Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1895)

Heft: 1373-1398

Artikel: Über die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen

Autor: Wagner, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319080

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

C. Wagner.

Eingereicht den 12. Juni 1895.

Über die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

Bei meinen Untersuchungen über die Bessel'schen Funktionen I. Art mit vielfachem Argumente — es handelt sich darum, die Funktionen mit vielfachem Argumente durch ebensolche Funktionen mit einfachem Argumente möglichst elegant darzustellen — stiess ich auf verschiedene bestimmte Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \cos^2(x \sin\varphi)\, d\varphi, \quad \int_0^\pi \cos^3(x \sin\varphi)\, d\varphi, \quad \ldots \quad \int_0^\pi \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi,$$

welche sich leicht durch Bessel'sche Funktionen erster Art mit gleichem Index, in unserem Falle Null, und vielfachem Grundargumente, in unserem Falle x, ausdrücken lassen. Ich glaube, dass diese Entwicklungen einigen Wert besitzen, zumal ich in der diesbezüglichen Litteratur — soweit sie mir zugänglich war — keine derartigen ähnlichen Beziehungen zu finden vermochte. Andererseits zeigt aber diese Darstellung eine ganz eigentümliche Ähnlichkeit mit Entwicklungen der gewöhnlichen Cosinus-Funktion, so dass auch hieraus, wie ich glaube, gefolgert werden darf, dass die Bessel'schen Funktionen in der höheren Analysis eine weit wichtigere Rolle zu spielen berufen sind, als es im ersten Augenblicke den Anschein hat. Sie vertreten in gewissem Sinne die Cosinus-Funktion in der höheren Analysis. Ich werde am Schlusse vorliegender Arbeit hierauf zurückkommen.

Die Bessel'sche Funktion erster Art für den Index Null und das Argument x sei gegeben in der einfachen Form

$$\overset{0}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Für das Argument $x + y$ wird:

$$\overset{0}{J}(x+y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos([x+y] \sin\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big\{\cos(x \sin\varphi)\cos(y \sin\varphi) -$$

$$- \sin(x \sin\varphi)\sin(y \sin\varphi)\Big\}\, d\varphi$$

oder für $x = y$

$$\overset{0}{J}(2x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big\{\cos^2(x \sin\varphi) - \sin^2(x \sin\varphi)\Big\}\, d\varphi.$$

Ersetzt man hierin die Sinusfunktion in bekannter Weise durch die Cosinusfunktion, so entsteht

$$\overset{0}{J}(2x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x \sin\varphi)\, d\varphi - 1$$

oder

1) $$\int_0^{\pi} \cos^2(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\Big\{\overset{0}{J}(2x) + \overset{0}{J}(0)\Big\}$$

weil ist:

$$\overset{0}{J}(0) = 1.$$

In ganz ähnlicher Weise kann man $\overset{0}{J}(3x)$ berechnen, wobei das Integral

$$\int_0^{\pi} \cos^3(x \sin\varphi)\, d\varphi$$

auftritt, welches in folgender Form durch Bessel'sche Funktionen ausgedrückt ist:

2) $$\int_0^{\pi} \cos^3(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\Big\{\overset{0}{J}(3x) + 3\,\overset{0}{J}(x)\Big\}.$$

In gleicher Weise fortfahrend erhält man

$$3)\qquad \int_0^{\pi} \cos^4 (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{8} \left\{ \overset{0}{J}(4\ x) + 4\ \overset{0}{J}(2\ x) + 3\ \overset{0}{J}(0) \right\}$$

u. s. f.

Für die allgemeine Formel hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

I) n = einer ungeraden Zahl, 1, 3, 5 . . . 2m + 1.

$$A:\quad \int_0^{\pi} \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(n\ x) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}((n-2)x) + \binom{n}{2} \overset{0}{J}((n-4)x) + \cdots \right\},$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis das Argument x auftritt, z. B.:

$$\int_0^{\pi} \cos^9 (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{256} \left\{ \overset{0}{J}(9\ x) + 9\ \overset{0}{J}(7\ x) + 36\ \overset{0}{J}(5\ x) + 84\ \overset{0}{J}(3\ x) + 126\ \overset{0}{J}(x) \right\}.$$

II) n = einer geraden Zahl, 0, 2, 4 . . . 2m.

$$B:\quad \int_0^{\pi} \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(0) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \overset{0}{J}(2\ x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \overset{0}{J}(4\ x) + \cdots \right\},$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis das Argument nx auftritt, z. B.

$$\int_0^{\pi} \cos^6 (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{32} \left\{ 10\ \overset{0}{J}(0) + 15\ \overset{0}{J}(2\ x) + 6\ \overset{0}{J}(4\ x) + \overset{0}{J}(6\ x) \right\},$$

wobei zu bemerken ist, dass man hat

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

nach der bekannten Formel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Beide Formeln A und B lassen sich unter gewissen Voraussetzungen in eine einzige zusammenfassen, worüber ich in einer besonderen Arbeit mitteilen werde.

Diese Formeln erscheinen mir deshalb bemerkenswert, weil man mit ihrer Hülfe, wenn man die Funktionen mit mehrfachem Argumente durch solche mit einfachem Argumente ausdrückt, zu einer verhältnismässig einfachen Darstellung fraglicher Integrale gelangen kann. Mit den diesbezüglichen Untersuchungen bin ich gegenwärtig beschäftigt. Es handelt sich hierbei hauptsächlich darum, zu untersuchen, ob das Integral

$$\int_0^\pi \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi$$

nicht vielleicht als J-Funktion dargestellt werden kann, oder, mit anderen Worten, ob die in folgender Gleichung

$$\int_0^\pi \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi = A \,.\, \left[\int_0^\pi \cos (x \sin \varphi)\, d\varphi\right]^2 = A \,.\, [\pi \,.\, \overset{0}{J}(x)]^2$$

vorkommende, noch unbekannte Grösse A in irgend einer Weise als J-Funktion anzusehen ist, d. h. als Produkt oder Quotient von J-Funktionen mit einfachem Argumente betrachtet werden kann.

Für den Spezialfall

$$x = 1$$

entsteht unter sonst gleichen Bedingungen aus Gleichung A die Gleichung:

$$\int_0^\pi \cos^n (\sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(n) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}(n-2) + \binom{n}{2} \overset{0}{J}(n-4) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt, bis das Argument 1 auftritt, und aus Gleichung B die Relation:

$$\int_0^\pi \cos^n (\sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(0) + \binom{n}{\frac{n}{2} - 1} \overset{0}{J}(2) + \binom{n}{\frac{n}{2} - 2} \overset{0}{J}(4) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt, bis das Argument n auftritt.

Die vorher angedeutete Ähnlichkeit mit Entwicklungen der gewöhnlichen Cosinus-Funktion

$$\cos x$$

möge durch folgende Gleichungen bewiesen sein:

Man hat

$$\cos^0 x = 1$$
$$\cos^1 x = \cos x$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left\{\cos(2x) + \cos 0\right\}$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left\{\cos(3x) + 3\cos x\right\}$$

oder allgemein:

I. n = einer ungeraden Zahl, 1, 3, 5 . . . $2m + 1$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos(nx) + \binom{n}{1}\cos((n-2)x) + \binom{n}{2}\cos((n-4)x) + \cdots\right\}$$

fortgesetzt bis zum Gliede $\cos x$.

II. n = einer geraden Zahl, 0, 2, 4 . . . $2m$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\cos 0 + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\cos(2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2}\cos(4x) + \cdots\right\}$$

fortgesetzt bis zum Gliede $\cos(nx)$.