Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

hören, werden immer weniger spitzwinklig. Für $c = 0$ ist $x_1 = x_2$ und die Dreiecke fallen als gleichseitige zusammen.

V.

§ 14. *Fünfte Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Basis und die Summe oder Differenz der beiden Dreieckshöhen gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;
2. $h_b \pm h_s = \pm c =$ konstant.

Bedingung: $\infty \gtreqless h_b + h_s \geqq 0$; $\infty \gtreqless h_b - h_s \gtreqless 0$.

Für ein unendlich kleines Dreieck verschwinden beide Höhen, also Summe und Differenz $= 0$; für ein unendlich grosses Dreieck ist $h_b = \infty$ und $h_s = b$, somit Summe und Differenz $= \infty$. Die Differenz $h_b - h_s$ wird ein zweitesmal zu Null, wenn der Basiswinkel 60^0 misst. Ist er kleiner als 60^0, so ist $h_b - h_s$ = neg., ist er grösser als 60^0, so ist $h_b - h_s$ = pos.

§ 15. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. II, Fig. 9.

$OA = b$ sei die Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Auf MM_1 tragen wir c von C aus nach E ab. Es gehe durch O ein Strahl, der den Grundkreis in Q schneidet. Von E aus schlagen wir nun mit dem Radius $r = AQ$ einen Kreisbogen, der den Strahl OQ in P_1 und P_2 schneidet. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Hilfskurve. Dieselbe kann daher folgendermassen definiert werden:

Zieht man durch O Strahlen, so ist die Kurve der geometrische Ort eines Strahlenpunktes, der von einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten denselben Abstand hat wie der Strahl selber vom festen Punkt A. Fällt ein Kurvenpunkt in die Mittelsenkrechte, so ist

einerseits $EC \pm PE = h$;
andererseits ist $EC \pm PE = c \pm h_s$; folglich
$h_b = c \pm h_s$, d. h. wir haben eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten ergeben daher die gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen durch OA die x-Axe und durch O die y-Axe. x und y seien die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1. EN sei || AO gezogen; dann ist

$$EP_1 = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y-c)^2}; \qquad (\alpha)$$

$EP_1 = AQ = b \sin\varphi$, in (α) eingesetzt, so giebt es

$$b \sin\varphi = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y-c)^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y-c)^2\right] - b^2 y^2 = 0. \qquad (1)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von 4. Ordnung und hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt. Die Gleichung der *Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b^2}{4} + c^2\right) - b^2 y^2 = 0;$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{b^2 + 4c^2}{3b^2 - 4c^2}}. \qquad (2)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$;

   $y = \pm \frac{x}{3}\sqrt{3}$; die Nullpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 30^0$.

2. $c = \frac{b}{2}$;

   $y = \pm x$.

Richtungswinkel der Tangenten $= \pm 45^0$. Die Tangente $y = -x$ ist Wendetangente.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$;

   $y = \pm x\sqrt{3}$, Richtungswinkel $= \pm 60^0$.

4. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

   $x = 0$ 2mal.

Die y-Axe ist Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

5. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Tangenten werden imaginär, und der Nullpunkt wird zum isolierten Punkt.

Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$ und erhalte

1. $y_1 = y_2 = 0$ und 2. $y_{3,4} = c \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$ und finde

1. $x_1 = x_2 = 0$ und 2. $x_{3,4} = \frac{b}{2} \pm ci$.

So lange c von 0 verschieden ist, schneidet die Kurve die x-Axe nur im Doppelpunkt O. Ist $c = 0$, so werden auch die beiden andern Schnittpunkte reell und fallen in den Punkt C, welcher Doppelpunkt der Kurve wird.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; denn es ist

$$U_n = (x^2 + y^2)^2.$$

Reelle Punkte hat die Kurve im Unendlichen nicht, daher auch keine Asymptoten.

Die Kurve ist *rational;* denn sie hat 3 Doppelpunkte. Für $c = 0$ besitzt sie 4 Doppelpunkte und zerfällt, wie wir noch sehen werden.

Für $c = 0$ nimmt Gleichung (1) die Form an:

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2\right] - b^2 y^2 = 0;$$

das Gleichungspolynom lässt sich in 2 Faktoren zerlegen; wir erhalten:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} + \frac{by}{2}\sqrt{3}\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3}\right) = 0; \qquad (3)$$

daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3} = 0 \\ &\text{oder}\quad \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}, \qquad (\beta) \\ \text{und}\quad &2.\quad \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}. \qquad (\gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Kurve zerfällt in 2 Kreise (β) und (γ), deren Mittelpunktskoordinaten: $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $\left(\frac{b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ sind.

