Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern

Band: 9 (1952)

Vereinsnachrichten: Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SITZUNGSBERICHTE

der Mathematischen Vereinigung in Bern

170. Sitzung, Freitag, den 16. Februar 1951

Vortrag von Herrn Dr. Ernest Kaiser (Bern) «Über die mathematische Theorie der Einkommensverteilungen» *).

1. Die Verteilung einer Bevölkerung nach dem individuellen Einkommen wurde bis anhin als Problem einer einzigen Variablen betrachtet mittels der Häufigkeitsfunktion f (u). Insbesondere Pareto und Fréchet haben der mathematischen Behandlung der Frage den notwendigen Impuls gegeben.

2. Verschiedene Aspekte der Sozialversicherung, insbesondere die Berechnung der mittleren AHV-Renten, welche unter anderem vom Beobachtungsalter x und dem Zeitpunkt t abhängen, verlangten die Einführung einer mit t sich verändernden zweidimensionalen normierten Häufigkeitsfunktion φ_t (u, x), welche im Variablenraum (t, u, x) betrachtet wird. Ist diese Funktion gegeben, so lassen sich aus ihr für jedes t einerseits durch Integration über u die Marginalverteilung nach x — d. h. die Altersstruktur λ_t (x) — und andererseits durch Integration über x die Marginalverteilung nach u — d. h. die Einkommensverteilung $\bar{f}_t$ (u) der Gesamtbevölkerung — ableiten. Ferner ergibt sich die Einkommensverteilung für die x-Jährigen durch folgende konditionale Häufigkeitsfunktion (Parallelverteilung nach u für x und t konstant):

$$f_t\,(u, x) = \frac{\varphi_t\,(u,\ x)}{\lambda_t(x)} \tag{1}$$

3. Die Funktion φ_t (u, x) ist nun in den versicherungsmathematischen Problemen meistens nicht a priori gegeben. Sie muß daher bei den Vorausberechnungen mit Hilfe vernünftiger Hypothesen rekonstruiert werden. Insbesondere ist zu beachten, daß die Altersstruktur λ_t (x) in der Regel zuerst berechnet wird, und zwar an Hand der klassischen biometrischen Funktionen. Aus (1) ergibt sich, daß die Rekonstruktionshypothesen in die Parallelverteilungen f_t (u, x) verlegt werden müssen. Diese können aus zwei Fundamentalfunktionen abgeleitet werden, nämlich aus $g\,(u') = f_o\,(u', x_o)$ und dem «Einkommenssteigerungsgesetz» s (x), welch letzteres, zunächst für t = 0, das Verhältnis des mittleren Einkommens im Alter x zu jenem im Ausgangsalter x_o angibt. Durch die Substitution u = s (x) u′ erhalten wir aus g (u′) die normierte Häufigkeitsfunktion $\frac{1}{s\,(x)}\,g\left[\frac{u}{s\,(x)}\right]$, welche wir als Parallelverteilung f_o (u, x) wählen (Hypo-

*) Siehe Ausführungen in extenso in den «Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker», Bd. 50, Heft 2.

these A). Sodann nehmen wir an (Hypothese B), daß $f_t(u,x) = f_0(u,x)$ gilt. In der Ebene $t = 0$ leiten sich also sämtliche Parallelverteilungen durch «Dehnung» aus der Einkommensverteilung für $x = x_0$ und jene der Parallelebenen durch Translation ab. Alle Parallelverteilungen gehören dem gleichen Funktionstypus in u an. Die Beobachtungen aus der AHV bestätigen weitgehend die gewählten Hypothesen.

4. Für ein gegebenes t stellen sich in der *oekonometrischen Variablenebene (u, x)* verschiedene Probleme, nämlich:

a) Herleitung der Häufigkeitsfunktion $\bar{f}(u)$ für die Gesamtbevölkerung aus der Familie der Parallelverteilungen $f(u, x)$ gemäß

$$\bar{f}(u) = \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)\, f(u,x)\, dx \tag{2}$$

sofern $g(u')$ im Intervall $a < u' < b$ und somit $f(u,x)$ in $a \cdot s(x) < u < b \cdot s(x)$ definiert ist. Daran schließen sich die Fragen nach der Beschaffenheit der fünf verschiedenen Kurvenäste von $\bar{f}(u)$, nach den Bedingungen für deren Tangentialanschluß und nach der hinreichenden Bedingung dafür, daß $\bar{f}(u)$ bezüglich u demselben Funktionstypus angehört wie $f(u, x)$.

b) Herleitung anderer statistischer Funktionen (Verteilungsfunktion, Einkommenssumme und Momente k . Ordnung).

c) Bestimmung der Altersstruktur $\lambda(x)$ aus der Integralgleichung (2) mit der Frage nach der statistischen Kompatibilität zwischen gegebenen $\bar{f}(u)$ und $f(u,x)$.

5. Die *statistischen Anwendungen* der Theorie bezwecken eine möglichst getreue Darstellung von Beobachtungen durch zutreffende analytische Funktionen. Für die Fundamentalverteilung $g(u')$ können vornehmlich hyperbolische (Pareto), parabolische sowie semi-normale und logarithmisch-normale Verteilungen gewählt werden. Besonders fruchtbar ist die Theorie bei Verwendung der Pareto-Verteilung für $g(u')$, woraus sich die semi-hyperbolische Verteilung für $\bar{f}(u)$ ergibt (Darlegungen an einem Flächenmodell).

