Der Pyramidenstumpf

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **03.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-145641

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

In welcher Beziehung stehen das Dreieck A B C in der Zeichnung und dasjenige in der Natur? Jede Seite des Bilddreiecks ist $^1/_{1000}$ von der entsprechenden Seite des Originaldreiecks; ihre Winkel sind paarweise gleich. Wie bezeichnet man diese Beziehung?

b) Der Neigungswinkel würde sich genauer mit einem Winkelinstrument (dem Theodolit) messen lassen. Sein Fernrohr lässt sich aber nicht in A aufstellen. Es bezeichne A' den Drehpunkt des Fernrohrs; er befinde sich z. B. 1 m 30 cm über dem Fusspunkt A; dann können wir den Winkel messen, welchen das nach der Baumspitze C gerichtete Fernrohr mit der Horizontalen durch A' bildet. Aus der Länge der Standlinie und dem Winkel C A' B' lässt sich das Dreieck A' B' C konstruieren, welchem wir die Höhe C B' entnehmen, wozu noch die Höhe des Instruments (1 m 30 cm) zu addieren ist.

Die Basis A B messe 40 m, der Neigungswinkel C A' B' betrage 31°; wie hoch ist der Baum, wenn der Drehpunkt des Fernrohrs 1 m 30 cm über dem Boden steht? Welchen Kubikinhalt hat der Baum, wenn sein Umfang unten 1 m 80 cm misst?

3) Wieviel dm² Blech enthält eine kegelförmige Kaminkappe von 1 m Weite und 80 cm Seitenlänge?

4) Ein Zuckerhut hat eine Grundfläche, deren Durchmesser 30 cm misst, und eine Seitenlinie von 80 cm. Wieviel Zucker enthält er? Entnimm die Höhe aus der Aufrisszeichnung.

Dieser Zuckerhut soll gut verpackt werden. Mit was für einem Kartonstück kann man ihn einwickeln?

J. Der Pyramidenstumpf.*)

1) Wir betrachten den Trichter einer Mühle.

Beschreibung.

a) *Beschreibe ihn.* Er ist begrenzt von 4 symmetrischen Trapezen, deren obere Seiten ein grosses, deren untere Seiten ein kleines Quadrat bilden. Wenn wir die Seitenkanten verlängern, sehen wir, dass sie sich in einem Punkte treffen. Der

*) Bei Zeitmangel kann dieses Kapitel kürzer gefasst werden.

Trichter wird dann zu einer Pyramide ergänzt. Die Ebene des Bodens des Trichters schneidet von der ganzen Pyramide eine kleinere ab, die wir Ergänzungspyramide nennen. Der Rest, unser Trichter, heisst ein *Pyramidenstumpf*. Wir wollen diese Körperform genau kennen lernen.

b) *Es sollen Grund- und Aufriss, sowie das Netz dieses Trichters gezeichnet und ein Kartonmodell hergestellt werden.* Grund- und Aufriss.
Nimm die notwendigen Masse.

Die Seite des grösseren Quadrats misst 70 cm, die des kleineren 30 cm und die Höhe die Trichters, d. h. der Abstand des Bodens von der Deckfläche, 50 cm.

Fig. 58.

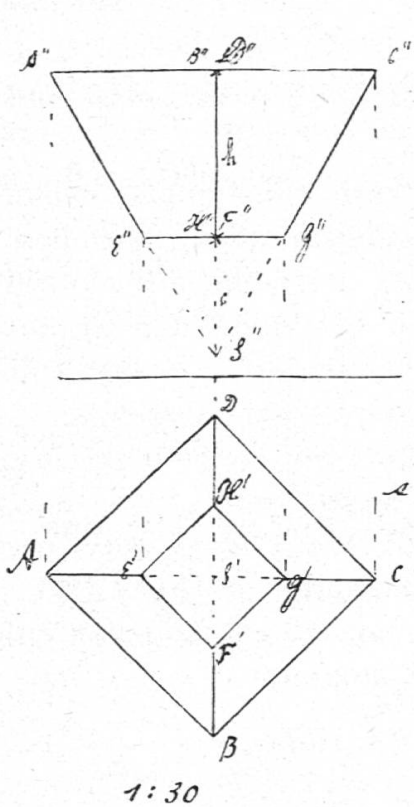
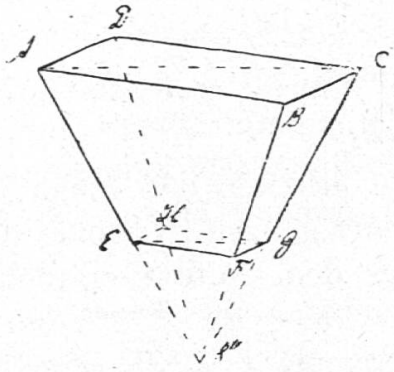


