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 9994, Physique mathématique et Géométrie
Université Paris 7, case 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05
& Mathematical Division, B. Verkin Instit., 47 Lenin Av., 310164, Kharkiv, Ukraine

(8.VII.97)

Abstract.

We consider the discrete Schrödinger operator in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ whose potential is an unbounded quasi-periodic function concentrated on a proper subspace $\{0\} \times \mathbb{Z}^m$ $(m < d)$. Under the condition that the potential satisfies a certain version of the small divisors condition, it is proved that the part of the spectrum lying far enough from the spectrum of the free Laplacian is pure point, dense and has multiplicity one and the corresponding eigenfunctions decay exponentially.

1 Introduction

De nombreux problèmes de la physique des ondes et des solides et de la théorie spectrale mènent à la résolution d'équations différentielles et d'équations aux différences finies dont les coefficients sont concentrés au voisinage d'une surface (ou, plus généralement, d'un sous-espace) de l'espace considéré. Il s'avère que dans certains cas les équations de ce type admettent des solutions qui décroissent exponentiellement le long des directions orthogonales à la surface (au sous-espace). De telles solutions sont souvent appelées "ondes de surface" ou encore "états de surface".

L'étude des ondes de surface a commencé il y a plus de cent ans après que Rayleigh eut découvert en 1887 deux types de modes propres d'un demi-espace (voir [8])

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(\xi, x),\ \xi \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^2\}$$

homogène, isotrope et élastique:

(i) des modes qui oscillent et dont l'amplitude ne décroît à l'infini en aucune des variables spatiales, appelés *"ondes de volume"*;

(ii) des modes qui sont des ondes planes en la variable x et qui décroissent exponentiellement en la variable ξ, appelés *"ondes de surface"*.

Les résultats de Rayleigh ont eu des applications dans la théorie de la propagation des ondes sismiques et, plus tard, dans de nombreux domaines de la physique des états condensés. Après la découverte de Rayleigh, on a trouvé des ondes de surface acoustiques dans des milieux stratifiés, en particulier, dans le cas de deux demi-espaces homogènes et élastiques à constantes d'élasticité différentes. Au début du siècle, à propos de l'étude de la propagation des ondes autour de la surface de la Terre, l'école de Sommerfeld a découvert des solutions analogues pour les équations de Maxwell.

Ces résultats traduisent une propriété assez générale des solutions d'équations différentielles et d'équations aux différences finies qu'on peut appeler *"principe de localisation"* et qu'on peut formuler ainsi: *si les coefficients d'une équation possèdent une inhomogénéité assez forte, il peut exister des solutions localisées (en général de façon exponentielle) près de cette inhomogénéité.*

Dans les années 40, ce principe a été appliqué par I. Lifshitz [6] dans ses études de la dynamique des cristaux contenant des défauts de dimension inférieure à 3. Il a trouvé des analogues cristallins des ondes de surface de Rayleigh, des "phonons de surface", non seulement dans la bande acoustique mais aussi dans des bandes optiques. Ses résultats sont à la source de nombreuses applications techniques dans le traitement du signal haute fréquence, dans l'acoustique optique, dans la physique des semi-conducteurs, etc.

Ces travaux considèrent la surface qui porte le potentiel comme idéale et homogène, alors que, dans des conditions réelles, toute surface possède une certaine rugosité. Dans la plupart des cas, cette rugosité peut être considérée comme aléatoire. Elle peut être due à

des crissements ou à une incommensurabilité, ce qui donne souvent des surfaces ondulées de façon périodique ou presque périodique.

Il est intéressant d'étudier les effets de cette rugosité dans la dynamique de la surface cristalline, en particulier sur la propagation et la localisation des ondes.

Dans cet article, nous considérons le cas particulier du régime de localisation forte, c'est-à-dire le cas où le degré de rugosité est assez élevé, et nous considérons aussi le cas où l'énergie est proche des extrémités du spectre de l'opérateur correspondant.

Nous présentons un modèle discret quasi-périodique qui donne une localisation exponentielle des états de surface. Dans la théorie mathématique de la localisation on connaît déjà quelques résultats semblables (Grinshpun [4], Aizenman et Molchanov [1], Jaksić, Molchanov et Pastur [5]) pour une surface aléatoirement rugueuse, modélisée par un opérateur de Schrödinger discret avec une condition au bord.

Soit $d \geq 2$ un entier, et soit h_0 le laplacien discret défini dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ par

$$(h_0 u)(X) = - \sum_{\substack{Y \in \mathbb{Z}^d \\ \|Y-X\|=1}} u(Y) \tag{1.1}$$

où $\|Y - X\| = \sum_{i=1}^d |Y_i - X_i|$. On considère un opérateur de Schrödinger discret défini dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ par

$$h = h_0 + V \tag{1.2}$$

où V est un potentiel "porté par un sous-espace", et que nous allons définir. Soient $1 \leq \nu < d$ et $1 \leq m < d$ deux entiers tels que $\nu + m = d$. On écrit $\mathbb{Z}^d$ comme le produit cartésien:

$$\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^{\nu+m} = \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^m = \{X = (\xi, x),\ \xi \in \mathbb{Z}^\nu,\ x \in \mathbb{Z}^m\}.$$

Soient $\{v(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$ une suite réelle et $\delta(\xi)$ la fonction définie sur $\mathbb{Z}^\nu$ par $\delta(\xi) = 1$, si $\xi = 0$, et 0 sinon.

On appelle *potentiel porté par un sous-espace* l'opérateur V de multiplication par la suite

$$v(\xi, x) = \delta(\xi) v(x), \quad (\xi, x) \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.3}$$

Un tel potentiel V est concentré sur le sous-espace

$$\{0\} \times \mathbb{Z}^m = \{(\xi, x) \in \mathbb{Z}^d \,|\, \xi = 0\} \tag{1.4}$$

appelé *sous-espace du potentiel*. Dans le cas particulier où $d = 3$ et $m = 2$, le sous-espace (1.4) est une "surface" dans $\mathbb{Z}^3$ et l'on parle de *potentiel de surface*.

On s'intéresse aux propriétés spectrales de l'opérateur h. Autrement dit, on cherche les solutions $(\lambda,\ u_\lambda)$ du problème:

$$h u_\lambda = \lambda u_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Le résultat principal de l'article dit que, sous certaines hypothèses, *il existe un $\lambda_0 > 0$ tel qu'en dehors de l'intervalle $[-\lambda_0,\ \lambda_0]$ le spectre de l'opérateur h soit purement ponctuel et*

que toutes les fonctions propres u_λ correspondantes décroissent exponentiellement à l'infini en ξ et en x.

Le plan de l'article est le suivant. La section 2 contient l'énoncé du résultat principal, et les définitions préliminaires indispensables. Dans la section 3 nous donnons quelques brèves explications sur la démonstration de ce résultat, tandis que dans les sections 4 et 5 nous en donnons les détails. Une annexe contient enfin les preuves de lemmes auxiliaires utilisés dans la démonstration.

2 Définitions. Résultat principal

Avant d'énoncer le résultat principal, nous indiquons d'abord les hypothèses qui vont y intervenir. Ces hypothèses portent sur la suite

$$\{q(x) = v^{-1}(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\} \tag{2.1}$$

qui est l'inverse du potentiel, elles viennent du *problème des petits diviseurs* qui a ses origines dans la théorie des perturbations des systèmes d'équations différentielles non-linéaires et a beaucoup d'applications en théorie spectrale. La classe de suites que nous considérons est un cas particulier des suites définies dans l'article de Pőschel [7] sous l'appellation "stable distal sequences".

2.1 Forme quasi-périodique

La suite $q(x)$ sera supposée *quasi-périodique*, i.e. de la forme

$$q(x) = f(\omega \cdot x), \tag{2.2}$$

où $x \in \mathbb{Z}^m$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique de période 1, où $\omega \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m$ et où $\omega \cdot x = \sum_{i=1}^m \omega_i x_i$.

2.2 Condition diophantienne

Elle porte sur ω. C'est une généralisation due à Rűssemann [10] de la condition diophantienne classique. Elle suppose le choix préalable d'une "fonction d'approximation".

Définition 1 On appelle *fonction d'approximation* une fonction continue $\Omega : (0, \infty) \to (1, \infty)$ telle que, si l'on pose

$$\Phi(\sigma) = \sigma^{-4m} \sup_{r \geq 0} \Omega(r) e^{-\sigma r} < +\infty \tag{2.3}$$

$$\Psi(\sigma) = \inf_{S_\sigma} \prod_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\sigma_\nu)^{2^{-\nu-1}} < +\infty, \tag{2.4}$$

où dans (2.4) l'infimum porte sur l'ensemble S_σ des suites $\sigma_0 \geq \ldots \geq \sigma_\nu \geq \ldots \geq 0$ telles que $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu \leq \sigma$, alors $\Phi(\sigma)$ et $\Psi(\sigma)$ sont finis pour tout $\sigma > 0$.

Définition 2 On dit que ω vérifie la *condition diophantienne* s'il existe une fonction d'approximation Ω telle que

$$\|\omega \cdot x\| \geq \Omega^{-1}(|x|), \text{ pour tout } x \neq 0. \tag{2.5}$$

Exemple 1 L'exemple le plus simple de fonction d'approximation est le suivant (voir [10]):

$$\Omega(s) = s^\tau, \ s \geq 1 \ \tau \geq m - 1.$$

Dans ce cas, si l'on considère la suite $\sigma_\nu = 2^{-\nu-1}\sigma$ on obtient

$$\Psi(\sigma) \leq c\sigma^{-4m-\tau}$$

où c est une constante qui ne dépend que de τ et de la dimension m. De plus, pour une telle fonction d'approximation Ω, la condition (2.5) n'est autre que la condition diophantienne classique. Pour $m > 1$, les produits scalaires $x \cdot \omega$, pour $x \in \mathbb{Z}^m$, sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2 Voici un autre exemple de fonction d'approximation [10]:

$$\Omega(s) = \begin{cases} \Omega(s_0) & \text{pour } 0 < s < s_0 = e^{1+\alpha}, \\ c\exp\left(\frac{-s}{\log^{1+\alpha} s}\right) & \text{pour } s \geq s_0 \end{cases}$$

avec un $c > 0$. On a alors:

$$\Psi(\sigma) \leq \frac{2}{c} \exp\left(\sigma \exp\left(\frac{1}{\alpha\rho \log 2}\right)^{1/2}\right)$$

pour un α et un ρ tels que $0 < \alpha \leq 1/2$ et $0 < \rho \leq 1$.

Dans le cas général on a un critère assurant qu'une fonction Ω est une fonction d'approximation.

Proposition 1 ([10]) *Soit $\Omega : (0, \infty) \to (1, \infty)$ une fonction continue. Si la fonction $\omega(r) = \log \Omega(r)$ vérifie:*

$$\begin{aligned} &0 \leq \omega(r) \leq \omega(r'), && 0 \leq r \leq r', \\ &\frac{\omega(r)}{r} > \frac{\omega(r')}{r'} \to 0, && 0 \leq r < r' \to \infty, \\ &\frac{1}{\log 2} \int_s^\infty \frac{\omega(r)dr}{r^2} \leq \sigma, \end{aligned}$$

alors,

$$\Psi(\sigma) \leq \left(\frac{4s}{\omega(s)}\right)^{4m} e^{\sigma s}.$$

2.3 Condition de petits diviseurs

Cette condition, de nature technique, est la plus essentielle. Son utilité apparaîtra plus clairement dans la démonstration du résultat principal.

Définition 3 Soit $\mathscr{F}$ une algèbre de Banach de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ dont la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{F}}$ soit invariante par les translations définies par $(T_{\omega\cdot x}\varphi)(t) = \varphi(t+\omega\cdot x)$. Soit $\omega \in \mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Q}^m$. On suppose que ω vérifie la condition diophantienne 2.5 relativement à une fonction d'approximation Ω. Soit f une fonction quelconque, n'appartenant pas nécessairement à $\mathscr{F}$). On dit que f vérifie *la condition de petits diviseurs* s'il existe un nombre $\tau \in (0,1)$ tel que, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $\varphi - f \in \mathscr{F}$ et que $\|(\varphi - f)\|_{\mathscr{F}} \leq \tau < 1$, on ait

$$(\varphi - T_{\omega\cdot x}\varphi)^{-1} \in \mathscr{F} \text{ et } \|(\varphi - T_{\omega\cdot x}\varphi)^{-1}\|_{\mathscr{F}} \leq \Omega(|x|) \tag{2.6}$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$.