Beide Kreise haben den Radius $r = \frac{b}{2}$. Beide Kreise schneiden sich in O und C.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c; nur liegen die Gebilde symmetrisch zueinander.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Spitzen B der gleichschenkligen Dreiecke. Alle haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$. Setzen wir diesen Wert in der Kurvengleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right)(y^2 - 2cy + c^2) - b^2y^2 = 0. \tag{5}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte B. Lösen wir (5) auf, so finden wir zunächst folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3 - \frac{9b^4 - 24b^2c^2 + 16c^4}{48} v + \frac{27b^6 - 972b^4c^2 + 144b^2c^4 - 64c^6}{864} = 0.$$

Die Diskriminante letzterer Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^4c^2(64c^6 - 144b^2c^4 + 540b^4c^2 - 27b^6)}{432}.$$

Es ist nun $\Delta = 0$, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad c = 0, \\ 2.\quad c = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wir bekommen daher folgende Hauptfälle:

$$\text{A.}\quad c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}.$$

Die Diskriminante der kubischen Hilfsgleichung ist positiv; die biquadratische Gleichung (5) besitzt folglich 2 reelle Wurzeln, und wir erhalten 2 reelle Lösungen.

$$1.\quad c > \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Beide Dreiecke sind nach Konstruktion spitzwinklig. Das kleinere davon ist gleichseitig, wenn speziell $c = b\sqrt{3}$.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Für diesen Wert von c wird Gleichung (5) erfüllt, wenn wir für y den Wert $\frac{b}{2}$ einsetzen. Folglich haben wir hier unter den beiden Dreiecken ein rechtwinkliges.

$$3. \quad c < \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Ein Dreieck wird stumpfwinklig; das andere bleibt spitzwinklig.

$$B. \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}; \; \Delta = 0.$$

4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die Kurve berührt die Mittelsenkrechte MM_1. Ein Dreieck ist spitzwinklig, die 3 andern stumpfwinklig, worunter 2 zusammenfallende.

$$C. \quad c < \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}.}$$

Die Diskriminante ist negativ; daher erhalten wir 4 reelle Lösungen. So lange c von 0 verschieden ist, sind sämtliche Dreiecke ungleich, und zwar sind 2 derselben stumpfwinklig, eines spitzwinklig und das vierte stumpfwinklig, rechtwinklig oder spitzwinklig, je nachdem $c \gtreqless \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ist. Taf. II, Fig. 9.

Für $c = 0$ werden die 2 stumpfwinkligen Dreiecke unendlich klein, d. h. sie reduzieren sich auf die Basis. Die 2 spitzwinkligen werden gleichseitig.

§ 16. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 14.

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 10.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte und machen auf der letztern $CE = c =$ konstant. Nun ziehen wir durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Wir verbinden A mit Q und tragen auf dieser Ver-

bindungslinie die Strecke RE von A aus nach beiden Seiten ab, so dass $AP_1 = AP_2 = RE$ ist.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt in den Grundkreis, so ist

$$1.\quad RE = AP = AQ = h_s,$$
$$2.\quad RE = c \mp h_b;\ \text{folglich}$$

$c \mp h_b = h_s$ oder $c = h_s \pm h_b$; wir haben also eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis müssen daher die Fusspunkte D der Schenkelhöhen der gesuchten Dreiecke sein.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen das rechtwinklige Koordinatensystem in gewohnter Weise. Sind x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so gilt

$$AP_1 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $AP_1 = c - CR$. $\qquad (\beta)$

Ferner ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{RC}{OC} = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi) = \frac{b-x}{y}$, somit

$$RC = \frac{(b-x)b}{2y},$$ eingesetzt in (β) ergiebt

$$AP_1 = \frac{2cy - (b-x)b}{2y},$$ eingesetzt in (α) führt zur Kurvengleichung:

$$4y^2[(b-x)^2 + y^2] - [2cy - (b-x)b]^2 = 0. \qquad (7)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 4. Ordnung. Verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach A durch Parallelverschiebung der Axen, indem wir setzen

$$x = x' + b \quad \text{und} \quad y = y',$$

so erhalten wir nach der Transformation und nach Weglassung der Indizes folgende einfachere Kurvengleichung:

$$4y^2(x^2 + y^2) - (2cy + bx)^2 = 0. \qquad (8)$$

A ist Doppelpunkt der Kurve; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Die Doppelpunktstangenten fallen zusammen und bilden, da die Glieder 3. Grades fehlen, eine *Selbstberührungstangente*. Der *Nullpunkt ist also Selbstberührungspunkt.*

Die Gleichung der Selbstberührungstangente lautet:

$$y = -\frac{b}{2c}x. \tag{9}$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$; $x = 0$. Fig. 10.
2. $c = \frac{b}{2}$; $y = -x$.
3. $c = \infty$; $y = 0$.

Wächst also c von 0 bis ∞, so dreht sich die Selbstberührungstangente um 90° aus der Richtung der y'-Axe in die Richtung der x'-Axe.

Die x'-Axe schneidet die Kurve nur im Selbstberührungspunkt A; die andern 2 Schnittpunkte fallen ins Unendliche, da die Potenzen x^3 und x^4 nicht vorhanden sind.

