Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel

Autor: Schenker, O.

Kapitel: VI: Eine Beziehung zwischen der Euler'schen Geraden und der Parabel von Kiepert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

VI. Eine Beziehung zwischen der Euler'schen Geraden und der Parabel von Kiepert.

Zunächst will ich bemerken, dass die Parabel von Kiepert auch Parabel von Neuberg genannt wird; Lemoine gebraucht diese Bezeichnung ohne Zweifel auf Grund der Arbeit Neubergs: «Mémoire sur le Tetraèdre» in den Mémoires de l'Académie Royale de Belgique XXXVII. Von dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis, nachdem der erste Teil zu der meinigen bereits abgeschlossen war. Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle dem hervorragenden Förderer der Dreiecksgeometrie, Herrn Prof. Neuberg in Lüttich, für seine vielen Anregungen meinen besten Dank auszusprechen.

Die hervorgehobene Beziehung lässt sich in folgendem Satz aussprechen:

Trifft irgend eine Tangente der Kiepert'schen Parabel die Seiten des Grunddreiecks in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ und zieht man um dieselben als Mittelpunkte die Kreise durch irgend einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ der Euler'schen Geraden, so ist der Ort ihres zweiten Schnittpunktes $\mathfrak{O}'$ eine zyklische Kurve dritten Grades mit einer zur Euler'schen Geraden parallelen Asymptote. Der feste Punkt $\mathfrak{O}$ ist Doppelpunkt dieser Kurve; seine Tangenten stehen zueinander senkrecht und berühren ausserdem die Parabel von Kiepert.

Bei der Darlegung dieses Satzes werden wir Gelegenheit haben, von derjenigen Methode Gebrauch zn machen, die schon Descartes zur Lösung des Tangentenproblems angewandt hat.

Nun wollen wir im Geiste Descartes daran gehen, den an die Spitze gestellten Satz zu beweisen. Descartes ist ja der eigentliche Begründer der analytischen Methode, von der wir Gebrauch machen.

Wir benützen die Figur 2; nach dem zugehörigen Texte ist $\mathfrak{B}C = p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A : \sin(C - A)$. In Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in B und mit BC zur $+$ x Achse (die $+$ y Achse soll darüber liegen) sind daher die Koordinaten von $\mathfrak{B}$, wenn noch $p \cdot \sin \cdot (C - A) = P$ gesetzt wird:

$$x_{\mathfrak{B}} = BC - \mathfrak{B}C \cdot \cos C$$
$$= \sin A \cdot \sin(C - A) + (\sin^2 A - P)\cos C : \sin(C - A)$$
$$= \sin^2 A \cdot \cos C - P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A$$
$$- \sin A \cdot \cos C \cdot \sin A : \sin(C - A)$$
$$= \underline{- P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A : \sin(C - A)} \quad \text{und}$$

$$y_{\mathfrak{B}} = \underline{(P - \sin^2 A) \cdot \sin C : \sin(C - A)}$$

Ähnlich bekommt man für $\mathfrak{A}$:

$$x_{\mathfrak{A}} = - P + \sin^2 C : \sin(C - B); \; y_{\mathfrak{A}} = 0$$

Die Gleichungen der Kreise aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ mit den Koordinaten a und b lauten daher:

$$\left[x - \frac{\sin^2 C - P}{\sin(C - B)}\right]^2 + y^2 = \left[a - \frac{\sin^2 C - P}{\sin(B - B)}\right]^2 + b^2 \quad \text{bezw.}$$

$$\left[x - \frac{-P\cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A}{\sin(C - A)}\right]^2 + \left[y - \frac{P - \sin^2 A}{\sin(C - A)} \cdot \sin C\right]^2$$
$$= \left[a - \frac{-P\cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A}{\sin(C - A)}\right]^2 + \left[b - \frac{P - \sin^2 A}{\sin(C - A)} \cdot \sin C\right]^2$$

oder
$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\sin(C - B)$$
$$- 2x(\sin^2 C - P) = - 2a(\sin^2 C - P) \quad \text{bezw.}$$

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\sin(C - A)$$
$$- 2x(- P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A)$$
$$- 2y(P - \sin^2 A) \cdot \sin C = - 2a(- P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A)$$
$$- 2b(P - \sin^2 A) \cdot \sin C \quad \text{oder}$$

$$\underline{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\sin(C - B)}$$
$$\underline{- 2\sin^2 C(x - a) = - 2P(x - a)} \quad \text{und}$$

$$\underline{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\sin(C - A)}$$
$$\underline{+ 2\sin A \cdot \sin C[-(x - a)\cos A + (y - b)\sin A]}$$
$$\underline{= 2P[\sin C \cdot (y - b) - \cos C \cdot (x - a)]}$$