Remarque 1 On peut observer que cette condition de petits diviseurs implique une certaine singularité de la fonction f. Il suit en particulier de la définition que f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, toute fonction f qui vérifie cette condition doit possède obligatoirement la propriété suivante:

$$\sup_{r\in[0,1]} |f(r)| \geq \frac{1}{2\Omega(|x|)} \tag{2.7}$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^m$. Il suit en effet de (2.6) que

$$\Omega(|x|) \geq \|(f - T_{\omega\cdot x}f)^{-1}\|_{\mathscr{F}} \geq \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{|f(t) - (T_{\omega\cdot x}f)(t)|} \geq \frac{1}{2\sup_{r\in[0,1]}|f(r)|}$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^m$.

Voici un exemple qui illustre les définitions précédentes (voir [7]). Soit $r > 0$, et soit $\mathscr{H}_r$ l'espace des fonctions analytiques réelles définies sur la bande horizontale $S_r = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < r\}$, périodiques de période 1, et de dérivée bornée. On pose

$$\|\psi\|_{\mathscr{H}_r} = \sup_{z\in S_r} |\psi(z)| + \sup_{z\in S_r} |\psi'(z)|.$$

$\mathscr{H}_r$ est évidemment une algèbre de Banach invariante par translation. La fonction f définie par $f(z) = \tan \pi z$ est réelle, méromorphe, et périodique de période 1, mais elle n'appartient pas à $\mathscr{H}_r$. Il est pourtant facile de voir que f vérifie la condition de petits diviseurs ci-dessus.

2.4 Enoncé du résultat principal

Théorème 1 *Soit $h = h_0 + V$ un opérateur de Schrödinger discret dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ défini par les formules* (1.1)-(1.2) *avec un potentiel V porté par le sous-espace* (1.4). *Supposons que la suite inverse du potentiel $\{q(x) = v^{-1}(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$ est de la forme $q(x) = f(\omega \cdot x)$ (voir* (2.2)*) et que:*

(i) *ω vérifie la condition diophantienne* (2.5) *avec une fonction d'approximation Ω;*

(ii) *la fonction f est continue sur* $[0, 1)$ *et a un seul zéro sur un intervalle de période;*

(iii) *la fonction f vérifie la condition de petits diviseurs pour Ω et pour un τ quelconque.*

Il existe alors un $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \tau) > 2d$ tel qu'en dehors de l'intervalle $[-\lambda_0,\ \lambda_0]$ le spectre de h soit purement ponctuel, dense, de multiplicité 1, *et que toutes les fonctions propres décroissent exponentiellement dans toutes les directions de $\mathbb{Z}^d$ (*i.e. *en ξ et en x).*

Remarque 2 Il est important de souligner que la classe des potentiels du théorème est assez grande. On peut citer comme exemple de suite $q(x)$ qui convient la suite $q(x) = \tan^{2p+1}(\pi\omega \cdot x)$ où $p \in \mathbb{N}$. Pour des exemples analogues, voir [2, 7].

3 Schéma de la démonstration

La démonstration du théorème comporte trois étapes:

A. Passage du problème (1.5) à un problème spectral dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$.

B. Etude de ce problème spectral, non linéaire en le paramètre spectral λ.

C. Application des résultats des sections précédentes à l'étude de la mesure spectrale de l'opérateur h.

3.1 Etape A

On applique un résultat général de théorie spectrale (voir [9]). Si A est un opérateur auto-adjoint et si $R_A(z)$ est sa résolvante, alors, pour tout opérateur auto-adjoint B, la résolvante R_{A+B} de la somme $A + B$ vérifie l'identité:

$$R_{A+B}(z) = R_A(z) - R_{A+B}(z) B R_A(z), \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Appliquons cette identité pour $A = h_0$ et $B = V$. Soient $g((\xi, x), (\eta, y); z)$ et $g_0(\xi - \eta, x - y; z)$ les coefficients matriciels respectifs des opérateurs $(h - \lambda)^{-1}$ et $(h_0 - \lambda)^{-1}$. Grâce à la structure particulière du potentiel l'identité précédente nous permet d'exprimer les

coefficients matriciels de la résolvante de h à partir de la résolvante du laplacien h_0 et de la suite $\{q(x) = v^{-1}(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$. Plus précisément:

Lemme 1 *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors*

$$g((\xi, x), (\eta, y); z) = g_0(\xi - \eta, x - y; z) - \sum_{x', y' \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - x'; z)\Gamma^{-1}(x', y'; \lambda) g_0(\eta, y' - y; z), \tag{3.1}$$

$$\Gamma(z) = \Gamma_0(z) + Q \tag{3.2}$$

où $\Gamma_0(z)$ est l'opérateur dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ qui a pour coefficients matriciels

$$\Gamma_0(x, y; z) = g_0(0, x - y; z), \quad x, y \in \mathbb{Z}^m \tag{3.3}$$

et où Q est l'opérateur de multiplication par la suite $\{q(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$.

L'analyse de cette égalité nous montre pourquoi il est intéressant d'introduire et d'étudier la suite $q(x)$, inverse du potentiel $v(x)$. Il est naturel de s'attendre à ce que l'inversibilité de l'opérateur $\Gamma(z)$ qui intervient dans la partie droite de (3.1) joue un rôle important dans l'étude de la résolvante de h. C'est l'objet du lemme suivant:

Lemme 2 *Soient $\sigma(h)$ le spectre de h et $\sigma_{\mathrm{p}}(h)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-2d, 2d]$,*

(i) *$\lambda \in \sigma(h)$ si, et seulement si, $0 \in \sigma(\Gamma(\lambda))$,*

(ii) *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(h)$ si, et seulement si, $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma(\lambda))$.*

De plus, si λ est tel que $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma(\lambda))$ et si φ_λ est le vecteur propre correspondant, i.e. *si $\varphi_\lambda \in \ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et $\Gamma(\lambda)\varphi_\lambda = 0$, alors le vecteur propre u_λ de h est donné par*

$$u_\lambda(\xi, x) = -\sum_{y \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - y; \lambda)\varphi_\lambda(y). \tag{3.4}$$

L'article de Schrőder [11] contient un résultat analogue pour le laplacien avec condition au bord. La démonstration de ce lemme ressemble à celle de Schrőder. Elle est donnée dans la section 4. Ceci termine la première étape.

Nous sommes ainsi ramenés au problème suivant:

Problème *Trouver des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que l'équation*

$$\Gamma(\lambda)\varphi_\lambda = 0 \tag{3.5}$$

ait une solution non-triviale dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$.

D'après le lemme 2 l'ensemble de ces λ coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de h, et à partir des vecteurs φ_λ solutions de (3.5) on peut grâce à la formule (3.4) construire des vecteurs propres de h correspondants.

On a donc réussi à réduire le problème (1.5) avec un potentiel inhomogène à l'étude d'un problème dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ avec des coefficients partout non-nuls dans $\mathbb{Z}^d$. La particularité de ce problème est qu'il est non-linéaire en le paramètre spectral λ. Sa résolution, comparée à celle des problèmes spectraux classiques, requiert une analyse particulière qui fait l'objet de l'étape suivante.

3.2 Etape B

On étudie d'abord le spectre de l'opérateur $\Gamma(\lambda)$ pour λ fixé quelconque. Il s'avère qu'il existe un λ_0 tel qu'en dehors de l'intervalle $[-\lambda_0, \lambda_0]$ le spectre de $\Gamma(\lambda)$ est purement ponctuel. On considère ensuite chaque valeur propre de $\Gamma(\lambda)$ comme une fonction de λ et on en cherche les zéros.

Remarquons que dans la présentation (3.2) de $\Gamma(\lambda)$ l'opérateur Q a un spectre purement ponctuel. De plus, en analysant les coefficients matriciels de $\Gamma_0(\lambda)$ on observe que, pour λ assez grand, sa norme est aussi petite que l'on veut. On peut donc considérer $\Gamma(\lambda)$ comme une petite perturbation de Q. Le problème spectral (3.5), pour un λ fixé, devient alors un problème de perturbation de spectre purement ponctuel. La condition de petitesse imposée à l'opérateur $\Gamma_0(\lambda)$ provoque l'apparition de l'intervalle $[-\lambda_0, \lambda_0]$ dans l'énoncé du théorème.

La particularité des données initiales fait penser aux méthodes de la théorie KAM qui s'avèrent très efficaces dans l'étude des propriétés spectrales des opérateurs à coefficients quasi-périodiques [7, 2]. De fait, pour étudier le spectre de $\Gamma(\lambda)$, on utilise une version de l'algorithme proposé par Craig [3] et Pőschel [7]. L'idée principale consiste à ramener, par approximations successives, l'opérateur $\Gamma(\lambda)$ à un opérateur $\hat{Q}(\lambda)$ de multiplication par une suite $\{\hat{q}(x,\lambda),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$. Autrement dit, on cherche une application unitaire $U(\lambda)$: $\ell^2(\mathbb{Z}^m) \to \ell^2(\mathbb{Z}^m)$ qui transforme $\Gamma(\lambda)$ en $\hat{Q}(\lambda)$, i.e. tel que

$$\Gamma(\lambda) = U(\lambda)\hat{Q}(\lambda)U^{-1}(\lambda).$$

Une fois $U(\lambda)$ trouvée, on obtient que le spectre de $\Gamma(\lambda)$ coïncide avec celui de $\hat{Q}(\lambda)$, donc avec la suite $\{\hat{q}(x,\lambda),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$.

Nous cherchons $U(\lambda)$ sous la forme d'un produit infini d'applications:

$$U(\lambda) = \lim_{n\to\infty} U_n(\lambda)$$
$$U_n(\lambda) = \prod_{\nu=0}^{n-1}(I + W_\nu(\lambda)).$$

A chaque pas de l'itération, nous supposons que

$$U_n(\lambda)^{-1}(\Gamma(\lambda) + Q)U_n(\lambda) = \hat{Q}_n(\lambda) + \Gamma_n(\lambda), \quad n > 0.$$

L'application $W_n(z)$ est déterminée comme l'unique solution de l'équation

$$[Q_{n+1}(\lambda), W_n(\lambda)] + \Gamma_n(\lambda) - [\Gamma_n(\lambda)] = 0, \tag{3.6}$$

où l'on note $[A]$ la matrice diagonale dont la diagonale est formée de A et où $Q_{n+1}(\lambda)$ est défini par $Q_{n+1}(\lambda) = \hat{Q}_n(\lambda) + [\Gamma_n(\lambda)]$. Dans la théorie KAM, l'équation (3.6) est appelée *équation homologique*. Pour montrer que ce schéma converge, on définit une échelle d'espaces normés M^{s_n} telle que tous les opérateurs du schéma soient bornés dans les espaces correspondants et que

$$\begin{aligned} &\Gamma_n(\lambda) \to 0, \\ &U_n(\lambda) \to U(\lambda), \\ &\hat{Q}_n(\lambda) \to \hat{Q}(\lambda) \end{aligned}$$

en norme, quand $n \to \infty$.

L'équation homologique (3.6) est le point central de l'algorithme. Sa résolution formelle est de la forme:

$$W_n(x, y; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\ , \\ \dfrac{\Gamma_n(x, y; \lambda)}{\hat{q}_{n+1}(x; \lambda) - \hat{q}_{n+1}(y; \lambda)} & \text{si } x \neq y\ . \end{cases} \tag{3.7}$$

Pour que cette formule définisse un opérateur borné et inversible, il faut étudier le comportement des dénominateurs dans (3.7). On appelle ces dénominateurs les *petits diviseurs*. On observe, d'abord, que les coefficients matriciels $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ des opérateurs $\Gamma_n(\lambda)$ décroissent exponentiellement quand $|x-y| \to \infty$. Il suffit donc que les quantités $\frac{1}{\hat{q}_{n+1}(x;\lambda)-\hat{q}_{n+1}(y;\lambda)}$ soient bornées supérieurement par un polynôme en $|x - y|$. La condition de petits diviseurs que nous avons introduite dans la section précédente garantit les estimations adéquates.

