Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern**

Band (Jahr): **4 (1947)**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sitzungsberichte
der Mathematischen Vereinigung in Bern

141. Sitzung, Donnerstag, den 31. Januar 1946.

Mitteilungsabend. Es finden drei Kurzreferate statt:

1. Herr **Dr. W. Michael** spricht über **die Coriolisbeschleunigung.**

Anhand eines Sonderfalles aus der ebenen Dynamik wurde das Entstehen dieser Beschleunigung elementar abgeleitet und deren Ursachen klargelegt. Durch Anwendung komplexer Vektoren wurde sodann die Coriolisbeschleunigung für die beliebige Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene sehr einfach ermittelt. Mit Hilfe des gewonnenen Resultates und des bekannten Satzes, dass eine beliebige infinitesimale Bewegung eines Körpers im Raume als eine unendlich kleine Schraubung um dessen momentane Achse aufgefasst werden kann, konnte die Formel für die Coriolisbeschleunigung im Raume ohne weiteres aufgestellt werden. Die Anwendung dieser Formel wurde anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht, das zugleich den Zusammenhang der Coriolisbeschleunigung mit der Kreiselwirkung eines rotierenden Körpers klar erkennen liess.

2. Herr **H. Steinemann** referiert über **vierreihige Determinanten.**

Analog der Rösselsprungregel oder der Regel von Sarrus für dreireihige Determinanten lässt sich auch noch für Determinanten vierten Grades eine verhältnismässig einfache Regel zur Bildung der 24 Glieder angeben. Dabei erhält man die positiven und die negativen Glieder aus zwei verschiedenen Anordnungen der Elemente der Determinante. (Die Glieder werden zur Vereinfachung nur durch ihre Indicespaare dargestellt.)

I. Anordnung für die positiven Glieder.				II. Anordnung für die negativen Glieder.			
11	12	13	14	12	13	14	11
21	22	23	24	22	23	24	21
31	32	33	34	32	33	34	31
41	42	43	44	42	43	44	41

Auf diese Anordnungen wendet man folgende Figuren an:

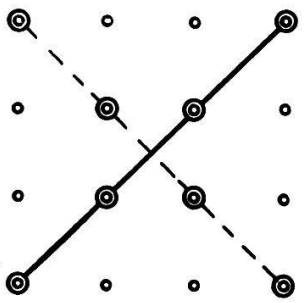

Fig. 1

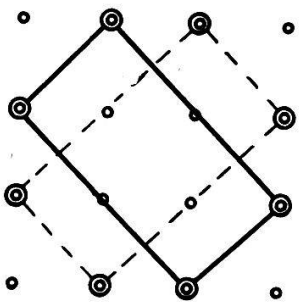

Fig. 2

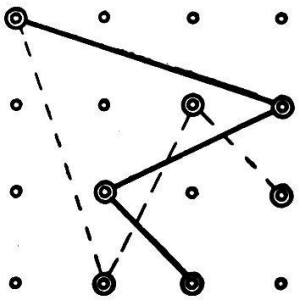

Fig. 3

Fig. 1: Haupt- und Nebendiagonale (2 Glieder);
Fig. 2: Haupt- und nebendiagonalenparalleles Rechteck (2 Glieder);
Fig. 3: Von jeder Ecke aus zwei zur betreffenden Diagonalen symmetrische Blitzfiguren (8 Glieder).

Die Anwendung dieser 12 Streckenzüge auf die Anordnung I. ergibt die 12 positiven, die Anwendung auf die Anordnung II. die 12 negativen Glieder der vierreihigen Determinante.

3. Herr **Prof. Dr. W. Michel** berichtet über die **Pythagoreischen Zahlen.**

Ist $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$, so ist $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$ die Anzahl aller Teiler von n.

1. $U(x^2)$ = Anzahl aller möglichen Zerlegungen einer Quadratzahl x^2 in die Differenz zweier Quadrate.