Fig. 60.



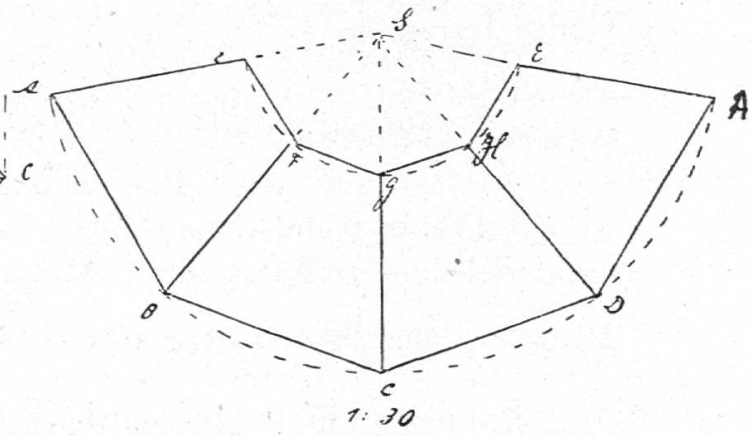


Fig. 59.

Wir denken uns den Körper so gestellt, dass 2 Seitenkanten und also auch je eine Diagonale von Grund- und Deckfläche parallel zur Aufrissebene laufen. Der Grundriss besteht aus zwei Quadraten, die bez. mit Grund- und Deckfläche kongruent sind. Die Grundrisse der Seitenkanten verbinden die entsprechenden Ecken dieser Quadrate. Der Aufriss des Pyramidenstumpfes ist ein Trapez; Grund- und Deckfläche erscheinen im Aufriss als Strecken, 2 Seitenlinien in wahrer Grösse.

Das Netz.

Wir ergänzen den Körper in der Zeichnung zur ganzen Pyramide. Um das Netz des Stumpfs zu zeichnen, konstruieren wir zuerst das Netz der ganzen Pyramide (wie früher) und darin das Netz der Ergänzungspyramide. Der Rest gibt uns das Netz des Pyramidenstumpfs. Die wahre Länge der Seitenkanten entnehmen wir dem Aufriss, diejenige von Grund- und Deckkante dem Grundriss.

Berechnung der Seitenflächen.

c) *Berechnung: 1) Wieviel dm² messen die Bretter des Trichters?*

Wir messen die Trapezhöhe und können mit Hülfe des Massstabs ihre wahre Länge (54 cm) berechnen.

Inhalt der 4 Seitenflächen $= 4 \cdot \frac{30 + 70}{2} \cdot 54$ cm² = *108 dm².*

2) Wieviel Getreide hält der Trichter, wenn man ihn ganz füllt?

Berechnung des Inhalts.

Wir erhalten den Inhalt unseres Pyramidenstumpfs, indem wir von der ganzen Pyramide die Ergänzungspyramide abziehen.