Comme nous l'avons déjà dit, les suites qui satisfont cette condition de petits diviseurs ne sont qu'un exemple particulier des suites définies dans [7] sous l'appellation "stable distal sequences". Pour ce qui concerne la convergence des approximations successives, notre algorithme est semblable à celui de Pőschel pour résoudre le problème spectral direct pour des opérateurs aux différences finies avec "stable distal potentials". Il faut remarquer que toutes les estimations valent pour des valeurs du paramètre spectral dans toute une bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < \varepsilon_0\}$ du plan complexe. Cela servira dans l'étape C de la démonstration. On obtient ainsi, à la limite, l'opérateur $\hat{Q}(\lambda)$ comme somme de la série:

$$\hat{Q}(\lambda) = Q + [\Gamma_0(\lambda)] + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma^{(n)}(\lambda)]\ . \tag{3.8}$$

Une analyse spéciale, effectuée à chaque pas de l'itération, montre que les termes de la suite $\hat{q}(x; \lambda)$ sont des fonctions strictement monotones de λ. Ils ne peuvent donc avoir qu'un seul zéro, noté $\lambda(x)$. Ensuite, d'après le lemme 2, on peut représenter l'ensemble des valeurs propres de h en dehors de l'intervalle $[-\lambda_0, \lambda_0]$ comme suit:

$$\sigma_{\mathrm{p}}(h) \cap \{\mathbb{R} \setminus [-\lambda_0, \lambda_0]\} = \{\lambda : \hat{q}(x, \lambda) = 0,\ x \in \mathbb{Z}^m,\ |\lambda| > \lambda_0\}.$$

Finalement, la représentation de l'opérateur $\hat{Q}(\lambda)$ que nous avons obtenue (voir 3.8) et les propriétés de la suite $q(x)$ nous permettent de prouver que

(i) le spectre ponctuel de h est dense dans $\mathbb{R} \setminus [-\lambda_0, \lambda_0]$;

(ii) il est de multiplicité 1;

(iii) les fonctions propres correspondantes décroissent exponentiellement dans toutes les directions.

Il reste alors à démontrer qu'en dehors de $[-\lambda_0, \lambda_0]$ le spectre est purement ponctuel. C'est l'objet de l'étape C.

3.3 Etape C

Soit $\mathscr{E}_h(d\lambda)$ la famille spectrale de l'opérateur h. D'après le théorème spectral (voir [9]), la résolvante $R_h(z)$ est la transformée de Borel de $\mathscr{E}_h(d\lambda)$, i.e.

$$R_h(z) = \int \frac{\mathscr{E}_h(d\lambda)}{\lambda - z} .$$

On peut donc exprimer $\mathscr{E}_h$ au moyen de $R_h(z)$ grâce à la formule d'inversion. Soit $\{e_X(Y) = \delta(Y - X),\ Y \in \mathbb{Z}^d\}$ la base canonique orthonormée de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Alors, pour tout intervalle $\Delta \in \mathbb{R}$,

$$\langle \mathscr{E}_h(\Delta) e_X, e_X \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \operatorname{Im} g(X, X; \lambda + i\varepsilon) d\lambda, \quad X \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.9}$$

L'étape C consiste à calculer la limite de la partie droite de (3.9). On utilise d'abord l'identité (3.1), ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \operatorname{Im} g(X, X; \lambda + i\varepsilon) d\lambda = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \operatorname{Im} \langle \Gamma^{-1} \varphi_X, \varphi_X \rangle (\lambda + i\varepsilon) d\lambda$$

où $\Gamma(z)$ est défini par (3.2) et où $\varphi_X(z)$ est un vecteur dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ dont les éléments sont de la forme:

$$\varphi_X(y; z) = g_0(X, (0, y); z), \quad z = \lambda + i\varepsilon.$$

On utilise ensuite les résultats de la section 4. Pour des valeurs $z = \lambda + i\varepsilon$ l'algorithme itératif nous donne des opérateurs $U(z)$ et $\hat{Q}(z)$ tels que

$$\Gamma^{-1}(\lambda + i\varepsilon) = U(\lambda + i\varepsilon) \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) U^{-1}(\lambda + i\varepsilon).$$

On observe ici que pour tout $\varepsilon > 0$ l'opérateur $\Gamma(\lambda + i\varepsilon)$ est inversible. On développe donc $\hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon)$, $U(\lambda + i\varepsilon)$ et $U^{-1}(\lambda + i\varepsilon)$ en séries de ε et l'on passe à la limite, en faisant attention aux singularités aux points $\lambda(x)$ tels que $\hat{q}(x, \lambda(x)) = 0$. On obtient finalement:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \operatorname{Im} \langle \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) \psi(\lambda), \psi(\lambda) \rangle d\lambda = -\sum_{y : \lambda(y) \in \Delta} \frac{|\psi(y, \lambda(y))|^2}{\partial \hat{q}(y, \lambda(y))} ,$$

ce qui équivaut à dire que la mesure $\langle \mathscr{E}_h(\Delta) e_X, e_X \rangle$ est purement ponctuelle, ce qui achève la preuve du théorème.

4 Etape A de la démonstration

Cette étape consiste à prouver le lemme 2. La démonstration utilise les deux lemmes suivants dont nous donnons les preuves après celle du lemme 2.

Lemme 3 *Fixons un λ tel que $|\lambda| > 2d$. Soient $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ et $(h-\lambda)u = f$. Posons*

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = u(0,x), \quad x \in \mathbb{Z}^m \\ &F(x) = [(h_0-\lambda)^{-1}f](0,x), \quad x \in \mathbb{Z}^m \\ &\Gamma_0(x,y,\lambda) = g_0(0,x-y;\lambda), \quad x,y \in \mathbb{Z}^m. \end{aligned}$$

Alors,

$$(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi = F \tag{4.1}$$

et il existe $0 < C(\lambda) < \infty$ tel que

$$\|\Gamma_0 Q^{-1}\varphi\|_m \geq \frac{1}{C(\lambda)}\{\|u\|_d - \|(h_0-\lambda)^{-1}f\|_d\} \tag{4.2}$$

où $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_d$ sont les normes respectives des espaces $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Lemme 4 *Soient $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et $(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi = F$. Posons*

$$u(\xi,x) = -\sum_{y\in\mathbb{Z}^m} g_0(\xi,x-y;\lambda)\frac{1}{q(y)}\varphi(y) + \tilde{\rho}(\xi,x), \quad (\xi,x) \in \mathbb{Z}^d \tag{4.3}$$

où

$$\tilde{\rho}(\xi,x) = \frac{\rho(\xi,\lambda)}{\rho(0,\lambda)}F(x)$$

avec

$$\rho(\xi,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^\nu}\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{e^{-i(\xi,\theta)}d\theta}{\lambda + 2\sum_{i=1}^\nu \cos\theta_i}\ . \tag{4.4}$$

Alors,

(i) $(h-\lambda)u = f$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^m$ *avec*

$$f(\xi,x) = \frac{1}{\rho(0,\lambda)}\delta(\xi)F(x) + \sum_{y\in\mathbb{Z}^m,\ \|y\|=1} \tilde{\rho}(\xi,x-y) + \tilde{\rho}(\xi,x+y) \tag{4.5}$$

(ii) $\|f\|_d \leq C\|F\|_m$

(iii) $\|u\|_d \geq \|\varphi\|_m$.

4.1 Preuve du lemme 2

Cette preuve utilise les lemmes 3 et 4 que nous venons d'énoncer.

(i$_1$) $\lambda \in \sigma(h) \Rightarrow 0 \in \sigma(\Gamma(\lambda))$

Soit $\lambda \in \sigma(h)$. D'après le critère de Weyl, il existe une suite $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $\|u_k\|_d = 1, k = 1, 2, 3, \ldots$ et $\|(h-\lambda)u_k\|_d \to 0$, $k \to \infty$. Soit $(h-\lambda)u_k = f_k$. Posons $\varphi_k(x) = u_k(0,x)$, $x \in \mathbb{Z}^m$. Alors, d'après le lemme 3, $(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi_k = F_k$, où $F_k(x) = [(h_0-\lambda)^{-1} f_k](0,x)$, $x \in \mathbb{Z}^m$. Donc,

$$\|(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi_k\|_m = \|F_k\|_m \leq \|(h_0-\lambda)^{-1} f_k\|_d \to 0, \ k \to \infty.$$

En posant $\psi_k = \Gamma_0 Q^{-1}\varphi_k$, on a:

$$\|(\Gamma_0 + Q)\Gamma_0^{-1}\psi_k\|_m = \|(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi_k\|_m \to 0, \ k \to \infty.$$

D'autre part, d'après le lemme 3, la norme de ψ_k peut être estimée comme suit:

$$\|\psi_k\|_m \geq \frac{1}{2}\{\|u_k\|_d - \|(h_0-\lambda)^{-1} f_k\|_d\} \to \frac{1}{2}, \ k \to \infty.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\|(\Gamma_0 + Q)\Gamma_0^{-1}\psi_k\|_m}{\|\psi_k\|_m} \to 0, \ k \to \infty.$$

Donc, $0 \in \sigma((\Gamma_0 + Q)\Gamma_0^{-1})$. Il est alors facile de voir que $0 \in \sigma(\Gamma_0 + Q)$.

(i$_2$) $\lambda \in \sigma(h) \Leftarrow 0 \in \sigma(\Gamma(\lambda))$

Soit $0 \in \sigma((\Gamma_0 + Q))$. Il existe alors une suite $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $\|\varphi_k\|_m = 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ et $\|(\Gamma_0 + Q)\varphi_k\|_m \to 0$, $k \to \infty$. Posons $F_k = (\Gamma_0 + Q)\varphi_k$ et $\psi_k = Q\varphi_k$. Il vient $(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\psi_k = F_k$. Définissons $u_k(\xi, x)$ comme dans (4.3) avec $\varphi = \psi_k$, $F = F_k$. Alors, d'après le lemme 4, $(h-\lambda)u_k = f_k$. Il suit de la définition de la fonction f_k (voir (4.5)) que

$$\|(h-\lambda)u_k\|_d = \|f_k\|_d \leq C\|F_k\|_m \to 0 \text{ si } k \to \infty$$

On sait d'autre part que

$$\|u_k\|_d \geq \frac{\|\varphi_k\|_m}{2d + |\lambda|} - C\|F_k\|_m \to \frac{1}{2d + |\lambda|} \text{ si } k \to \infty.$$

Donc, $\lambda \in \sigma(h)$.

(ii$_1$) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(h) \Rightarrow 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma(\lambda))$

Soit $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(h)$. Il existe alors $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ tel que $(h-\lambda)u = 0$. Posons $\varphi(x) = u(0,x)$, pour $x \in \mathbb{Z}^m$. D'après le lemme 3, $(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi = 0$, $\|\varphi\|_m \leq \|u\|_d < \infty$. Alors, $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma_0 Q^{-1} + I)$ et, évidemment, $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma_0 + Q)$.

(ii$_2$) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(h) \Leftarrow 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma(\lambda))$

Supposons que $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma_0 + Q)$. Il existe alors $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^m)$ tel que $(\Gamma_0 + Q)\varphi = 0$. Posons

$$u(\xi, x) = -\sum_{y \in \mathbb{Z}^m} g_0((\xi, x), (0, y), \lambda)\varphi(y).$$

Le lemme 4 pour $F = 0$ montre que cette fonction u vérifie l'équation $(h - \lambda)u = 0$ et que $\|u\|_d \leq C\|\varphi\|_m$. On a donc $\lambda \in \sigma_p(h)$ et u est un vecteur propre de h correspondant, ce qui prouve la dernière assertion du lemme.