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y) = a.b; \qquad z+y = a,\ z-y = b$$

liefert

$$x = \sqrt{a.b}, \qquad y = \frac{a-b}{2}, \qquad z = \frac{a+b}{2}.$$

a, b müssen beide entweder gerade oder ungerade sein. Nur wenn a, b teilerfremd sind, erhält man eine Grundlösung. Jedes Paar a, b komplementärer Teiler von x^2 gleicher Parität liefert eine Lösung. Sieht man von dem trivialen Fall $a = b = x$; $y = 0$; $z = x$ ab, so erhält man sofort für ein ungerades x^2

$$\text{(A)}\ U(x^2) = \frac{\tau(x^2) - 1}{2},$$

z. B. für $x = 45 = 3^2 \times 5$, $x^2 = 45^2 = 3^4 \times 5^2$ ist $U(45^2) = \frac{5 \times 3 - 1}{2} = 7$.

$45^2 = 2025 \times 1 = 405 \times 5 = 81 \times 25 = 75 \times 27 = 135 \times 15 = 675 \times 3 = 225 \times 9$

$45^2 = 1013^2 - 1012^2 = 205^2 - 200^2 = 53^2 - 28^2 = 51^2 - 24^2 = 75^2 - 60^2 =$
$= 339^2 - 336^2 = 117^2 - 108^2.$

Für ein gerades $x = 2^\lambda . x_1$ (x_1 ungerade) wird

$$\text{(B)}\ U(x^2) = U(2^{2\lambda} . x_1^2) = \frac{(2\lambda - 1) . \tau(x_1^2) - 1}{2}, \quad \lambda \geqq 1.$$

Für $\lambda = 0$ geht (B) nicht in (A) über. Setzt man jedoch

$$\text{(C)}\ U(2^{2\lambda} . x_1^2) = \frac{|2\lambda - 1| . \tau(x_1^2) - 1}{2},$$

so gilt dies für alle $\lambda \geqq 0$,

z. B. für $x = 4 \times 3 \times 5 = 60$, $x^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3600$ wird

$$U(3600) = U(2^4 \times 3^2 \times 5^2) = \frac{3 \times 3 \times 3 - 1}{2} = 13.$$

2. $V(z^2)$ = Anzahl aller Zerlegungen einer Quadratzahl z^2 in die Summe zweier Quadrate.

Im komplexen Zahlkörper von Gauss $\mathfrak{K} = R(i)$ heisst $z = a + bi$ eine ganze Zahl, falls a, b im gewöhnlichen Sinne ganze Zahlen sind. Die reelle Primzahl π ist in $\mathfrak{K}$ nur dann ebenfalls prim, falls sie von der Form $q = 4h - 1$ ist. Die Primzahlen von der Form $p = 4k + 1$ sind in $\mathfrak{K}$ alle genau in 2 komplexe Primzahlen weiter zerlegbar.

$p = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, ebenso $2 = (1 + i)(1 - i) = 1^2 + 1^2$.
Nun ist $z^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = v \cdot \bar{v}$.

$$x + yi = v,\ x - yi = \bar{v} \text{ liefert } x = \frac{v + \bar{v}}{2},\ y = \frac{v - \bar{v}}{2i} \text{ reell.}$$

Jeder Zerlegung von z^2 in zwei verschiedene konjugiert komplexe Faktoren v, $\bar{v}$ im Körper $\mathfrak{K}$ entspricht eine Zerlegung von z^2 in zwei reelle Quadrate $x^2 + y^2$ und umgekehrt. Ist nun

$z = 2^\lambda \cdot [p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}]\,[q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}] = 2^\lambda \cdot P \cdot Q$,

$p_i = 4k_i + 1$, $q_i = 4h_i - 1$, so erhält man $V(z^2) = \dfrac{\tau(P^2) - 1}{2}$.

Die Anzahl der Primfaktoren der Form $q = 4h - 1$, sowie der Faktoren 2, spielt somit gar keine Rolle. Die niedrigste Quadratzahl, die sich als Summe zweier Quadrate darstellen lässt, ist demnach

$$5^2 = 25 = (2 + i)^2\,(2 - i)^2,$$

$$V(25) = \frac{\tau(5^2) - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1,\ 5^2 = 4^2 + 3^2.$$

$$V(25^2) = \frac{\tau(5^4) - 1}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2,\ 625 = 24^2 + 7^2 = 20^2 + 15^2.$$

$$V(65^2) = \frac{\tau(5^2 \times 13^2) - 1}{2} = \frac{3 \times 3 - 1}{2} = 4,$$

$65 = 5 \times 13 = (2 + i)(2 - i)(3 + 2i)(3 - 2i)$
$65^2 = 63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = 56^2 + 33^2 = 52^2 + 39^2$.