Die Schnittpunkte der y'-Axe mit der Kurve liegen für endliche Werte von c alle im Endlichen; es ist

$$y_{1,2} = 0 \quad \text{und} \quad y_{3,4} = \pm c.$$

Die Gleichung nach x aufgelöst, ergiebt

$$x = \frac{2bcy \pm 2y^2\sqrt{b^2 + 4c^2 - 4y^2}}{4y^2 - b^2}. \tag{10}$$

Jedem Wert von y entsprechen 2 verschiedene Werte von x. Nur für $y = 0$ fallen die Wurzeln zusammen. In diesem einzigen Fall liegt die Kurve symmetrisch und zwar zu beiden Axen. Jede Parallele zur x-Axe schneidet die Kurve im Endlichen in 2 Punkten, den Fall ausgenommen, da der Nenner Null wird. Die 2 Parallelen

$$y = \pm\frac{b}{2} \tag{11}$$

müssen daher *Asymptoten* der Kurve sein. Der Maximalwert, den y annehmen kann, ist

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c^2}.$$

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, setzen wir nach bekanntem Verfahren

$$U_n = 4y^2(x^2 + y^2) = 0; \text{ daraus folgt}$$

1. $y = 0$ 2mal und 2. $y = \pm ix$.

Wir haben somit 2 reelle, zur x-Axe parallele Asymptotenrichtungen und 2 imaginäre. Die Kurve schneidet also die imagi-

nären Kreispunkte der Ebene. Da nun $y=0$ auch ein Faktor von U_3 ist, so muss der unendlich ferne Punkt der x-Axe ein Doppelpunkt der Kurve sein. Um die Art desselben zu untersuchen, projizieren wir ihn in den Nullpunkt A und setzen zu diesem Zwecke in Gleichung (8):

$$x=\frac{1}{x'} \quad \text{und} \quad y=\frac{y'}{x'}.$$

Wir erhalten, wenn wir nach der Transformation noch mit x'^4 multipliziert haben:

$$4y'^2(1+y'^2)-(2cy'x'+bx')^2=0.$$

Der Nullpunkt ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Tangenten in demselben lautet

$$y'=\pm\frac{b}{2}x'.$$

Die projizierte Kurve hat im Nullpunkt einen Knotenpunkt mit 2 verschiedenen Tangenten; folglich ist der unendlich ferne Punkt der x-Axe auch ein solcher Doppelpunkt. Die Tangenten in demselben sind

$$y'=yx'=\pm\frac{b}{2}x' \quad \text{oder}$$

$$y=\pm\frac{b}{2}.$$

Diese Tangenten sind Asymptoten der Kurve, wie dies schon die Gleichung (10) verraten hat.

Unsere Kurve gehört somit auch zu den *rationalen* Kurven; denn sie besitzt einen Selbstberührungspunkt und einen Doppelpunkt, was zusammen für 3 Doppelpunkte zählt.

Für $c=0$ besteht die Kurve, deren Gleichung nun die Form hat

$$4y^2(y^2+x^2)-b^2x^2=0, \text{ aus 2 kongruenten Ästen} \quad (12)$$

zwischen den Asymptoten $y=\pm\frac{b}{2}$, siehe Fig. 10, Taf. III.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten x-Axe. Asymptoten und Selbstberührungstangente laufen parallel.

Nimmt c negative Werte an, so sind die entstehenden Kurven Spiegelbilder derjenigen mit positivem c in Bezug auf die x-Axe.

d) Die Lösungen.

Die Koordinaten der zunächst gesuchten Schnittpunkte D sind die Wurzeln des Systems

1. $4y^2[(b-x)^2+y^2]-[2cy-(b-x)b]^2=0$, Kurve.

und 2. $x^2-bx+y^2=0$, Grundkreis.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stösst auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir können die Übereinstimmung mit dem ersten Verfahren nur in Spezialfällen nachweisen.

1. Für ein gleichseitiges Dreieck besitzt der Punkt D die Koordinaten $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$.

Setzen wir diese Werte für x und y in Gleichung (1) unseres Systems oben ein, so wird

$$c_1 = b\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Vergleiche damit die Fälle A_1 und C, pag. 136.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Koordinaten von $D = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Setzt man diese Werte gleichen Orts wieder ein, so wird $c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$. Fig. 10.

Vergleiche damit A_2, pag. 136.

3. Für ein unendlich kleines Dreieck hat Punkt D die Koordinaten (b, 0). Die Einsetzung dieser Werte liefert $c = 0$, vergleiche damit C, pag. 136; siehe Fig. 10.

VI.

§ 17. *Sechste Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Schenkelhöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b.
2. $s \pm h_s = c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_s \gtreqless \frac{b}{2}$,
2. $s - h_s \gtreqless 0$.

Bei einem unendlich kleinen, auf die Basis reduzierten Dreieck ist $s + h_s = \frac{b}{2} =$ Minimum; denn $s = \frac{b}{2}$ und $h_s = 0$.