4.2 Preuve du Lemme 3

Soit $(h - \lambda)u = f$. On a alors l'identité:

$$(h_0 - \lambda)^{-1}(h_0 - \lambda + v)u = (h_0 - \lambda)^{-1} f \ ,$$

autrement dit

$$u = -(h_0 - \lambda)^{-1} vu + (h_0 - \lambda)^{-1} f \ .$$

Etant donné la structure particulière du potentiel v (voir (1.3)), on développe en série le premier terme du membre de droite de cette dernière relation, ce qui donne

$$u(\xi, x) = -\sum_{y \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - y, \lambda) \frac{1}{q(y)} \varphi(y) + (h_0 - \lambda)^{-1} f)(\xi, x), \tag{4.6}$$

où $q(y) = v^{-1}(y)$ et $\varphi(y) = u(0, y),\ y \in \mathbb{Z}^m$.

Pour démontrer (4.1) il suffit alors de poser $\xi = 0$ dans l'égalité (4.6), et il suit de cette relation que

$$\Big\| - \sum_{y \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - y, \lambda) \frac{1}{q(y)} \varphi(y) \Big\|_d \geq \|u\|_d - \|(h_0 - \lambda)^{-1} f\|_d.$$

D'autre part, il existe un $C(\lambda)$ positif et fini, indépendant de φ, tel que

$$\Big\| - \sum_{y \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - y, \lambda) \frac{1}{q(y)} \varphi(y) \Big\|_d \leq C\|\Gamma_0 Q^{-1} \varphi\|_m. \tag{4.7}$$

En effet, le membre de gauche de (4.7) admet la représentation intégrale

$$-\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\|\widehat{Q^{-1}\varphi}(\theta)\|^2 d\theta d\varphi}{\lambda + 2\sum_{i=1}^{\nu} \cos\varphi_i + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i} \ ,$$

où $\widehat{Q^{-1}\varphi}(\theta)$ est la transformée de Fourier de $Q^{-1}\varphi$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$. Ensuite, comme $|\lambda| > 2d$, on peut estimer la fonction sous le signe intégrale de la manière suivante:

$$\frac{1}{\lambda + 2\sum_{i=1}^{\nu} \cos\varphi_i + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i} \leq \frac{1}{\lambda - 2\nu + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i} \leq C(\lambda) \frac{1}{\lambda + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i}$$

où $C(\lambda) \geq \frac{\lambda + 2(d-\nu)}{\lambda - 2d}$. La dernière inégalité donne (4.7), puis (4.2).

4.3 Preuve du Lemme 4

Soient $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et $(\Gamma_0 Q^{-1} + I)\varphi = F$. Définissons $u(\xi, x)$ comme dans (4.3)-(4.5). L'assertion (i) se vérifie facilement par simple substitution, compte tenu du fait que la fonction $\rho(\xi, \lambda)$ est solution de l'équation:

$$\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^\nu,\ \|\eta\|=1} \rho(\xi - \eta, \lambda) + \lambda \rho(\xi, \lambda) = \delta(\xi).$$

Pour démontrer (ii) il suffit de remarquer que

$$\|f\|_d^2 \leq \frac{1}{\rho(0,\lambda)} \|F\|_m^2 + 4\|F\|_m^2 \rho^2(0,\lambda) = C(\lambda)\|F\|_m^2 .$$

Enfin, (iii) est une conséquence triviale de (i) et (ii).

5 Etape B de la démonstration

Cette section est consacrée à l'étude du problème spectral non-linéaire (3.5). On utilise ici une des versions de la théorie KAM, proposée par Craig [3] et Pöschel [7]. Il s'avère que pour un λ fixé et assez grand l'opérateur $\Gamma(\lambda) = \Gamma_0(\lambda) + Q$ vérifie les conditions du théorème B de l'article [7] de Pőschel. Ce théorème dit que le spectre d'un tel opérateur est purement ponctuel. Pour étudier, en outre, le comportement des valeurs propres de $\Gamma(\lambda)$, on a besoin d'une généralisation du résultat de [7], que nous énonçons edt démontrons ici sous la forme d'un théorème. Voici d'abord quelques notions qui nous seront utiles.

Soit $\mathscr{F}$ une algèbre de fonctions comme dans la section 2.3. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des suites $a = \{a(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$ pour lesquelles il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{F}$ telle que

$$a(x) = \varphi(\omega \cdot x),\ x \in \mathbb{Z}^m. \tag{5.1}$$

Nous définissons sur $\mathscr{M}$ une norme en posant

$$\|a\|_{\mathscr{M}} = \inf \|\varphi\|_{\mathscr{F}}$$

où l'infimum porte sur l'ensemble des $\varphi \in \mathscr{F}$ qui vérifient (5.1). Nous définissons ensuite l'addition et la multiplication, puis l'opération de translation par $(T_x)a(y) = a(x+y)$. Il est clair que $\mathscr{M}$ est ainsi une algèbre de Banach, invariante par translations, i.e. pour tout $a \in \mathscr{M}$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}^m$, alors $T_x a \in \mathscr{M}$ et $\|T_x a\|_{\mathscr{M}} = \|a\|_{\mathscr{M}}$.

Soit M l'espace des matrices $A = \{a(x,y)\}_{x,y \in \mathbb{Z}^m}$ dont les diverses diagonales $A_x = \{a(y, y+x)\}_{y \in \mathbb{Z}^m}$ appartiennent à $\mathscr{M}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^m$. On définit dans M une échelle d'espaces de Banach par

$$M^s = \{A \in M,\ \|A\|_s < \infty\}, \quad 0 \leq s \leq \infty$$

où

$$\|A\|_s = \sup_{x \in \mathbb{Z}^m} \|A_x\|_{\mathscr{M}} e^{|x|s}.$$

Lemme 5 *La suite quasi-périodique $q(x)$ définie dans le théorème est stablement distale au sens de la définition de Pőschel* ([7]), i.e. *elle vérifie la condition suivante: pour toute suite $\hat{q}$ telle que $\hat{q} - q \in \mathscr{M}$ et $\|\hat{q} - q\|_{\mathscr{M}} \leq \tau < 1$, alors*

$$(q - T_x q)^{-1} \in \mathscr{M}, \quad \|(q - T_x q)^{-1}\|_{\mathscr{M}} \leq \Omega(|x|), \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}. \tag{5.2}$$

Dans cette section nous utilisons cette version de la condition de petits diviseurs plutôt que celle donnée en 2.3.

Théorème 2 *Soit Q l'opérateur diagonal dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ dont la diagonale $\{q(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^m}$ est une suite qui vérifie la condition de petits diviseurs* (5.2) *vis-à-vis d'une fonction d'approximation Ω et d'une constante $0 < \tau < 1$. Soit $G \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soit $\{P(z),\ z \in G\}$ une famille d'opérateurs paramétrée par ce domaine.*

S'il existe des constantes $0 < s \leq \infty$ et $0 < \sigma \leq 1, \frac{s}{2}$ indépendantes de z et telles que

$$\|P(z)\|_s \leq \tau\alpha\Psi^{-4}\Big(\frac{\sigma}{2}\Big) \tag{5.3}$$

et que

$$\Big\|\frac{d}{dz}P(z)\Big\|_s \leq 2\|P(z)\|_s^2\ , \ \textit{pour tout } z \in G\ , \tag{5.4}$$

alors il existe un opérateur diagonal $\hat{Q}(z)$ et un opérateur inversible $U(z)$ tels que

$$U^{-1}(z)(P(z) + Q)U(z) = \hat{Q}(z) \tag{5.5}$$

avec

$$\|U(z) - I\|_{s-\sigma}\ ,\ \|U^{-1}(z) - I\|_{s-\sigma} \leq C\|P(z)\|_s \tag{5.6}$$

$$\|\hat{Q}(z) - Q - [P(z)]\|_\infty \leq C^2\|P(z)\|_s^2\ , \tag{5.7}$$

où

$$C = \alpha^{-1}\Psi\Big(\frac{\sigma}{2}\Big) \tag{5.8}$$

et où $[\cdot]$ désigne la projection canonique $M^s \to M^\infty$. De plus,

$$\Big\|\frac{d}{dz}(\hat{Q}(z) - [P(z)])\Big\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|P(z)\|_s^2. \tag{5.9}$$

Si, pour un $z = \lambda$ réel, l'opérateur $P(\lambda)$ est hermitien, alors on peut choisir le $U(\lambda)$ correspondant unitaire dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$.

La démonstration de ce théorème utilise les lemmes auxiliaires que voici.

Lemme 6 *Si $A \in M^{s-\sigma}$, si $B \in M^s$ et si $0 < \sigma \leq \min\{1, \frac{s}{2}\}$, alors $AB \in M^{s-\sigma}$, et*

$$\|AB\|_{s-\sigma} \leq \frac{b}{\sigma^m}\|A\|_{s-\sigma}\|B\|_s$$

où $b \geq 1$ est une constante qui ne dépend que de la dimension m.

Lemme 7 *Soit b la constante définie au lemme 6, et soit $A \in M^s$ tel que $\|A - I\|_s \leq \frac{\sigma^m}{b}$, pour un $0 < \sigma \leq \inf\{1, s\}$. Si A est inversible dans l'espace $M^{s-\sigma}$, alors*

$$\|A^{-1} - I\|_{s-\sigma} \leq (1 - b\sigma^{-m}\|A - I\|_s)^{-1}\|A - I\|_s.$$

Lemme 8 *Soit $G \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soit $Q(z)$ l'opérateur diagonal dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ dont la diagonale $\{q(x,z),\ x \in \mathbb{Z}^m\}$ vérifie la condition (5.2) uniformément en $z \in G$. Soit $\{P(z)\}_{z\in G}$ une famille d'opérateurs dans M. L'équation*

$$[Q(z), W] + P(z) - [P(z)] = 0$$

admet alors une seule solution $W(z) \in M$ telle que $[W(z)] = 0$. Si, pour tout $z \in G$, on a $P(z) \in M^s$ et $\frac{d}{dz}P(z) \in M^s$, et si $\frac{d}{dz}Q(z) \in M^\infty$, et $0 < \sigma \leq \min\{1, \frac{s}{2}\}$, alors:

(i) *$W(z) \in M^{s-\sigma}$, et*

$$\|W(z)\|_{s-\sigma} \leq \phi(\sigma)\|P(z)\|_s,$$

(ii) *$\frac{d}{dz}W(z) \in M^{s-2\sigma}$, et*

$$\left\|\frac{d}{dz}W(z)\right\|_{s-2\sigma} \leq \psi(\sigma)\left\|\frac{d}{dz}P(z)\right\|_s + 2\Phi^2(\sigma)\left\|\frac{d}{dz}Q(z)\right\|_\infty \|P(z)\|_s\ . \tag{5.10}$$

où

$$\phi(\sigma) = \sup_{r\geq 0} \Omega(r)e^{-\sigma r} = \sigma^{4m}\Phi(\sigma).$$

Pour la démonstration des lemmes 6 et 7, voir l'article de Pőschel [7]. Quant au lemme 8 il est démontré en annexe.

Remarque 3 Le théorème 2 est une généralisation du théorème de Pőschel, [7], pour le cas où l'opérateur $P(z)$ dépend d'un paramètre complexe.

5.1 Preuve du théorème 2

Pour démontrer le théorème 2 nous utilisons un algorithme itératif semblable à celui de [7], mais modifié en fonction des particularités du problème. Nous allons donc présenter ici en détail uniquement ce qui est de nouveau, notamment l'analyse de la dérivabilité en λ des approximations construites.

Rappelons d'abord en quoi consiste le processus itératif.