---

142. Sitzung, Freitag, den 29. März 1946.

Herr **Dr. W. Kaiser** (Subingen) spricht über das Thema: **„Geometrische Baugesetze in unserem Sonnensystem“.**

Der Referent zeigt, dass sich mathematisch-geometrische Gesetzmässigkeiten nicht bloss beim heliozentrischen Aspekt des Systems offenbaren, sondern ebensosehr in bezug auf unsere Erde als Zentrum. Das ergibt sich aus den Massverhältnissen der Bahnen.

a) Heliozentrischer Aspekt; Erde und äussere Planeten. Es sei der mittlere Abstand Sonne-Erde = E = 1. In bezug darauf hat der Radius der mittleren, als Kreis betrachteten Saturnbahn nach neueren Berechnungen das Mass 9.55; somit besteht die Gleichung: Umfang der mittleren Saturnbahn = $2 \cdot 3.1416 \cdot 9.55$ = rund 60 E. Das heisst: Der Umfang dieser Bahn ist gerade das 60 fache des mittleren Abstandes Sonne-Erde E = 1, — ähnlich wie der Umfang der mittleren Mondbahn um die Erde gerade das 60 fache des Umfanges der Erde ist. — Betrachten wir jetzt einen Kreis mit dem Radius 3 E: Er durchzieht die Zone der vielen kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Eine Seite des in diesen Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreieckes hat das Mass $3\sqrt{3} = 3 \times 1.732 =$ 5.196 E. Das ist aber auch das Mass für den Radius der mittleren Bahn des Jupiter um die Sonne, wofür rund 5.2 E angegeben wird. (E = 1).

b) Geozentrischer Aspekt. Erde und innere Planeten. Der Radius der Jahresbahn unserer Sonne sei mit E = 1 bezeichnet. In be-

zug darauf hat der Radius der mittleren Venusbahn um die Sonne das Mass 0.723; das ist wenig verschieden von $0.732 = \sqrt{3} - 1$. Nun hat das in den Jahreskreis der Sonne einbeschriebene gleichseitige Dreieck für die Seitenlänge das Mass $\sqrt{3} = 1.732$. Setzen wir $1.732 = 1.008 + 0.724$, so ist damit dargestellt die Summe der Abstände Sonne-Erde = 1.008 (vermehrt um die halbe Exzentrizität $^1/_{120}$) und Sonne-Venus = 0.724, d. h. auch der Abstand Erde-Venus bei deren oberen Konjunktion. — Beim Abstand des Merkur von der Sonne besteht eine Beziehung zum Quadrat und Achteck im Jahreskreis der Sonne. Die Quadratseite hat das Mass $\sqrt{2} = 1.414 = 1 + 0.414$. Das ist die Summe des Abstandes Sonne-Erde = 1 und des mittleren Abstandes Sonne-Merkur = 0.387 vermehrt um $^1/_7$ der Exzentrizität. — Die halbe Achteckseite im Kreis hat das Mass $s = \sin 22^1/_2{}^0 = 0.383$ —: das ist ziemlich genau gerade der mittlere Abstand Sonne-Merkur.

Noch andere Massbeziehungen hat der Referent anhand von Figuren erläutert. Er hat sie auch systematisch dargestellt in seinem Werke „Die geometrischen Vorstellungen in der Astronomie" (2 Textbände und 3 Atlanten mit Figurentafeln). Zu beziehen vom Verfasser Dr. Wilhelm Kaiser, Subingen, Kanton Solothurn.

---

143. Sitzung, Freitag, den 21. Juni 1946.

Herr **Prof. Dr. W. Sierpinski** (Warschau) spricht über **„La congruence des ensembles de points et ses généralisations".**