Aus dem Aufriss ersehen wir, dass die Höhe der ganzen Pyramide $(h + x) = 8^3/_4$ dm und dass die Höhe der Ergänzungspyramide $x = 3^3/_4$ dm misst.

$$\text{Ganze Pyramide} = \frac{G \cdot H}{3} = \frac{49 \cdot 8^3/_4}{3} \text{ dm}^3 = 142^{11}/_{12} \text{ dm}^3.$$

$$\text{Ergänzungspyramide} = \frac{9 \cdot 3^3/_4}{3} \text{ dm}^3 = 11^1/_4 \text{ dm}^3.$$

$$\text{Pyramidenstumpf} = 131^2/_3 \text{ dm}^3.$$

In der Praxis rechnet man nach einer Regel, die nur ein annähernd richtiges Resultat gibt. Man nimmt:

$$\text{Mittlere Länge} \times \text{mittlere Breite} \times \text{Höhe} = \left(\frac{7 + 3}{2}\right) \cdot \left(\frac{7 + 3}{2}\right) \cdot 5 \text{ dm}^3 = 125 \text{ dm}^3$$

(= mittlerer Durchschnitt × Höhe).

Dieses Resultat ist um $6^2/_3$ dm³ zu klein.

Mitunter nimmt man auch das Mittel aus Grund- und Deckfläche und multipliziert es mit der Höhe.

$$\frac{G + g}{2} \cdot h = \frac{49 + 9}{2} \cdot 5 \text{ dm}^3 = 29 \cdot 5 \text{ dm}^3 = 145 \text{ dm}^3.$$

Dieses Ergebnis ist um $13^1/_3$ dm³ zu gross.

Die erste Annäherung ist demnach der zweiten vorzuziehen.

Der Fehler ist klein, wenn Grund- und Deckfläche fast gleich sind.

d) *Es soll die Parallelprojektion dieses Pyramidenstumpfs gezeichnet werden.* Parallel-projektion.

Wir denken uns das Zeichnungsblatt in die Diagnalebene A C E G S (Fig. 60) hineingelegt. Beleuchtet die Sonne den Körper, so ist das Schattenbild der Deckfläche ein Parallelogramm; die Neigung der Seite A D gegen die Diagonale und ihre Länge hängen von dem Stand der Sonne ab; wir können sie willkürlich wählen. Dann ist aber das Parallelogramm A B C D bestimmt und mit ihm auch die ganze Projektion. Verbinden wir A, B, C, D mit S, so haben wir das Bild der ganzen Pyramide. Die Seiten des Parallelogramms E F G H sind durch E und G parallel zu den entsprechenden Seiten von A B C D zu ziehen.

In welcher Beziehung steht das kleine Parallelogramm E F G H zum grossen A B C D? Zeichne A B C D im Massstabe 3 : 7, und du wirst das kleine Parallelogramm E F G H erhalten. Die beiden Parallelogramme sind also ähnlich.

Denke dir den Trichter auf das grosse Quadrat gestellt, und zeichne ihn in dieser Stellung.

2) Es gibt auch Trichter, deren Boden ein ungleichseitiges Rechteck ist. Wir wollen die Zeichnung eines solchen entwerfen.

Zeichne den Grundriss, den Aufriss und die Parallelprojektion einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, und führe einen Schnitt parallel zur Grundfläche durch das erste Drittel der Höhe, von der Spitze aus gemessen.

Länge der Grundfläche = 2,5 cm, Breite = 1,5 cm, Höhe der Pyramide = 3 cm.

Fig. 61.

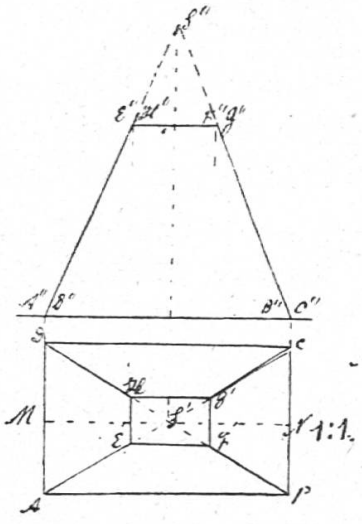
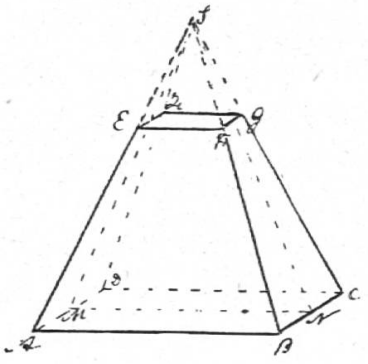


Fig. 62.