On construit $U(z)$ comme un produit infini

$$U(z) = \lim_{n\to\infty} U_n(z)$$
$$U_n(z) = \prod_{\nu=0}^{n-1}(I + W_\nu(z)).$$

A chaque itération on a (cf. (5.6))

$$U_n(z)^{-1}(P(z)+Q)U_n(z) = \hat{Q}_n(z) + P_n(z) \ ,$$

et, pour $n = 0$,

$$U_0 = I; \quad P_0 = P.$$

On cherche une transformation $I+W_n(z)$ qui, appliquée à $\hat{Q}_n(z)+P_n(z)$, donne un opérateur de la même forme, i.e.

$$(I+W_n(z))^{-1}(\hat{Q}_n(z)+P_n(z))(I+W_n(z)) = \hat{Q}_{n+1}(z) + P_{n+1}(z) \tag{5.11}$$

de façon que l'opérateur $P_{n+1}(z)$ soit d'un ordre de grandeur plus petit que le précédent $P_n(z)$. En développant le membre de droite de cette dernière relation et en séparant la partie diagonale, on obtient:

$$\begin{aligned}(I+W_n(z))^{-1}(P_n(z)+\hat{Q}_n(z))(I+W_n(z)) = \hat{Q}_n(z) &+ [P_n(z)] \\ &+(I+W_n(z))^{-1}([\hat{Q}_n(z)+[P_n(z)], W_n(z)] \\ &+P_n(z) - [P_n(z)] + (P_n(z) - [P_n(z)])W_n(z)) \ .\end{aligned}$$

Posons alors

$$\hat{Q}_{n+1}(z) = \hat{Q}_n(z) + [P_n(z)] \ .$$

On élimine maintenant les éléments du même ordre de grandeur que $\|P_n(z)\|$, en suivant l'idée principale de la méthode KAM. Autrement dit, on exige que $W_n(z)$ vérifie l'équation homologique:

$$[\hat{Q}_{n+1}(z), W_n(z)] + P_n(z) - [P_n(z)] = 0. \tag{5.12}$$

Cette équation détermine $W_n(z)$. En la résolvant, on pose:

$$\begin{aligned}P_{n+1}(z) &= (I+W_n(z))^{-1}(P_n(z)-[P_n(z)])W_n(z) \\ U_{n+1}(z) &= U_n(z)(I+W_n(z)).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Cela nous donne (5.11). Si l'on fait tendre n vers l'infini, on obtient à la limite $P_n(z) \to 0$, $U_n(z) \to U$, et $\hat{Q}_n(z) \to \hat{Q}(z) = Q + \sum_{\nu=0}^{\infty}[P_\nu(z)]$, ce qui nous donne finalement (5.5).

Nous introduisons maintenant une échelle de constantes qui interviennent dans les diverses estimations de façon inductive. Il suit de la définition des fonctions $\Phi(\sigma)$ et $\Psi(\sigma)$ (voir (2.3) et (2.4)) que

(i) $\Phi(\sigma)$ et $\Psi(\sigma)$ sont, toutes les deux, monotones en σ et que

$$1 \le \Phi(\sigma) \le \Psi(\sigma), \quad \sigma > 0;$$

(ii) il existe une suite $\{\sigma_\nu\}_{\nu=0}^{\infty} \in S_{\frac{\sigma}{2}}$ telle que $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sigma_\nu = \frac{\sigma}{2}$ et que

$$\Psi\Big(\frac{\sigma}{2}\Big) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu^{2^{-\nu-1}}$$

où $\Phi_\nu = \Phi(\sigma_\nu)$, pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Soit $\{\sigma_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ une telle suite. Posons

$$s_0 = s, \quad s_n = s - 2\sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma_\nu, \quad n \geq 1,$$

ce qui implique $s = s_0 > s_1 > \ldots > s_n \to s - \sigma$. Posons ensuite

$$\theta_0 = \|P\|_s, \quad \theta_n = c^{1-2^{-n}} \|P\|_s \prod_{\nu=0}^{n-1} \Phi_\nu^{2^{-\nu}}, \; n \geq 1 \tag{5.14}$$

où l'on prend pour constante c (voir [7])

$$c = 96\, b^6 \,. \tag{5.15}$$

Alors,

$$\theta_\infty = c\|P\|_s \Psi^2\Big(\frac{\sigma}{2}\Big). \tag{5.16}$$

Remarquons que dans (5.14) et (5.16) la norme $\|P\|_s$ dépend de z. Ainsi, θ_n et θ_∞ en dépendent aussi. Pour simplifier, nous négligeons cette dépendance dans les notations.

Sous les hypothèses du théorème 2,

$$\theta_\infty \leq c\tau\alpha \,. \tag{5.17}$$

La constante α sera déterminée de façon précise plus tard. Pour l'instant, nous demandons seulement qu'elle vérifie l'inégalité:

$$c\alpha \leq \frac{1}{3b} \tag{5.18}$$

où b est toujours la constante du lemme 6. Il est facile de voir que

$$c\Phi_n^2 \theta_n^{2^n} \leq \theta_\infty^{2^n}, \quad c\Phi_n^2 \theta_n^{2^{n+1}} \leq \theta_{n+1}^{2^{n+1}}, \quad \theta_n^{2^n} \leq c^{-1}\Psi^{-2}\Big(\frac{\sigma}{2}\Big)\theta_\infty^{2^n}.$$

Nous démontrons par récurrence sur n le résultat suivant. *Pour tout $n \geq 0$ il existe un $P_n(z) \in M^{s_n}$ tel que*

$$\|P_n(z)\|_{s_n} \leq \theta_n^{2^n}. \tag{5.19}$$

De plus, $P_n(z)$ est différentiable, $\partial P_n(z) \in M^{s_n}$ et

$$\|\partial P_n(z)\|_{s_n} \leq \theta_\infty \theta_n^{2^n}. \tag{5.20}$$

Enfin, il existe un opérateur $U_n(z) \in M^{s_n+\sigma_n}$ qui est inversible, avec $U_n(z)^{-1} \in M^{s_n}$,

$$\|U_n(z) - U_{n-1}(z)\|_{s_n+\sigma_n}, \; \|U_n^{-1}(z) - U_{n-1}^{-1}(z)\|_{s_n} \leq \sigma^{2m}\theta_\infty^{2^{n-1}}, \quad n \geq 1 \tag{5.21}$$

et

$$U_n(z)^{-1}(P(z) + Q)U_n(z) = \hat{Q}_n(z) + P_n(z),$$

où

$$\hat{Q}_n(z) = Q + \sum_{\nu=0}^{n-1}[P_\nu(z)]. \tag{5.22}$$

Ce résultat est vrai pour $n = 0$.

Soit ensuite $n > 0$. Nous supposons que le résultat est vrai pour tout entier $< n$. Comme nous l'avons dit au départ, nous omettons ici la démonstration des inégalités (5.19) et (5.21). Nous nous fixons sur la différentiabilité de $P_n(z)$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, pour dériver l'expression (5.13) il faut s'assurer que $W_n(z)$ est dérivable. On utilise alors le lemme 8. Le point essentiel est que la dérivée de l'opérateur $W_n(z)$ contient les carrés des petits diviseurs qui apparaissent dans la formule (3.7). Cela exige une analyse particulière. La condition de petits diviseurs nous permet d'estimer $\frac{d}{dz}W_n(z)$ de la même manière que $W_n(z)$.

Commençons par appliquer le lemme 8. En utilisant l'expression (5.22) et les estimations (5.17)-(5.19) on peut voir que:

$$\|\hat{Q}_{n+1}(z) - Q\|_{\mathscr{M}} = \Big\|\sum_{\nu=0}^{n}[P_\nu]\Big\| \leq \sum_{\nu=0}^{n}\|P_\nu\|_{s_\nu} \leq 2\theta_\infty < \tau\ .$$

Compte tenu du lemme 5, on conclut que la diagonale $\hat{q}_{n+1}(z)$ de l'opérateur $\hat{Q}_{n+1}(z)$ vérifie (5.2). D'après le lemme 8, l'équation homologique (5.13) a donc une seule solution $W_n(z)$ vérifiant $[W_n(z)] = 0$. De plus,

$$\|W_n(z)\|_{s_n-\sigma_n} \leq \phi(\sigma_n)\|P_n(z)\|_{s_n} \leq \sigma n^{4m}\Phi_n\theta_n^{2^n}. \tag{5.23}$$

Cette solution est différentiable et

$$\Big\|\frac{d}{dz}W_n(z)\Big\|_{s_n-2\sigma_n} \leq \phi(\sigma_n)\Big\|\frac{d}{dz}P_n(z)\Big\|_{s_n} + 2\phi^2(\sigma_n)\Big\|\frac{d}{dz}\hat{Q}_n(z)\Big\|_\infty\|P_n(z)\|_{s_n}. \tag{5.24}$$

D'après le lemme 7, l'opérateur $(I + W_n(z))$ est inversible dans $M^{s_n-2\sigma_n}$ et

$$\|(I + W_n(z))\|_{s_{n+1}},\quad \|(I + W_n(z))^{-1}\|_{s_{n+1}} \leq \frac{3}{2}.$$

On peut alors dériver l'opérateur $\hat{Q}_{n+1}(z)$ défini par l'expression (5.22), ce qui donne:

$$\frac{d}{dz}\hat{Q}_{n+1}(z) = \sum_{\nu=0}^{n}\Big[\frac{d}{dz}P_\nu\Big].$$

On en déduit que:

$$\Big\|\frac{d}{dz}\hat{Q}_{n+1}(z)\Big\|_\infty \leq \sum_{\nu=0}^{n}\Big\|\frac{d}{dz}P_\nu\Big\|_{s_\nu} \leq \theta_\infty\sum_{\nu=0}^{n}\theta_\nu^{2^\nu} \leq 2\theta_\infty^2. \tag{5.25}$$

En utilisant alors dans le membre de droite les estimations précédentes (voir (5.19)-(5.20) et (5.25)), on obtient:

$$\Big\|\frac{d}{dz}W_n(z)\Big\|_{s_n-2\sigma_n} \leq D_n\Phi_n^2\theta_n^{2^n}\theta_\infty$$

où

$$D_n = \sigma_n^{4m}(1 + 4\sigma_n^{4m}\theta_\infty) \leq 5. \tag{5.26}$$

Maintenant, nous pouvons dériver l'identité (5.13), ce qui donne:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}P_{n+1}(z) = &-\frac{d}{dz}W_n(z)(I + W_n(z))^{-1}P_{n+1}(z)\\ &+(I + W_n(z))^{-1}\{\frac{d}{dz}P_n(z) - \frac{d}{dz}[P_n(z)]\}W_n(z)\\ &++(I + W_n(z))^{-1}(P_n(z) - [P_n(z)])\frac{d}{dz}W_n(z).\end{aligned} \tag{5.27}$$

En estimant successivement chacun des trois termes du membre de droite de (5.27), on prouve que

$$\left\|\frac{d}{dz}P_{n+1}(z)\right\|_{s_{n+1}} \leq \frac{3b^2}{2c}(1 + 2D_n)\theta_\infty\theta_{n+1}^{2^{n+1}}.$$

Ensuite, on observe que $\frac{3b^2}{2c}(1 + 2D_n) \leq 1$, ce qui suit de (5.26) et (5.15)). On a donc

$$\left\|\frac{d}{dz}P_{n+1}(z)\right\|_{s_{n+1}} \leq \theta_\infty\theta_{n+1}^{2^{n+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer. On conclut alors que les hypothèses inductives sont vraies pour tout $n \geq 0$.

On peut maintenant, comme dans [7], déduire les inégalités (5.6) et (5.7) de (5.19), (5.21) et (5.22).

Pour démontrer (5.9), remarquons que

$$\left\|\frac{d}{dz}\hat{Q}(\lambda) - \frac{d}{dz}[P(z)]\right\|_\infty \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\|\frac{d}{dz}P_\nu\right\|_{s_\nu} \leq \theta_\infty\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\nu^{2^\nu}.$$

En utilisant (5.20), on peut estimer cette dernière série comme suit:

$$\theta_\infty\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\nu^{2^\nu} \leq c^{-1}\Psi^{-2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\theta_\infty\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\infty^{2^\nu} \leq \frac{3}{2}c^{-1}\Psi^{-2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\theta_\infty^3.$$

On déduit de la définition de θ_∞ (voir (5.16)) et des hypothèses du théorème 2 (voir 5.3)) que

$$\theta_\infty^3 = c^3\|P\|_s^3\Psi^6\left(\frac{\sigma}{2}\right) \leq c^3\tau\alpha\Psi^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\|P\|_s^2.$$

Alors,

$$\frac{3}{2}c^{-1}\Psi^{-2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\theta_\infty^3 \leq \frac{3}{2}c^2\alpha\|P\|_s^2.$$

Il suffit maintenant de choisir α tel que

$$\frac{3}{2}c^2\alpha < \frac{1}{4},$$

ce qui implique (5.18), pour obtenir:

$$\left\| \frac{d}{dz}\hat{Q}(z) - \frac{d}{dz}[P(z)] \right\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|P\|_s^2 ,$$

ce qui est précisément (5.9).