Verschiebt man das Koordinatensystem parallel sich selbst in den Punkt $\mathfrak{O}$ (a, b), so lauten die beiden letzten Gleichungen in Bezug auf das neue Koordinatensystem (man hat nämlich x durch $x + a$ und y durch $y + b$ zu ersetzen):

$$(x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y)\sin(C - B) - 2\sin^2 C \cdot x = -2\,P \cdot x$$

$$(x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y)\sin(C - A)$$
$$+ 2\sin A \cdot \sin C\,(-x\cos A + y\sin A) = 2\,P \cdot (\sin C \cdot y - \cos C\,x)$$

Aus diesen beiden Gleichungen bekommt man durch Elimination von P die Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y)\,[-2\,x \cdot \sin(C - A)$$
$$- 2 \cdot \sin(C - B)\,(\sin C\,y - \cos C\,x)] - 4 \cdot \sin A$$
$$\cdot \sin C\,(-x \cdot \cos A + y \cdot \sin A)\,x + 4\sin^2 C \cdot x\,(\sin C \cdot y - \cos C\,x) = 0$$

und dies ist die Gleichung für den Ort der Schnittpunkte der Kreise aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{O}$ (a, b). Da in dieser Gleichung die Glieder mit der 0. und 1. Potenz der Veränderlichen fehlen, so ist der Punkt $\mathfrak{O}$ (a, b) Doppelpunkt der Kurve, ferner ist ihre reelle Asymptote parallel zur Geraden:

$$-2\,x\,[\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] - 2\,y \cdot \sin C \cdot \sin(C - B) = 0$$

welche parallell ist zur Geraden von Euler, wie später die Gleichung der Euler'schen Geraden zeigt. Die Tangenten im Doppelpunkt haben zur Gleichung:

$$x^2\,[-4\,a\sin(C - A) + 4\,a \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C + 4\sin A \cdot \sin C$$
$$\cdot \cos A - 4\sin^2 C \cdot \cos C]$$

$$+ y^2\,[-4\,b\sin(C - B) \cdot \sin C] + 4\,x\,y\,[-b \cdot \sin(C - A)$$
$$+ b \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C - \sin^2 A \cdot \sin C + \sin^3 C$$
$$- a \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C] = 0 \qquad \text{oder}$$

$$-\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot b\sin(C - B) \cdot \sin C + \frac{y}{x}\Big[-b \cdot \sin(C - A)$$
$$+ b \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C - a \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C$$
$$- \sin^2 A \cdot \sin C + \sin^3 C]$$
$$- a \cdot \sin(C - A) + a \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A$$
$$- \sin^2 C \cdot \cos C = 0$$

aus dieser Gleichung ergeben sich 2 Werte für $\frac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)_1 \text{ u. } \left(\frac{y}{x}\right)_2; \text{ ist } \left(\frac{y}{x}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)_2 = -1$$

so stehen die beiden Tangenten zu einander senkrecht, oder nach obiger Gleichung:

$$\underline{a\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]+b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C}$$
$$\underline{-\sin A\cdot\sin C\cdot\cos A+\sin^2 C\cdot\cos C=0}$$

Dies ist die Gleichung der Euler'schen Geraden, denn setzt man für a und b die Koordinaten $\frac{\sin A}{2}$ und $\frac{\cos A}{2}$ des Umkreismittelpunktes in diese Gleichung ein, so kommt:

$$\sin A\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]+\cos A\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C$$
$$-2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos A+2\cdot\sin^2 C\cdot\cos C=0$$

oder wegen

$$-2\cdot\sin A\cdot\sin C\cdot\cos A+2\sin^2 C\cdot\cos C=\sin C(\sin 2C-\sin 2A)$$
$$=-2\cdot\sin C\cdot\cos B\cdot\sin(C-A) \qquad \text{oder}$$

$$\sin(C-B)\cdot\sin(C-A)+\sin(B-C)\cdot\sin(C-A)=0$$

Die Koordinaten des Umkreismittelpunktes erfüllen also die Gleichung der erhaltenen Geraden, somit liegt er auch auf dieser Geraden. Setzt man aber die Koordinaten des Höhenpunktes: $\sin C\cdot\cos B$ und $\cos B\cdot\cos C$ für a und b in diese Gleichung ein, so kommt:

$$\sin C\cdot\cos B\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]+\cos B\cdot\cos C$$
$$\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C-\sin A\cdot\sin C\cdot\cos A+\sin^2 C\cdot\cos C=0$$

oder

$$\sin C\,\{\cos B\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]+\cos B\cdot\cos C$$
$$\cdot\sin(C-B)-\sin A\cdot\cos A+\sin C\cdot\cos C\}$$
$$=\sin C\left\{\cos B\cdot\sin(C-A)-\frac{\sin 2A}{2}+\frac{\sin 2C}{2}\right\}$$
$$=\sin C\left\{\cos B\cdot\sin(C-A)+\cos(C+A)\cdot\sin(C-A)\right\}$$
$$=\sin C\left\{\cos B\cdot\sin(C-A)-\cos B\cdot\sin(C-A)\right\}=0;$$

die Koordinaten des Höhenpunktes erfüllen also die Gleichung der erhaltenen Geraden, somit liegt er auch auf derselben. Die Gerade geht also durch den Umkreismittelpunkt und den Höhenpunkt und ist daher die Euler'sche Gerade. Damit ist ein Teil des Seite 28 gegebenen Satzes bewiesen; um auch den Rest zu beweisen, schreiben wir zunächst den Richtungskoeffizienten für die Tangenten im Doppelpunkt hin:

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \frac{-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}$$
$$+ \frac{-a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}$$

$$\pm \frac{\sqrt{[-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 - 4b \sin(C-B) \cdot \sin C [a \cdot \sin(C-A) - a \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]}}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}$$

Die Gleichung dieser Doppelpunktstangenten in Bezug auf das feste Koordinatensystem durch B lautet daher:

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}$$
$$+ \frac{-a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}$$

$$\pm \frac{\sqrt{[-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 - 4b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C [a \cdot \sin(C-A) - a \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]}}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C} \qquad (1)$$

Der Doppelpunkt $\mathfrak{D}$ wird zur Spitze, wenn der Radikand verschwindet. $\mathfrak{D}$ liegt dann auf der Kiepert'schen Parabel. Denn man überzeugt sich ohne weiteres, dass der Null gesetzte Radikand eine dem Dreieck ABC eingeschriebene Parabel vorstellt, und dass die Koordinaten ihrer Berührungspunkte auf den Dreiecksseiten mit denen übereinstimmen, welche die Gleichung der Kiepert'schen Parabel in trimetrischen Koordinaten liefert.

Liegt nun der Punkt $\mathfrak{D}$ (a, b) auf der Geraden von Euler, so gilt:

$$a = \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) - b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C : \sin(C-A) - \sin(C-B) \cdot \cos C$$

Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form:

$$\{(y-b)\,2b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C+(x-a)\,[b\cdot\sin(C-A)$$
$$-b\cdot\sin(C-B)\cdot\cos C+a\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C-\sin^3 C$$
$$+\sin^2 A\cdot\sin C]\}^2$$
$$=(x-a)^2\,\{[-b\cdot\sin(C-A)+b\cdot\sin(C-B)\cdot\cos C-a$$
$$\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C+\sin^3 C-\sin^2 A\cdot\sin C]^2-4b\cdot\sin(C-B)$$
$$\cdot\sin C\,[a\cdot\sin(C-A)-a\cdot\sin(C-B)\cdot\cos C-\sin A\cdot\sin C$$
$$\cdot\cos A+\sin^2 C\cdot\cos C]\}$$

und drücken hier a durch b aus, so kommt mit Wegschaffung der Nenner:

$$\Big[(y-b)\cdot 2b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2$$
$$+\{x\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]$$
$$-\sin C(\sin A\cos A-\sin C\cdot\cos C)$$
$$+b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\}\cdot\{b\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2$$
$$-b\cdot\sin^2(C-B)\sin^2 C-\sin C(\sin^2 C-\sin^2 A)\,[\sin(C-A)$$
$$-\sin(C-B)\cos C]+\sin(C-B)\cdot\sin C\,[\sin C(\sin A$$
$$\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)]\}\Big]^2$$
$$=\{x\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]$$
$$-\sin C(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)+b\cdot\sin(C-B)\sin C\}^2$$
$$\cdot\{[-b\cdot\sin(C-A)+b\cdot\sin(C-B)\cdot\cos C-a\cdot\sin(C-B)$$
$$\cdot\sin C+\sin^3 C-\sin^2 A\cdot\sin C]^2-4b\cdot\sin(C-B)$$
$$\cdot\sin C\,[a\cdot\sin(C-A)-a\cdot\sin(C-B)\cdot\cos C$$
$$-\sin A\cdot\sin C\cdot\cos A+\sin^2 C\cdot\cos C]\}$$
$$=\{x\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]-\sin C(\sin A\cdot\cos A$$
$$-\sin C\cdot\cos C)+b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\}^2$$
$$\cdot\Big[\{b\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2-b\cdot\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C$$
$$-\sin C(\sin^2 C-\sin^2 A)\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]$$
$$+\sin(C-B)\cdot\sin C\cdot\sin C(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)\}^2$$
$$-4b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\,[\sin C(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)$$
$$-b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C-\sin C(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C]$$
$$\cdot[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\Big]$$

oder nach Auflösung der Klammern und Reduktion:

$$
\begin{aligned}
&(y-b)^2\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cos C]^2\cdot 4\,b^2\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\\
&\quad+4\,(y-b)\cdot b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\cdot\{x\,[\sin(C-A)\\
&\quad-\sin(C-B)\cdot\cos C]-\sin C\,(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)\\
&\quad+b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\}\cdot\{b\cdot[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\\
&\quad-b\cdot\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C-\sin C\,(\sin^2 C-\sin^2 A)\,[\sin(C-A)\\
&\quad-\sin(C-B)\cos C]+\sin(C-B)\\
&\quad\cdot\sin C\cdot\sin C\,(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cos C)\}\\
&=4\,b^2\cdot\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\,\{x\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]\\
&\quad-\sin C\cdot(\sin A\cos A-\sin C\cos C)+b\cdot\sin(C-B)\sin C\}^2
\end{aligned}
$$

oder wenn man beide Seiten mit $4\,b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C$ dividiert:

$$
\begin{aligned}
&(y-b)^2\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\cdot b\sin(C-B)\cdot\sin C\\
&\quad+(y-b)\cdot\{x\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cos C]\\
&\quad-\sin C\,(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)+b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\}\\
&\quad\cdot\{b\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cos C]^2-b\sin^2(C-B)\qquad(2)\\
&\quad\cdot\sin^2 C-\sin C\,(\sin^2 C-\sin^2 A)\,[\sin(C-A)\\
&\quad-\sin(C-B)\cos C]+\sin(C-B)\\
&\quad\cdot\sin^2 C\,(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)\}=\\
&=b\cdot\sin(C-B)\sin C\,\{x\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cos C]\\
&\quad-\sin C\,(\sin A\cdot\cos A-\sin C\cdot\cos C)+b\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\}^2
\end{aligned}
$$

Für die Glieder mit b^3 hat man links:

$$
\begin{aligned}
&b^3\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\sin(C-B)\cdot\sin C\\
&-b^3\,[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C\\
&+b^3\sin^3(C-B)\cdot\sin^3 C=b^3\cdot\sin^3(C-B)\cdot\sin^3 C
\end{aligned}
$$

und rechts hat man ebenfalls $b^3\cdot\sin^3(C-B)\cdot\sin^3 C$.

Die Glieder mit der 3. Potenz von b fallen also weg und es bleibt bloss eine quadratische Gleichung in b.

D. h. Bewegt sich der Punkt $\mathfrak{O}$ (a, b) auf der Geraden von Euler, so umhüllen die Tangenten durch $\mathfrak{O}$ an die durch ihn gehende zyklische Kurve einen Kegelschnitt und zwar muss es eine Parabel sein, deren Direktrix die Euler'sche Gerade ist, denn zwei zueinander senkrechte Tangenten schneiden sich in ihr.

Setzt man in der Gleichung (2) $b = 0$, so kommt:

$$\begin{aligned} & y \{ x [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \\ & \quad - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \} \\ & \cdot \{ \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \\ & \quad + \sin (C - B) \sin^2 C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cos C) \} = 0 \end{aligned}$$

also sind $y = 0$ und $x = \dfrac{\sin C (\sin A \cos A - \sin C \cos C)}{\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C}$ Tangenten an die Parabel. Daraus schliesst man, dass auch die Seiten CA und AB Parabeltangenten sind, denn die Wahl von BC zur x Achse war ja eine willkürliche. Unsere Parabel ist also mit der Kiepert'schen identisch und damit ist auch der zweite Teil des Satzes auf Seite 27 bewiesen.