Grund- und Aufriss.

a) Wir denken uns diesmal die Pyramide so auf die Grundrissebene gestellt, dass eine Quadratseite parallel zur Aufrissebene läuft. Die Seitenkanten erscheinen dann im Aufriss verkürzt. Der Aufriss A'' S'' B'' ist kongruent mit dem mittleren Längsschnitt der Pyramide, der durch S und die Mitten von A D und B C geht. Der Aufriss der Schnittfigur ist eine zur Achse parallele Linie, welche von der Höhe den dritten Teil abschneidet. Durch Hinunterloten erhalten wir den Grundriss E' F' G' H', der die wahre Grösse des Schnitts angibt. Miss die Seiten E' F' und F' G'. Die Seiten von E F G H sind $^1/_3$ von den entsprechenden Seiten von A B C D und laufen mit ihnen parallel. Die Schnittfigur ist demnach der Grundfläche ähnlich. Ihr Inhalt ist der 9. Teil vom Inhalt der Grundfläche.

Der Pyramidenstumpf.

b) Beschreibe den Pyramidenstumpf A B C D E F G H. Er ist begrenzt von 2 ähnlichen Rechtecken, deren Seiten parallel laufen, als Grund- und Deckfläche und von 4 symmetrischen Trapezen als Seitenflächen, wovon je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind.

Berechnung.

c) Berechne die Oberfläche und den Inhalt dieses Stumpfs wie bei Beispiel 1.

Die Höhe der seitlichen Trapeze kann man dem Aufriss entnehmen (A'' E''), desgleichen die Höhe der 2 Pyramiden.

Parallelprojektion.

d) Zeichne auch die Parallelprojektion der ganzen Pyramide und des Stumpfs. Denke dir das Zeichnungsblatt in die Ebene des mittlern Längsschnittes hineingelegt. Dann erscheint dieser in wahrer Grösse und kann dem Aufriss entnommen werden. Dann kann man die Grundfläche A B C D (Fig. 62) einzeichnen, mit S verbinden und parallel zu ihr E F G H ziehen. In welcher Beziehung stehen A B C D und E F G H?

Drittes Beispiel.

3) Vor uns liegt ein Gewichtstein von 10 kg; seine Grundfläche ist ein regelmässiges Sechseck, dessen Seite 9,1 cm misst; seine Deckfläche ist ein regelmässiges Sechseck mit 7,2 cm Seitenlänge. Die Höhe beträgt 9 cm.

Markiere durch Stäbe die Verlängerungen der Seitenkanten. Diese Verlängerungen treffen sich in einem Punkte, der Pyramidenspitze. Wie erhält man die Form des Gewichtsteins aus der ganzen Pyramide? Indem man in der Höhe von 9 cm über der Grundfläche einen Schnitt parallel zu dieser führt. Dieser Gewichtstein ist auch ein Pyramidenstumpf. Seine 6 Seitenflächen sind kongruente, symmetrische Trapeze.

In welcher Beziehung stehen nun Grund- und Deckfläche? Würden wir die Grundfläche im Massstabe 7,2 : 9,1 zeichnen, so würden wir die Deckfläche erhalten. Je zwei Seiten von Grund- und Deckfläche sind parallel; Grund- und Deckfläche sind ähnlich.

Wie wäre das Volumen dieses Körpers zu berechnen? Wie sieht sein Netz aus?

Verallgemeinerung. Vergleichen wir die drei behandelten Pyramidenstumpfe, so sehen wir, dass sie alle durch Verlängerung der Seitenkanten zu einer Pyramide ergänzt werden können. Umgekehrt konnten wir uns jede dieser Körperformen dadurch entstanden denken, dass durch die zugehörige Pyramide ein Schnitt parallel zur Grundfläche geführt wurde. Die Deckfläche ist bei jedem der Grundfläche ähnlich; je zwei ihrer Seiten laufen parallel. Die Seitenflächen sind Trapeze. Wie erhielten wir den Inhalt dieser Körper genau? wie annähernd?