La dernière assertion du théorème se démontre par les mêmes arguments que ceux de [7]. Soient $z = \lambda$ réel et $P(\lambda)$ hermitien. La construction faite ne détermine pas $U(\lambda)$ de façon unique. $U(\lambda)$ n'est donc pas obligatoirement unitaire. D'autre part, la suite diagonale $\hat{q}(\lambda)$ de l'opérateur $\hat{Q}(\lambda)$ vérifie la condition (5.2), ce qui implique que le spectre de l'opérateur $P(\lambda) + Q$ est simple et que les colonnes de la matrice de $U(\lambda)$ sont des vecteurs propres correspondants. L'opérateur U^*U est alors diagonal dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$, et proche de l'identité. Nous pouvons donc remplacer $U(\lambda)$ par $U(\lambda)(U^*(\lambda)U(\lambda))^{-1/2}$ qui est unitaire, ce qui termine la démonstration du théorème 2.

5.2 Application au problème spectral

Il nous reste maintenant à appliquer ce théorème à l'étude du problème spectral (3.4). Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-2d, 2d]$. Il suit de (3.3) que

$$\Gamma_0(x, y, \lambda) = \gamma(x - y; \lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(x-y,\theta)} d\theta d\varphi}{\lambda + 2\sum_{i=1}^{\nu} \cos\varphi_i + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i} . \tag{5.28}$$

Les diagonales $\Gamma_{0,x}(\lambda) = \{\Gamma_0(x + y, x, \lambda)\}_{y \in \mathbb{Z}^m}$ de l'opérateur $\Gamma_0(\lambda)$ sont alors de la forme

$$\Gamma_{0,x}(\lambda) = \gamma(x, \lambda)\mathbb{1}, \quad x \in \mathbb{Z}^m$$

où $\mathbb{1}$ désigne la suite constante dont tous les éléments sont égaux à 1. Il est évident que $\Gamma_{0,x}(\lambda) \in \mathscr{M}$ et que $\|\Gamma_{0,x}(\lambda)\|_{\mathscr{M}} = |\gamma(x, \lambda)|$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^m$. Remarquons que, pour $x = 0$, $\gamma(0, \lambda)$ est de la forme:

$$\gamma(0; \lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\theta d\varphi}{\lambda + 2\sum_{i=1}^{\nu} \cos\varphi_i + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i} . \tag{5.29}$$

En dérivant par rapport à λ, on trouve:

$$\partial\gamma(0; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\theta d\varphi}{(\lambda + 2\sum_{i=1}^{\nu} \cos\varphi_i + 2\sum_{i=1}^{m} \cos\theta_i)^2} .$$

Puisque λ est en dehors du spectre du Laplacien, i.e. hors de l'intervalle $[-2d, 2d]$, l'intégrale dans (5.29) est réelle, et positive si $\lambda < -2d$, négative si $\lambda > 2d$. Cela implique la propriété importante suivante:

$$|\gamma(0; \lambda)| = -\operatorname{sgn}\lambda \cdot \gamma(0; \lambda). \tag{5.30}$$

En particulier, compte tenu de ce fait, on peut déduire de (5.28) que

$$|\gamma(x, \lambda)| \leq e^{-\beta(\lambda)|x|}|\gamma(0, \lambda)|, \quad x \in \mathbb{Z}^m,$$

où

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{d}\log(1 + |\lambda| - 2d).$$

Posons $s = 2$ et $\sigma = 1$. Alors, pour tout λ tel que $|\lambda| > \tilde{\lambda} = 2d + e^2 - 1$, on a

$$\|\Gamma_0(\lambda)\|_2 = |\gamma(0,\lambda)| \tag{5.31}$$

et

$$\|\partial\Gamma_0(\lambda)\|_2 = |\partial\gamma(0,\lambda)|, \ |\lambda| > \tilde{\lambda} \tag{5.32}$$

où, pour simplifier, $\partial = \frac{d}{d\lambda}$.

Considérons $\gamma(0,\lambda)$. Vu (5.30), on a les estimations:

$$\frac{1}{|\lambda + 2d|} \leq |\gamma(0,\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda - 2d|} \tag{5.33}$$

et

$$\frac{1}{(\lambda + 2d)^2} \leq \partial\gamma(0,\lambda) \leq \frac{1}{(\lambda - 2d)^2}\ , \tag{5.34}$$

ce qui implique, en particulier, que

$$\frac{1}{2}|\gamma(0,\lambda)|^2 \leq \partial\gamma(0,\lambda) \leq 2|\gamma(0,\lambda)|^2\ . \tag{5.35}$$

Posons

$$\lambda_1 = 2d + \frac{1}{\alpha\tau}\Psi^4\Big(\frac{1}{2}\Big) \tag{5.36}$$

où les constantes τ et α sont tirées des conditions du théorème 2, et la fonction Ψ est définie par la formule (2.4). Remarquons que $\lambda_1 > \tilde{\lambda}$. Alors, comme il suit de (5.31)-(5.36), l'opérateur $\Gamma_0(\lambda)$ vérifie, pour tout λ tel que $|\lambda| > \lambda_1$, les conditions du théorème 2.

Remarque 4 Soit $G \subset \mathbb{C}$ l'ensemble défini par

$$G = \{z \in \mathbb{C} : z = \lambda + i\varepsilon,\ |\lambda| > \lambda_1,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}. \tag{5.37}$$

On peut toujours choisir un ε_0 tel que

$$\|\Gamma_0(z)\|_2 \leq |\gamma(0,\lambda)|$$

et que

$$\Big\|\frac{d}{dz}\Gamma_0(z)\Big\|_2 \leq |\partial\gamma(0,\lambda)|.$$

Alors, compte tenu de (5.29) et de (5.30), il vient:

$$\|\Gamma_0(z)\|_2 \leq \|\Gamma_0(\lambda)\|_2, \text{ pour tout } z = \lambda + i\varepsilon \in G.$$

et

$$\Big\|\frac{d}{dz}\Gamma_0(z)\Big\|_2 \leq \|\Gamma_0(z)\|_2^2.$$

On peut donc appliquer le théorème 2 à la famille d'opérateurs $\{\Gamma_0(z),\ z \in G\}$. Cela servira plus loin, dans la section suivante.

$\hat{q}(x,\lambda)$ est donc strictement monotone en λ. Cela implique que l'équation

$$q(x) + \gamma(0,\lambda) + \tilde{\gamma}(x,\lambda) = 0 \tag{5.43}$$

ne peut avoir qu'un seul zéro pour un $x \in \mathbb{Z}^m$ fixé.

Pour mieux comprendre la localisation de ces zéros, on poursuit l'étude des fonctions $\tilde{\gamma}(x,\lambda)$. Remarquons que dans l'estimation (5.40) $C\|\Gamma_0(\lambda)\|_2 < \frac{1}{2}$ (cela suit de (5.3) et de (5.8)). On trouve alors, en utilisant (5.40), (5.31) et (5.33), que:

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{\lambda - 2d} \leq \gamma(0,\lambda) + \tilde{\gamma}(x,\lambda) \leq -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda + 2d}, \quad \lambda > \lambda_1 ,$$

et que

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda + 2d} \leq \gamma(0,\lambda) + \tilde{\gamma}(x,\lambda) \leq \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda - 2d}, \quad \lambda < -\lambda_1 .$$

Définissons les ensembles $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbb{R}$ par:

$$I_1 = \left\{q \in \mathbb{R} : |q| > \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda_1 - 2d}\right\}, \quad I_2 = \left\{q \in \mathbb{R} : |q| < \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1 + 2d}\right\}, \quad I_3 = \mathbb{R} \setminus \{I_1 \cup I_2\}. \tag{5.44}$$

Si $q(x) \in I_1$, l'équation (5.43) n'a pas de zéro en dehors de l'intervalle $[-\lambda_1, \lambda_1]$. Si $q(x) \in I_2$, l'équation (5.43) admet une seule solution $\lambda = \lambda(x)$. Enfin, si $q(x) \in I_3$, on ne peut rien dire de l'existence d'une solution de (5.43).

On définit alors deux ensembles sur l'axe du paramètre spectral λ:

$$\sigma_1 = \{\lambda(x) : q(x) \in I_2,\ \hat{q}(x,\lambda(x)) = 0\}$$

et

$$\sigma_2 = \{\lambda(x) : q(x) \in I_3,\ \hat{q}(x,\lambda(x)) = 0\}. \tag{5.45}$$

L'union $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est l'ensemble des λ possibles pour lesquels 0 est une valeur propre de $\Gamma(\lambda)$. Alors, d'après la deuxième assertion du lemme 2, on a

$$\sigma_{\mathrm{p}}(h) \cap \{\mathbb{R} \setminus [-\lambda_1, \lambda_1]\} = \sigma_1 \cup \sigma_2.$$

Montrons d'abord que σ_1 est dense dans $\mathbb{R} \setminus [-\lambda_1, \lambda_1]$. En effet, on sait d'après les conditions du théorème 1, que la suite q est de la forme: $q(x) = f(\omega \cdot x)$, et que ω vérifie la condition diophantienne (2.5). Alors, l'ensemble $\{\omega \cdot x \bmod 1,\ x \in \mathbb{Z}^m\}$ est dense dans $[0,1]$. Ensuite, on observe que la condition de petits diviseurs imposée à la fonction f implique que

$$\sup_{r \in [0,1]} |f(r)| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1 + 2d}.$$

Etant donné que f est continue et a un seul zéro sur tout intervalle de période, il est clair que l'ensemble

$$\{q(x),\ x \in \mathbb{Z}^m\} \cap \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1 + 2d}, \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1 + 2d}\right]$$

est également dense. Enfin, puisque dans l'équation (5.43), la fonction $\tilde{\gamma}(x,\lambda)+\tilde{\gamma}(0,\lambda)$ est continue et strictement monotone, on voit que l'ensemble des solutions σ_1 est dense dans $\mathbb{R}\setminus[-\lambda_1,\lambda_1]$. Quant à l'ensemble σ_2, il suffit de remarquer qu'il est au plus dénombrable. Donc, le spectre de l'opérateur h, qui est la réunion de σ_1 et σ_2, est évidemment dense dans $\mathbb{R}\setminus[-\lambda_1,\lambda_1]$. D'autre part, il est de multiplicité 1, car pour tout λ la suite $\{\hat{q}(x,\lambda),\ \ x\in\mathbb{Z}^m\}$ vérifie la condition de petits diviseurs (5.2), ce qui implique que $\lambda(x)\neq\lambda(y)$ quand $x\neq y$.

A la fin de cette section nous démontrons que les fonctions propres de h qui correspondent aux valeurs propres situées dans $\mathbb{R}\setminus[-\lambda_1,\lambda_1]$ décroissent exponentiellement. Cela suit de la représentation (3.4) donnée dans le lemme 2, compte tenu des deux faits suivants:

(i) φ_λ étant le vecteur propre de $\Gamma(\lambda)$ qui correspond à la valeur propre zéro, ses éléments $\varphi_\lambda(y)$ décroissent exponentiellement, quand $|y|\to\infty$;

(ii) les coefficients matriciels $g_0(\xi-\eta,x-y;\lambda)$ de la résolvante du Laplacien décroissent exponentiellement, quand $|\xi-\eta|\to\infty$, ou quand $|x-y|\to\infty$.

Il nous reste maintenant à démontrer que la mesure spectrale de h est purement ponctuelle. On passe ainsi à l'étape C.