Der Referent, der sich auf Einladung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft in der Schweiz aufhielt, ist ein Hauptvertreter der polnischen Mathematik, die sich vor allem um den Ausbau der Mengentheorie, insbesondere der Punktmengenlehre und ihrer Anwendung auf Analysis und Geometrie in ihren subtilsten Auswirkungen grosse Verdienste erworben hat. Durch sein Referat bot er einen Ueberblick über eine interessante Entwicklung des Begriffes der Multikongruenz in der Theorie der Punktmengen. Anschliessend an eine wichtige Entdeckung über eine Zerlegungsmöglichkeit der Kugeloberfläche von F. Hausdorff (1914) haben S. Banach und A. Tarski (1924) das merkwürdige Resultat erreicht, dass zwei beliebige beschränkte Mengen mit inneren Punkten im drei-dim. Raum stets multikongruent sind, d. h. in endlich viele kongruente Teile zerlegt werden können. W. Sierpinski entwickelt einige seiner letzten Resultate in diesem Fragenkreis, wonach sich beispielsweise eine drei-dim. Kugel in acht Teile zerlegen lässt, aus denen sich dann wieder zwei Kugeln zusammensetzen lassen! — Abschliessend sei darauf hingewiesen, dass die Existenzbeweise dieser „paradoxen" Zerlegungen sich wesentlich auf das Auswahlaxiom der Mengenlehre stützen, und somit weit hinter der Grenze des explizit Angebbaren oder gar des Anschaubaren liegen.

---

144. Sitzung, Dienstag, den 29. Oktober 1946.

Herr **Prof. Dr. C. Carathéodory** (München) spricht über **„Eine symmetrische Integrationsmethode für das 2-Körperproblem".**

Dieses klassische Problem der Astronomie besteht in der Bestimmung der Bahnen zweier Weltkörper, die sich unter dem Einfluss der gegenseitigen Massenanziehung im Raume bewegen. Seine Lösung erfolgt in der Regel in zwei Schritten: Zuerst wird nachgewiesen, dass die relative Bewegung des einen Körpers um den andern in einer festen Ebene erfolgt, worauf die weitere Behandlung des nunmehr auf diese Ebene reduzierten Problems die drei Keplerschen Gesetze liefert.

In seinem Vortrag entwickelte nun der Referent ein Lösungsverfahren, welches diese Zweiteilung nicht mehr aufweist und eine geschlossene Bearbeitung ermöglicht. Die Bewegung des einen Körpers relativ zum andern wird hier durch drei Grössen beschrieben, die vom gewählten Koordinatensystem wesentlich unabhängig sind: das Quadrat des Abstandes, das Quadrat der Geschwindigkeit und deren Skalarprodukt. In diesen drei Grössen nimmt das Newtonsche Gravitationsgesetz, wonach die Massenanziehung umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Entfernung, eine so einfache Gestalt an, dass man unmittelbar ein erstes Integral erhält: eine Beziehung zwischen potentieller und kinetischer Energie. Nach einigen Umformungen und bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems ergeben sich ferner der Satz von der konstanten Flächengeschwindigkeit, die Kegelschnitteigenschaft der Bahn (das 2. und das 1. Keplersche Gesetz) und schliesslich die Keplersche Gleichung, welche den Ausgangspunkt für eine zeitliche Vorausberechnung der Bahn darstellt.

---

145. Sitzung, Dienstag, den 3. Dezember 1946.

(gemeinsam mit dem Mathematischen Seminar
und dem Seminar für Theoretische Physik)

Herr **Prof. Dr. J. A. Schouten** (Delft) spricht über das Thema: **„Ueber die Dimensionen physikalischer Grössen“.**

Der Referent führt zunächst die geometrischen Grössen als Systeme ein, die sich gegenüber der affinen Transformationsgruppe des Raumes in vorgeschriebener Weise (linear homogen in den Zahlenkomponenten der Systeme) transformieren. — Die Definition der physikalischen Grössen gestaltet sich in analoger Weise, nur kommen nun noch weitere physikalische Einheiten für Masse, Länge, Zeit, Ladung usw. hinzu. Verf. unterscheidet nun das geometrische Bild, die Dimension des geometrischen Bildes oder die absolute Dimension und weiter die relative Dimension, zu der man dann geführt wird, wenn die affine durch die orthogonale Gruppe ersetzt wird und die sich von der absoluten durch eine Potenz der Längeneinheit unterscheidet. Besonders wird die Folgerung herausgearbeitet, dass die absolute Dimension angibt, welche Grundeinheiten zur Konstruktion des geometrischen Bildes erforderlich sind. — Ausgehend von den elektromagnetischen Gleichungen werden die Dimensionen der hier auftretenden physikalischen Grössen festgelegt. Analoge Erörterungen bei den relativistisch invarianten Gleichungen beschliessen den lebhaften Vortrag.