Über das Airysche Integral

Autor(en): **Bohren, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1902)**

Heft 1519-1550

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319126

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

A. Bohren.

(Eingereicht den 6. Oktober 1902.)

Über das Airysche Integral.

Als mathematischen Ausdruck der Intensität der einzelnen Farben im Regenbogen findet Airy[1]) das nach ihm benannte Integral

$$A = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (x^3 - m x)\, dx.$$

Airy wertet dasselbe schon für die Argumente $m = -5{,}6$ bis $m = +5{,}6$ aus, allerdings noch auf umständlichem Wege. Infolge der Bedeutung, die dem Integral in der mathematischen Optik zukommt, ist in erster Linie nach einfachern Auswertungsmethoden gesucht worden. Stokes[2]) bedient sich folgender Formeln

$$A = 2^{\frac{1}{2}} (3m)^{-\frac{1}{4}} \left[R \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + S \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

worin $R = 1 - \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{1 \cdot 2 (72\varphi)^2} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (72\varphi)^4} - + \cdots$

$$S = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 72\varphi} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 (72\varphi)^3} + - \cdots.$$

und

$$\varphi = \pi \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mit deren Hilfe er ausgedehnte Tafeln berechnet.

Die Wurzelwerte der Gleichung $A = 0$ ergeben sich nach ihm aus

---

[1]) Transact. of the Cambridge phil. soc. 1838. pag. 379.

[2]) Stokes, Math. and phys. papers Cambridge 1883. II vol. p. 332.

$$\frac{\varphi}{\pi} = n - 0{,}25 + \frac{0{,}028145}{4n-1} - \frac{0{,}26510}{(4n-1)^3} + \frac{0{,}129402}{(4n-1)^5},$$

wo $n = 1, 2, 3, 4 \cdots$

und für die Maxima und Minima rechnet er nach einer ähnlichen Formel die 50 ersten entsprechenden Werte von m aus. Für Ausführung von Intensitätsberechnungen[1]) sind die Zahlenwerte des Integrals genügend bekannt; die vorliegende Mitteilung befasst sich auch nicht mit der Beschaffung neuer Zahlenwerte; aber es ist vielleicht von Interesse, zu sehen, wie auch dieses Integral durch Besselsche Funktionen einfach darstellbar ist.

Setzt man

$$\text{I.} = \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx$$

$$\text{II.} = \int_0^\infty e^{-\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx,$$

so ist
$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(x^3 - mx)\,dx = \frac{1}{2}(\text{I} + \text{II}).$$

Für das Integral $\int e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx$ wähle man folgenden Integrationsweg: Die Begrenzung eines Kreissektors (mit dem Centrum O, dem Radius R), der durch die x-Axe und eine Gerade, die mit derselben einen Winkel von 30° bildet, begrenzt ist.

Das Integral, über diesen Weg erstreckt, ist nach Cauchy = 0. Längs des Bogens verschwindet es, wenn R unendlich gross wird; somit ist

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx = \int e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx \text{ längs OB, wenn B un-}$$

endlich weit vorausgesetzt wird.

$$= \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(i x^3 - m x e^{\frac{i\pi}{6}})} e^{\frac{i\pi}{6}} dx$$

$$= e^{\frac{i\pi}{6}} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}x^3} e^{-\frac{i\pi}{2} m x e^{\frac{i\pi}{6}}} dx.$$

---

[1]) Pernter, die Farben des Regenbogens. Sitzungsberichte d. Akademie Wien 1896, p. 135.

Entwickeln wir nach Potenzen von m, so erhalten wir eine konvergente Reihe von der Form

$$= e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{i\pi}{2} m e^{\frac{i\pi}{6}}\right)}{\Gamma(r+1)} e^{-\frac{\pi}{2}x^3} x^r \, dx$$

da $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}x^3} x^r \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y} y^{\frac{r+1}{3}-1} dy = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{r+1}{3}}}$$

so ist $$\int_0^{\infty} e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{3} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left[\frac{i\pi}{2} m e^{\frac{i\pi}{6}}\right]^r \Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{r+1}{3}} \Gamma(r+1)}.$$

Setzt man in

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdot \cdot \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-an+\frac{1}{2}} \Gamma(na)$$

$$a = \frac{r+1}{3} \text{ und } n = 3, \text{ so ist}$$

$$\Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r}{3}+1\right) = 2\pi 3^{-r-\frac{1}{2}} \Gamma(r+1)$$

und

$$I = \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma\left(\frac{r+2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{r}{3}+1\right)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{i m e^{\frac{i\pi}{6}}}{3}\right]^r.$$

Zerlegen wir die Reihe in 3 Partialreihen, entsprechend den Werten von r, die durch 3 dividiert, die Reste 1, 0, — 1 ergeben, so folgt

$$I = \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{i\pi}{6}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1) \cdot \Gamma\left(\lambda+1+\frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{m}{3}\right]^{3\lambda+1}$$

$$+ \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{3}\right) \Gamma(\lambda+1)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{m}{3}\right]^{3\lambda}$$

$$+\frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} i \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{m}{3}\right]^{3\lambda-1}.$$

Das Integral II erhält man aus I, indem man i durch $-i$ ersetzt. Führt man die Besselsche Funktion

$$\overset{a}{J}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)\cdot\Gamma(\lambda+1)}$$

ein, und bedenkt man, dass $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, so ergibt sich

$$A=\frac{1}{2}(I+II)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\overset{\frac{1}{3}}{J}\left[\pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\overset{-\frac{1}{3}}{J}\left[\pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}.$$

Spezialfälle

$$m=0 \qquad \int_0^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}x^3\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$m=3 \qquad \int_0^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}(x^3-3x)\,dx=\frac{\pi}{3}\left[\overset{\frac{1}{3}}{J}(\pi)+\overset{-\frac{1}{3}}{J}(\pi)\right] \quad \text{etc.}$$

Wenn auch die vorliegenden Ausdrücke nicht so einfach sind wie die, die bei der Darstellung der Fresnelschen Integrale durch Besselsche Funktionen auftreten, so sind sie doch von einigem Interesse.