6 Etape C de la démonstration

Dans cette section on calcule la limite

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_\Delta \operatorname{Im} g(X,X;\lambda+i\varepsilon)d\lambda=-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_\Delta \operatorname{Im}\langle\Gamma^{-1}\varphi,\varphi\rangle(\lambda+i\varepsilon)d\lambda \tag{6.1}$$

où $\varphi(z,X)$ est le vecteur dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ défini par:

$$\varphi(X,y;z)=g_0(X,(0,y);z),\ \ z=\lambda+i\varepsilon.$$

En accord avec le développement de la résolvante en série de ε

$$R_0(\lambda+i\varepsilon)=R_0(\lambda)-\varepsilon^2((h_0-\lambda)^2+\varepsilon^2)^{-1}R_0(\lambda)-i\varepsilon((h_0-\lambda)^2+\varepsilon^2)^{-1}$$

on peut représenter $\varphi(\lambda+i\varepsilon)$ sous la forme de la somme:

$$\varphi(\lambda+i\varepsilon)=\varphi(\lambda)-i\varepsilon\varphi_1(\lambda)+O(\varepsilon^2)$$

où $\varphi_1(\lambda)$ est un vecteur réel dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et $O(\varepsilon^2)$ est un vecteur dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ dont la norme se comporte comme ε^2 quand $\varepsilon\to 0$.

Soit G le domaine défini par (5.37). Comme on l'a déjà mentionné (voir la remarque de la section 5) on peut appliquer le théorème 2 à la famille d'opérateurs $\{\Gamma_0(z),\ z\in G\}$. Il existe alors un opérateur inversible $U(z)\in M^1$ et un opérateur diagonal $\hat{Q}(z)$ vérifiant (5.6), (5.7) et (5.9) tels que

$$\Gamma^{-1}(z)=U(z)\hat{Q}^{-1}(z)U^{-1}(z). \tag{6.2}$$

Dans ce qui suit on utilise les deux lemmes ci-dessous, dont les preuves se trouvent dans l'annexe.

Lemme 9 *Soient Q, $P(z)$ et $U(z)$ les opérateurs définis dans le théorème 2. Supposons que $P(\lambda + i\varepsilon)$ admette le développement suivant:*

$$P(\lambda + i\varepsilon) = P(\lambda) - i\varepsilon P_1(\lambda, \varepsilon) + \varepsilon^2 P_2(\lambda, \varepsilon), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$$

où $P_1(\lambda, \varepsilon)$ et $P_2(\lambda, \varepsilon)$ sont des opérateurs ayant des matrices réelles tels que:

$$\|P_1(\lambda, \varepsilon\|_s, \ \|P_2(\lambda, \varepsilon)\|_s \leq \|P(\lambda)\|_s.$$

Alors, les opérateurs $U(\lambda + i\varepsilon)$ et $U^{-1}(\lambda + i\varepsilon)$ admettent, à leur tour, la représentation:

$$U(\lambda + i\varepsilon) = U(\lambda) + \varepsilon U_1(\lambda, \varepsilon) + O(\varepsilon^2) \tag{6.3}$$

$$U_1(\lambda + i\varepsilon) = U^{-1}(\lambda) + \varepsilon U_2(\lambda, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \tag{6.4}$$

où $\|U_1\|_s$, $\|U_2\|_s \leq D < \infty$ avec une constante D indépendante de ε, et où $O(\varepsilon^2)$ est un opérateur dans M^s dont la norme décroît comme ε^2 quand ε tend vers zéro.

Lemme 10 *Soient $v_1(\lambda, \varepsilon)$ et $v_2(\lambda, \varepsilon)$ deux vecteurs réels dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ dont les éléments décroissent exponentiellement en $y \in \mathbb{Z}^m$, uniformément en λ et ε dans un intervalle $(0, \varepsilon_0]$. Alors,*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_\Delta \langle Q^{-1}(\lambda + i\varepsilon) v_1(\lambda, \varepsilon), v_2(\lambda, \varepsilon) \rangle d\lambda = 0. \tag{6.5}$$

En utilisant l'identité (6.2), on trouve

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \mathrm{Im} \langle \Gamma^{-1} \varphi, \varphi \rangle (\lambda + i\varepsilon) d\lambda = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \mathrm{Im} \langle \hat{Q}^{-1} \psi, \tilde{\psi} \rangle (\lambda + i\varepsilon) d\lambda \tag{6.6}$$

où $\psi(z) = U(z)\varphi(z)$ et $\tilde{\psi} = (U^{-1}(z))^* \varphi(z)$. D'après le théorème 2 tout élément diagonal $\frac{1}{\hat{q}(x,z)}$ de l'opérateur $\hat{Q}^{-1}(z)$ a au plus une singularité, notamment, un pôle simple au point $\lambda(x) \in \mathbb{R} \setminus [-\lambda_1, \lambda_1]$. Or, $\|Q^{-1}(\lambda + i\varepsilon)\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^m)} \leq \frac{D}{\varepsilon}$. On utilise ensuite le lemme 9. Compte tenu du fait que l'opérateur $U(\lambda)$ est unitaire pour λ réel, on a:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \mathrm{Im} \langle \hat{Q}^{-1} \psi, \tilde{\psi} \rangle (\lambda + i\varepsilon) d\lambda = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \mathrm{Im} \langle \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) \psi(\lambda), \psi(\lambda) \rangle d\lambda \\
&- \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_\Delta \mathrm{Re}(\langle \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) U(\lambda) \varphi_1(\lambda), U(\lambda)\varphi(\lambda) \rangle + \langle \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) U(\lambda)\varphi(\lambda), U(\lambda)\varphi_1(\lambda) \rangle) d\lambda \\
&+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_\Delta \mathrm{Im}(\langle \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) U_1(\lambda, \varphi(\lambda), U(\lambda)\varphi(\lambda) \rangle + \langle \hat{Q}^{-1}(\lambda + i\varepsilon) U(\lambda)\varphi(\lambda), U_2^*(\lambda, \varphi(\lambda)) \rangle) d\lambda \\
&+ O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Puisque les opérateurs U, U_1, U_2 sont bornés dans l'espace M^1, les éléments des vecteurs $U\varphi$, $U\varphi_1$, $U_1\varphi$ et $U_2^*\varphi$ décroissent exponentiellement à l'infini. En utilisant le lemme 10, on

voit que tous les termes, sauf le premier, du membre de droite de (6.7) tendent vers zéro. Ecrivons le premier terme sous la forme:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_\Delta \mathrm{Im}\langle Q^{-1}(\lambda+i\varepsilon)U(\lambda)\varphi(\lambda),U(\lambda)\varphi(\lambda)\rangle d\lambda=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_\Delta\sum_{y\in\mathbb{Z}^m}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}d\lambda\ . \quad (6.8)$$

On définit ensuite deux ensembles de y:

$$\Pi_1=\{y\in\mathbb{Z}^m:|q(y)|\in I_1\},\quad \Pi_2=\mathbb{Z}^m\setminus\Pi_1$$

où I_1 est défini dans (5.44). On peut découper la somme du membre de droite de (6.8) en deux:

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^m}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}=\sum_{y\in\Pi_1}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}+\sum_{y\in\Pi_2}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}.$$

Remarquons que l'ensemble σ_2 défini par (5.45) est localisé: $\sigma_2\subset[-\lambda_0,-\lambda_1]\cup[\lambda_1,\lambda_0]$, où

$$\lambda_0=3\lambda_1+8d\ .$$

Alors, pour tout $y\in\Pi_1$, la fonction $\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}\setminus[-\lambda_0,\lambda_0]$, et, si $y\in\Pi_2$, elle a un seul zéro, d'ordre 1, au point $\lambda(x)\in\mathbb{R}\setminus[-\lambda_1,\lambda_1]$.

Choisissons l'intervalle $\Delta\subset\{\mathbb{R}\setminus[-\lambda_0,\lambda_0]\}$. Alors, quand $y\in\Pi_1$, la fonction $\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)$ est bornée inférieurement par une constante qui dépend uniquement de λ_0 et de la distance entre les intervalles Δ et $[-\lambda_0,\lambda_0]$. Cela donne:

$$\left|\int_\Delta\sum_{y\in\Pi_1}\mathrm{Im}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}d\lambda\right|\le|\Delta|D\varepsilon\sup_{\lambda\in\Delta}\sum_{y\in\mathbb{Z}^m}|\psi(y,\lambda)|^2\to 0,\downarrow 0.$$

Si $y\in\Pi_2$ on développe $\frac{1}{\hat q(y,\lambda)}$ en série de Laurent de ε au voisinage du pôle $\lambda(x)\in\mathbb{R}\setminus[-\lambda_1,\lambda_1]$:

$$\frac{1}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}=\frac{1}{\partial\hat q(y,\lambda(y))(\lambda-\lambda(y)+i\varepsilon)}+O(1)+iO(\varepsilon)$$

où les quantités $O(1)$ et $O(\varepsilon)$ sont réelles. Alors,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_\Delta\sum_{y\in\Pi_2}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\hat q(y,\lambda+i\varepsilon)}d\lambda=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_\Delta\sum_{y\in\Pi_2}\frac{|\psi(y,\lambda)|^2}{\partial\hat q(y,\lambda(y))(\lambda-\lambda(y)+i\varepsilon)}d\lambda\ .$$

La série du membre de droite de cette dernière relation converge uniformément par rapport à λ et ε. D'après le théorème de Lebesgue, on peut donc échanger l'ordre des opérations:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_\Delta\mathrm{Im}\langle\hat Q^{-1}(\lambda+i\varepsilon)\psi(\lambda),\psi(\lambda)\rangle d\lambda=-\sum_{y:\lambda(y)\in\Delta}\frac{|\psi(y,\lambda(y))|^2}{\partial\hat q(y,\lambda(y))}\ . \quad (6.9)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\psi(y,\lambda(y))&=\{U^{-1}(\lambda(y))\varphi(\lambda(y))\}(y)\\&=\sum_{x'\in\mathbb{Z}^m}U(x',y;\lambda(y))\varphi(x';\lambda(y))\\&=\sum_{x'\in\mathbb{Z}^d}U(x',y;\lambda(y))g_0(X,(0,x');\lambda(y)).\end{aligned}\quad (6.10)$$

La colonne $\{U(x', y; \lambda(y))\}_{x' \in \mathbb{Z}^m}$ de l'opérateur $U(\lambda)$ est juste le vecteur propre de $\Gamma(\lambda(y))$ correspondant à la valeur propre $q(y, \lambda(y)) = 0$. D'après le lemme 2 la dernière série représente l'élément $u_y(X; \lambda(y))$ du vecteur propre de l'opérateur h, correspondant à la valeur propre $\lambda(y)$. Finalement, en combinant (6.9) et (6.10) avec (6.1) et (6.6) on obtient:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \operatorname{Im} g(X, X; \lambda + i\varepsilon) d\lambda = \sum_{y:\lambda(y) \in \Delta} \frac{|u_{\lambda(y)}(\xi, x)|^2}{\partial q(y, \lambda(y))}$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

A Annexe

A.1 Preuve du lemme 8

L'équation $[Q, W] + P - [P] = 0$ a une solution et une seule donnée par

$$W_x(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, \\ \frac{P_x(\lambda)}{q(\lambda) - T_x q(\lambda)} & \text{pour } x \neq 0. \end{cases}$$

Sa dérivée vaut:

$$\frac{d}{d\lambda} W_x(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, \\ \frac{\partial P_x(\lambda)}{q(\lambda) - T_x q(\lambda)} - \frac{P_x(\lambda) \partial(q(\lambda) - T_x q(\lambda))}{(q(\lambda) - T_x q(\lambda))^2} & \text{pour } x \neq 0. \end{cases}$$

Puisque P_x, ∂P_x, $\partial Q \in \mathscr{M}$, alors $\frac{d}{d\lambda} W_x(\lambda) \in \mathscr{M}$ et l'on a

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} W_x(\lambda) \right\|_{\mathscr{M}} \leq e^{-|x|(s-2\sigma)} (\phi(\sigma) \|\partial P(\lambda)\|_s + 2\phi^2(\sigma) \|\partial Q(\lambda)\|_{M^\infty} \|P(\lambda)\|_s),$$

ce qui implique l'assertion du lemme.