Für die Tangentenrichtungen im Doppelpunkte $\mathfrak{D}(a, b)$ der zyklischen Kurve hat man:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = & - b \cdot \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C \\ & - a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C \\ & \pm \sqrt{[- b \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cos C - a} \\ & \overline{\cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2} \\ & \overline{- 4 b \sin (C - B) \sin C [a \cdot \sin (C - A) - a} \\ & \overline{\cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A} \\ & \overline{+ \sin^2 C \cdot \cos C] : 2 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C} \end{aligned}$$

Die Tangente c des Winkels dieser beiden Tangenten ist gleich

$$\left(\frac{y}{x}\right)_1 - \left(\frac{y}{x}\right)_2 : 1 + \left(\frac{y}{x}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)_2$$

oder

$$\begin{aligned} & \sqrt{[- b \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C} \\ & \overline{- a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A} \\ & \overline{\cdot \sin C]^2 - 4 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C [a \cdot \sin (C - A)} \\ & \overline{- a \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \sin C \cdot \cos A} \\ & \overline{+ \sin^2 C \cdot \cos C] \cdot 4 b \cdot \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C} \end{aligned}$$

$$4\,b^2 \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C + 4\,b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C\,[a \cdot \sin (C - A) - a \cdot \sin (C - B) \cos C - \sin A \cdot \sin C \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]$$

oder wenn man kürzt und den reduzierten Ausdruck $= c$ setzt, den Bruch wegschafft und beide Seiten der erhaltenen Gleichung ins Quadrat erhebt:

$$\{b\,[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C] - a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C\}^2$$
$$- 4\,b \cdot \sin (C - B) \sin C\,[a \cdot \sin (C - A) - a \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]$$
$$= c^2 \{b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + a\,[\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C\}^2$$

für $c = \pm i$ kommt als Spezialfall dieser Kegelschnittschar:

$$b^2 \{[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C\}$$
$$+ a^2 \{\sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C + [-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2\}$$
$$- 2a \{\sin (C - B) \cdot \sin^2 C\,(\sin^2 C - \sin^2 A) - [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cos C] \cdot \sin C\,[-\sin A \cos A + \sin C \cos C)\}$$
$$- 2b \{[\sin (C - A) - \sin (C - B) \cos C] \cdot \sin C\,(\sin^2 C - \sin^2 A) + \sin (C - B) \sin^2 C\,[-\sin A \cos A + \sin C \cdot \cos C]\}$$
$$+ \sin^2 C (\sin^2 C - \sin^2 A)^2 + \sin^2 C [-\sin A \cdot \cos A + \sin C \cdot \cos C]^2 = 0$$

oder wenn man beide Seiten der Gleichung durch

$$[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \sin^2 C$$

dividiert

$$\left\{ b - \frac{[\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C) \cdot \sin C\,(\sin^2 C - \sin^2 A) + \sin (C - B) \cdot \sin^2 C\,(\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A)}{[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C} \right\}^2$$
$$+ \left\{ a - \frac{\sin (C - B) \cdot \sin^2 C\,(-\sin^2 A + \sin^2 C) - [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C\,(\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A}{[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C} \right\}^2$$

$= 0$; denn die Summe der Quadrate der 2. Glieder in den Klammern ist ja:

$$(\sin^2 C - \sin^2 A)\sin^2 C \{[-\sin(C-A) + \sin(C-B)\cos C]^2 + \sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\}$$
$$+ (\sin C\cdot\cos C - \sin A\cos A)^2\cdot\sin^2 C\{\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C + [\sin(C-A) - \sin(C-B)\cdot\cos C]^2\}$$
$$:[-\sin(C-A) + \sin(C-B)\cdot\cos C]^2 + \sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C$$
$$= (\sin^2 C - \sin^2 A)\cdot\sin^2 C + \sin^2 C(\sin C\cdot\cos C - \sin A\cdot\cos A)^2$$

wie es sein soll.