Satz 27. a) Ein Pyramidenstumpf entsteht, indem man durch eine Pyramide einen Schnitt parallel zu ihrer Grundfläche führt. Grund- und Deckfläche des Stumpfs sind ähnliche Vielecke, deren Seiten paarweise parallel laufen. Die Seitenflächen sind Trapeze.

b) Man erhält den Inhalt des Stumpfs, indem man von der ganzen Pyramide die weggeschnittene abzieht. Annähernd erhält man den Inhalt, wenn man den Inhalt des mittleren Durchschnitts mit der Höhe multipliziert.

Übungen.

1) Es soll ein Trichter von der Form eines Pyramidenstumpfs mit rechteckiger Grundfläche konstruiert werden, der oben 90 cm lang und 70 cm breit, unten 40 cm lang werden soll. Seine Höhe muss 80 cm betragen.

Zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss und sein Netz, und berechne ihn.

2) Ein Kieshaufen hat folgende Dimensionen:

Untere Länge = 4 m, obere Länge = 3 m;
„ Breite = 2,5 m, „ Breite = 2 m;
Höhe = 1,30 m.

Wieviel m^3 Kies enthält er? Man erhält ein annähernd richtiges Resultat, wenn man mittlere Länge × mittlere Breite × Höhe nimmt, also $\left(\frac{4+3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2{,}5+2}{2}\right) \cdot 1{,}30\ m^3 = 10{,}24\ m^3$.

Wieviel erhält der Weger für die Erstellung des Haufens à 3 Fr. pro m^3?

Inwiefern hat der Haufen nicht genau die Form eines Pyramidenstumpfs?

Wie gross müsste seine obere Breite sein, damit er diese Form hätte? $4 : 2{,}5 = 3 : x$; $x = 7{,}5 : 4 = 1{,}875$ m.

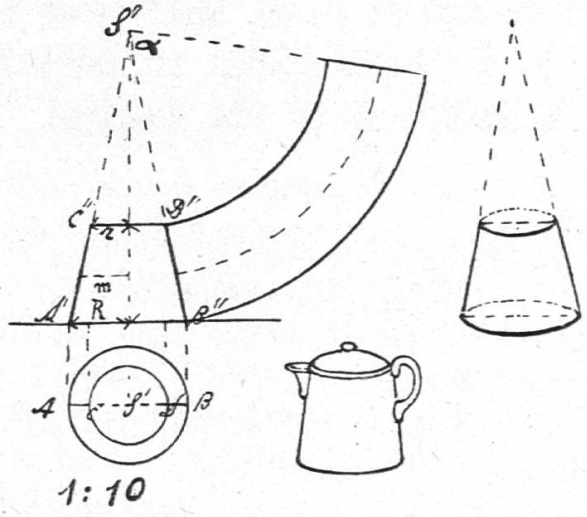
3) Zeichne den Grund- und den Aufriss des Daches eines Gartenhäuschens, dessen Grundfläche ein regelmässiges Sechseck von 1 m Seite, dessen Deckfläche ein solches von 40 cm Seite ist, während der Abstand von Grund- und Deckfläche 2 m beträgt. Berechne, wieviel m^2 Bretter es enthält.

Entnimm die Höhe einer Seitenfläche der Zeichnung.

K. Der Kegelstumpf.

1) *Ein Milchhafen ist unten 12 cm, oben 8 cm breit und 10 cm hoch. Stelle ihn dar; berechne seine Wandung und seinen Inhalt, und verfertige ein Kartonmodell.*

Fig. 63 Fig. 64 (a u. b)



Beschreibung und Zeichnung.

a) Diese Körperform heisst *Kegelstumpf*. Sie wird begrenzt von zwei ungleichen parallelen Kreisen als Grund- und Deckfläche und von einem Mantel. A C heisst eine Seitenlinie des Stumpfs. Die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte heisst seine Achse; sie gibt die Höhe an.

Zeichnet den Grund- und den Aufriss.