A.2 Preuve du lemme 9

Les hypothèses du lemme 9 impliquent que la série correspondante au produit scalaire dans (6.5) converge uniformément par rapport à Sous les hypothèses du lemme on peut écrire:

$$\Gamma(\lambda + i\varepsilon) = P(\lambda) + Q - \varepsilon^2 P_1(\lambda, \varepsilon) - i\varepsilon P_2(\lambda, \varepsilon)$$

On applique d'abord le théorème 2 à l'opérateur $P(\lambda) + Q$. En fait, seule la premiière partie du théorème est importante ici, notamment celle qui dit qu'il existe des opérateurs $U(\lambda)$ et $\hat{Q}(\lambda)$ tels que

$$U^{-1}(\lambda)(P(\lambda) + Q)U(\lambda) = \hat{Q}(\lambda).$$

Alors,

$$G(\lambda + i\varepsilon) = U(\lambda)\{\hat{Q}(\lambda) - \varepsilon^2 U^{-1}(\lambda) P_1(\lambda, \varepsilon) U(\lambda) - i\varepsilon U^{-1}(\lambda) P_2(\lambda, \varepsilon) U(\lambda)\} U^{-1}(\lambda).$$

Puisque $\|U(\lambda)\|_s$, $\|U(\lambda)_1\|_s \leq \frac{3}{2}$, $\|P_1(\lambda,\varepsilon)\|_s \leq \|P(\lambda)\|_s$ et que l'opérateur $\hat{Q}(\lambda)$ vérifie la condition de petits diviseurs (5.2), on peut appliquer le même théorème à l'opérateur $\hat{Q}(\lambda) - \varepsilon^2 U^{-1}(\lambda)P_1(\lambda,\varepsilon)U(\lambda)$. On obtient ainsi les opérateurs $V_1(\lambda,\varepsilon)$ et $\hat{Q}_1(\lambda,\varepsilon)$ tels que

$$\hat{Q}(\lambda) - \varepsilon^2 U^{-1}(\lambda)P_1(\lambda,\varepsilon)U(\lambda) = V_1(\lambda,\varepsilon)^{-1}\hat{Q}_1(\lambda,\varepsilon)V_1(\lambda,\varepsilon).$$

Alors,

$$\Gamma(\lambda+i\varepsilon) = U(\lambda)V_1(\lambda,\varepsilon)\{\hat{Q}_1(\lambda,\varepsilon) - i\varepsilon V_1(\lambda,\varepsilon)^{-1}U^{-1}(\lambda)P_2(\lambda,\varepsilon)U(\lambda)V_1(\lambda,\varepsilon)\}V_1^{-1}(\lambda,\varepsilon)U^{-1}(\lambda)$$

En répétant cette procédure encore une fois, on trouve:

$$\Gamma(\lambda+i\varepsilon) = U(\lambda)V_1(\lambda,\varepsilon)V_2(\lambda,\varepsilon)\hat{Q}_2(\lambda,\varepsilon)V_2^{-1}(\lambda,\varepsilon)V_1^{-1}(\lambda,\varepsilon)U^{-1}(\lambda)$$

Il est clair que $\hat{Q}_2(\lambda,\varepsilon) = \hat{Q}(\lambda+i\varepsilon)$ et que $U(\lambda+i\varepsilon) = U(\lambda)V_1(\lambda,\varepsilon)V_2(\lambda,\varepsilon)$. De plus, le théorème 2 donne les estimations:

$$\begin{aligned}
&\|V_1(\lambda,\varepsilon) - I\|_s,\ \|V_1^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I\|_s \leq C\varepsilon^2\|P(\lambda)\|_s,\\
&\|V_2(\lambda,\varepsilon) - I\|_s,\ \|V_2^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I\|_s \leq C\varepsilon\|P(\lambda)\|_s.
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'on peut représenter $U(\lambda+i\varepsilon)$ et $U^{-1}(\lambda+i\varepsilon)$ comme suit:

$$\begin{aligned}
U(\lambda+i\varepsilon) &= U(\lambda) + V(\lambda)(V_1(\lambda,\varepsilon) - I)\\
&\quad + U(\lambda)(V_2(\lambda,\varepsilon) - I) + U(\lambda)(V_1(\lambda,\varepsilon) - I)(V_2(\lambda,\varepsilon) - I);\\
U^{-1}(\lambda+i\varepsilon) &= U^{-1}(\lambda) + (V_2^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I)U^{-1}(\lambda)\\
&\quad + (V_1^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I)U^{-1}(\lambda) + (V_2^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I)(V_1^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I)U^{-1}(\lambda).
\end{aligned}$$

En notant

$$\begin{aligned}
\varepsilon U_1(\lambda,\varepsilon) &= U(\lambda)(V_2(\lambda,\varepsilon) - I);\\
\varepsilon U_2(\lambda,\varepsilon) &= (V_2^{-1}(\lambda,\varepsilon) - I)U^{-1}(\lambda),
\end{aligned}$$

on a (6.3) et (6.4).

A.3 Preuve du lemme 10

Les hypothèses du lemme impliquent que la série correspondant au produit scalaire dans (6.5) converge uniformément en λ et ε. On peut donc utiliser le théorème de Lebesgue pour intervertir l'ordre des opérations. On trouve ainsi que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\frac{1}{\pi}\int_\Delta \langle Q^{-1}(\lambda+i\varepsilon)v_1(\lambda,\varepsilon), v_2(\lambda,\varepsilon)\rangle d\lambda = \sum_{y\in\mathbb{Z}^m}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_\Delta \frac{v_1(y,\lambda,\varepsilon)v_2(y,\lambda,\varepsilon)}{\hat{q}(y,\lambda+i\varepsilon)}d\lambda. \quad \text{(A.1)}$$

Fixons $y \in \mathbb{Z}^m$. Si $\hat{q}(y,\lambda)$ n'a pas de zéro dans l'intervalle Δ, alors

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_\Delta \frac{v_1(y,\lambda,\varepsilon)v_2(y,\lambda,\varepsilon)}{\hat{q}(y,\lambda+i\varepsilon)}d\lambda = 0.$$

S'il existe un $\lambda(y) \in \Delta$ tel que $\hat{q}(y, \lambda(y)) = 0$, alors on développe $\frac{1}{\hat{q}(y,\lambda+i\varepsilon)}$ en série de Laurent de ε au voisinage de $\lambda(y)$:

$$\frac{1}{\hat{q}(y, \lambda + i\varepsilon)} = \frac{1}{\partial\hat{q}(y, \lambda(y))(\lambda - \lambda(y) + i\varepsilon)} + O(1). \tag{A.2}$$

Si l'on substitue ce développement (A.2) dans le membre de droite de (A.1), on observe que les fonctions qui sont sous le signe intégrale sont continues en λ et bornées uniformément en ε. Alors, compte tenu du facteur ε devant l'intégrale, on trouve que la limite est nulle:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon\frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{v_1(y, \lambda, \varepsilon)v_2(y, \lambda, \varepsilon)}{q(y, \lambda + i\varepsilon)} d\lambda = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon\frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{v_1(y, \lambda, \varepsilon)v_2(y, \lambda, \varepsilon)}{\partial\hat{q}(y, \lambda(y))(\lambda - \lambda(y) + i\varepsilon)} d\lambda = 0.$$

Remerciements
Nous tenons à remercier L. Pastur pour de nombreuses discussions sur le sujet, ainsi que I. Egorova qui nous a fait plusieurs remarques utiles. A. S. remercie vivement le Ministère des Affaires Etrangères français pour le support financier dont elle a bénéficié durant la préparation de ce travail.

References

[1] M. Aizenman and S. Molchanov: Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation, *Commun. Math. Phys.* **157** (1993) 245–278.

[2] J. Bellissard, R. Lima, and E. Scoppola: Localization in ν-Dimensional Incommensurate Structures, *Commun. Math. Phys.* **88** (1983) 465–477.

[3] W. Craig: Pure Point Spectrum for Discrete Almost Periodic Schrödinger Operators, *Commun. Math. Phys.* **88** (1983) 113–131.

[4] V. Grinshpun: Localization for random potentials supported on a subspace, *Lett. Math. Phys.* **34** (2) (1995) 103–117.

[5] V. Jaksić, S. Molchanov, and L. Pastur: On the Propagation Properties of Surface Waves, *IMA Preprint Series* **1316**, July 1995.

[6] I.M. Lifshitz: Some problems of the Dynamic Theory of Non Ideal Solids, *Nuovo Cimento Suppl.* **3** (1956) 716–734.

[7] J. Pőschel: Examples of Discrete Schrödinger Operators with Pure Point Spectrum, *Commun. Math. Phys.* **88** (1983) 447–463.

[8] J.W.S. Rayleigh: *The Theory of Sound*, Dover, New York, 1945.

[9] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I, Analysis of Operators*, Academic Press, London, 1979.

Pour l'instant, appliquons le théorème 2 en prenant $G = \mathbb{R} \setminus [-\lambda_1, \lambda_1]$ et la famille d'opérateurs $\{\Gamma_0(\lambda),\ |\lambda| > \lambda_1\}$. On obtient ainsi un opérateur diagonal $\hat{Q}(\lambda)$ avec $\hat{Q}(\lambda) - Q \in M^\infty$ et un opérateur unitaire $U(\lambda) \in M^1$ tels que

$$U^{-1}(\lambda)(\Gamma_0(\lambda) + Q)U(\lambda) = \hat{Q}(\lambda). \tag{5.38}$$

$\Gamma(\lambda)$ est ainsi unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication $\hat{Q}(\lambda)$ donné par

$$\hat{Q}(\lambda) = Q + [\Gamma_0(\lambda)] + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma^{(n)}(\lambda)] \tag{5.39}$$

où $\Gamma^{(n)}(\lambda)$ est l'approximation construite au n-ième pas (voir (5.23)). Les spectres de $\Gamma(\lambda)$ et $\hat{Q}(\lambda)$ coïncident donc, i.e.

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\Gamma(\lambda)) = \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{Q}(\lambda)) = \{\hat{q}(x, \lambda) \ : \ x \in \mathbb{Z}^m,\ |\lambda| > \lambda_1\}.$$

Il suit de (5.38) que les colonnes de $U(\lambda)$ sont vecteurs propres de $\Gamma(\lambda)$. Ils forment un système complet dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et leurs éléments décroissent exponentiellement. Finalement, d'après (5.6) et (5.10),

$$\|\hat{Q}(\lambda) - Q - [\Gamma_0(\lambda)]\|_\infty \leq C^2 \|\Gamma_0(\lambda)\|_2^2 \tag{5.40}$$

et

$$\|\partial\hat{Q}(\lambda) - \partial[\Gamma_0(\lambda)]\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|\Gamma_0(\lambda)\|_2^2 \tag{5.41}$$

où la constante C est définie par (5.8).

D'après le lemme 2, l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur h situées hors de l'intervalle $[-\lambda_1, \lambda_1]$ est donné par:

$$\sigma_{\mathrm{p}}(h) \cap \{\mathbb{R} \setminus [-\lambda_1, \lambda_1]\} = \{\lambda : \hat{q}(x, \lambda) = 0,\ x \in \mathbb{Z}^m,\ |\lambda| > \lambda_1\}.$$

Pour étudier la structure de cet ensemble, fixons un $x \in \mathbb{Z}^m$ et considérons l'équation $\hat{q}(x, \lambda) = 0$. Remarquons que la fonction $\hat{q}(x, \lambda)$ est de la forme

$$\hat{q}(x, \lambda) = q(x) + \gamma(0, \lambda) + \tilde{\gamma}(x, \lambda)$$

où $\tilde{\gamma}(x, \lambda)$ est l'élément diagonal correspondant de la série du membre de droite de (5.39). D'après le théorème 2, $\hat{q}(x, \lambda)$ est différentiable par rapport à λ. De plus, en utilisant (5.41), (5.35) et (5.31), on a l'estimation suivante de sa dérivée:

$$|\partial\hat{q}(x, \lambda) - \partial\gamma(0, \lambda)| < \frac{1}{4}|\gamma(0, \lambda)|^2. \tag{5.42}$$

D'autre part, on déduit de (5.35) et de (5.42) que

$$\partial\hat{q}(x, \lambda) \geq \frac{1}{4}|\gamma(0, \lambda)|^2 > 0.$$

[10] H. Rüssmann: On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **357** (1980) 90–107.

[11] M. Schröder: On the Spectrum of the Schrödinger Operator at the half Space with a Certain Class of Boundary Conditions, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, **7** (3) (1988) 233–239.