Die erhaltene Kurvengleichung ist die eines Kreises vom Radius 0, d. h. die eines Punktes. Dieser Punkt ist nichts anderes als der Brennpunkt (F) der Kiepert'schen Parabel. Dies kann folgendermassen eingesehen werden. Setzt man im Ausdrucke für $\frac{y}{x}$ die Quadratwurzel $= 0$, so erhält man die Gleichung einer Parabel und zwar der Kiepert'schen, denn aus ihrer Form folgt, dass die x-Achse und die dazu Senkrechte

$$a = \frac{\sin C(\sin A\cdot\cos A - \sin C\cdot\cos C)}{\sin(C-A) - \sin(C-B)\cdot\cos C}$$

Tangenten dieser Parabel sind. Darum sind alle Dreieckseiten Tangenten, denn eine jede kann zur x-Achse gewählt werden. Nun macht auch die Euler'sche Gerade auf der x-Achse den Abschnitt

$$\frac{\sin C(\sin A\cdot\cos A - \sin C\cdot\cos C)}{\sin(C-A) - \sin(C-B)\cdot\cos C}$$

darum ist sie die Direktrix der Parabel, welche mit der Kiepert'schen 3 Tangenten und die Direktrix gemein hat, also mit ihr identisch ist. (Wir haben hiebei als bekannt vorausgesetzt, dass die Direktrix einer jeden dem Dreieck ABC eingeschriebenen Parabel durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks geht).

Die Berührungssehne zu den Tangenten $b = 0$ und

$$a = \frac{\sin C[\sin A\cdot\cos A - \sin C\cdot\cos C]}{\sin(C-A) - \sin(C-B)\cdot\cos C}$$

hat nach der Parabelgleichung die Gleichung:

$$-b\cdot[\sin(C-A) - \sin(C-B)\cdot\cos C] - a\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C + \sin^3 C - \sin^2 A\cdot\sin C = 0$$

Man weiss, dass sie durch den Brennpunkt geht, ihre Gleichung wird durch die Koordinaten des erhaltenen Grenzkreises erfüllt, denn durch Substitution derselben bekommt man:

$$\begin{array}{c} -[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\sin C\cdot(\sin^2 C-\sin^2 A) \\ \underline{-\sin(C-B)\cdot\sin^2 C(\sin C\cdot\cos C-\sin A\cdot\cos A)]\sin(C-A)} \\ \underline{-\sin(C-B)\cos C]} \\ -\sin^2(C-B)\cdot\sin^3 C(\sin^2 C-\sin^2 A \\ \underline{+\sin(C-B)\sin^2 C(\sin C\cos C-\sin A\cos A)[\sin(C-A)} \\ \underline{-\sin(C-B)\cos C]} \\ +\sin C(\sin^2 C-\sin^2 A)\{[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2 \\ +\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\} \end{array}$$

wo der gemeinsame Nenner weggelassen ist oder:

$$\begin{array}{c} -\sin C\cdot(\sin^2 C-\sin^2 A)\{[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cos C]^2 \\ +\sin^2 C\cdot\sin^2(C-B)\}+\sin C(\sin^2 C-\sin^2 A)\{[\sin(C-A) \\ -\sin(C-B)\cos C]^2+\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\}=0 \end{array}$$

Dieser Grenzkreis liegt, aus Gründen der Symmetrie, auf der Parabelachse und da er noch auf einer davon verschiedenen Geraden durch den Brennpunkt liegt, so muss er mit dem Brennpunkt zusammenfallen w. z. z. w. Wir haben also den Satz: Es gibt einen einzigen Punkt $\mathfrak{O}$, dessen Tangenten durch die imaginären Kreispunkte gehen und zwar ist es der Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel, welcher auch der allen zyklischen Kurven gemeinsame Brennpunkt ist.

VII. Bestimmung der Asymptoten der behandelten zyklischen Kurve (allgemein).

Die allgemeine Gleichung derselben lautet: (s. pag. 29)

$$\begin{array}{c} (x^2+y^2+2ax+2by)[-2x\cdot\sin(C-A) \\ -2\sin(C-B)(\sin C\cdot y-\cos C\,x)] \\ -4\cdot\sin A\cdot\sin C(-x\cdot\cos A+y\cdot\sin A)x \\ +4\sin^2 C\cdot x(\sin C\,y-\cos C\,x)=0 \end{array}$$

Die Gleichung der reellen Asymptote hat die Form:

$$\begin{array}{c} 2x[\cos C\cdot\sin(C-B)-\sin(C-A)] \\ -2y\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C+\lambda_3=0 \end{array}$$