6. Die *versicherungsmathematischen Anwendungen* ergeben sich durch die systematische Einführung der Funktionen $f_t(u,x)$ in die allgemeine Kaansche Gleichgewichtsformel. Bei nicht gleichmäßig linearer Abhängigkeit der jährlichen Rentenbetreffnisse vom Einkommen ist diese Methode zur Berechnung der mittleren Renten unumgänglich.

7. Verschiedene *wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme* stellen sich bei der Theorie der Einkommensverteilungen. Zu erwähnen ist die Verwendung stochastischer Methoden zur Ableitung von Einkommensverteilungen durch Cantelli und Fréchet. Besonders interessant ist die Frage, wie sich die individuellen arithmetischen Mittel aus den während einer bestimmten Zeitspanne erzielten Einkommen verteilen. Die resultierende Verteilung ist verschieden, je nachdem die Parallelverteilungen $f_t(u,x)$ voneinander stochastisch abhängig sind oder nicht. Im letzten Fall gelangen die Additionstheoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Anwendung. Bei Verwendung der Normalverteilung für $f_t(u,x)$ sind die Ergebnisse sowohl bei Abhängigkeit als auch bei Unabhängigkeit leicht zu ermitteln.

171. Sitzung, Dienstag, den 27. Februar 1951

Vortrag von Herrn **Rolf Nüscheler** (Bern) über **«Fehlerrechnung in der Ballistik»**.

Jedes Schießen wird von der Streuung beeinflußt. Diese wird durch zufällige Abweichungen am Abgangswinkel und an der Anfangsgeschwindigkeit sowie durch variable Störungen während des Fluges hervorgerufen. Eine Faustregel sagt aus, daß bei den üblichen Schußweiten der Artillerie die totale Seitenstreuung 3 ‰, die totale Längenstreuung 3 % der Schußweite beträgt, sofern mit der untern Winkelgruppe, d. h. mit Abgangswinkeln von weniger als 45 °, geschossen wird.

Die Größe der Streuung hat einen Einfluß auf die Treffwahrscheinlichkeit. Um überschlagsmäßige Berechnungen zu erleichtern, gibt der Ballistiker die Streuung durch die fünfzigprozentige Streuung an, d. h. den Bereich, den diejenige Hälfte der Schüsse umfaßt, die näher am mittleren Treffpunkt liegt. Die fünfzigprozentige Streuung entspricht folglich dem doppelten wahrscheinlichen Fehler. Bei Schießversuchen wird sie in der Regel aus der quadratischen Abweichung vom mittleren scheinbaren Treffpunkt bestimmt. Abschon es den Anschein macht, daß die Gaußsche Fehlerfunktion für große Abweichungen etwas zu geringe Wahrscheinlichkeiten liefert, so arbeitet man in der Praxis doch mit dieser Funktion, da keine bessere ebenso einfache Funktion aufgestellt werden kann. Schüsse mit außerordentlich großer Abweichung, die in der Regel nicht durch ein Zusammenfallen mehrerer gleichgerichteter zufälliger Einflüsse, sondern durch einen groben Fehler (Richtfehler, Fabrikationsfehler am Geschoß) hervorgerufen werden, werden durch Ausreißerregeln vor der Mittelbildung ausgeschlossen. Solche Ausreißerregeln entspringen immer der willkürlichen Annahme darüber, wo die Grenze zwischen zufälligem und grobem Fehler gelegt werden soll. Am bekanntesten ist die Regel von Chauvenet, welche zum Beispiel bei 10 Schüssen eine zufällige Abweichung vom 2,9fachen Betrage des wahrscheinlichen Fehlers, bei 100 Schüssen eine solche vom 4,2fachen Betrage noch erlaubt.

Die Streuung hat einen Einfluß auf die Einschießregeln. So hat es zum Beispiel keinen Sinn, eine kleine Korrektur anzubringen, wenn wegen der Streuung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Schuß entgegen der Korrektur verlegt erscheint, einen wesentlichen Wert annimmt. So ist bei einer fünfzigprozentigen Streuung von 100 m die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach einer Elevationskorrektur, die den Schuß um 100 m verlängern sollte, der Schuß wegen der Streuung verkürzt erscheint, 17 %; führt man dagegen eine 200-m-Korrektur aus, so ist diese Wahrscheinlichkeit nur noch 3 %, für die Praxis also schon verschwindend gering.

Interessante Resultate für die Treffwahrscheinlichkeit liefern die Untersuchungen, wenn außerdem ein Zielfehler berücksichtigt wird, d. h. wenn man annimmt, daß der mittlere Treffpunkt nicht in der Zielmitte liegt, sondern selber einer Streuung unterworfen ist. Dies tritt insbesondere beim direkten Schießen zum Beispiel mit dem Karabiner auf, wo bei jedem Schuß neu angelegt wird und das Streuungsbild in der Scheibe sich zusammensetzt aus der Streuung der Waffe und der Streuung der Haltepunkte des Schützen. Soll ein Objekt getroffen werden, dessen Ausdehnungen gegenüber der fünfzigprozentigen Streuung klein sind, zum Beispiel beim Schießen auf ein Flugzeug mit einem Fliegerabwehrgeschütz oder mit der Bordwaffe eines andern Flugzeuges, so zeigt die Untersuchung, daß die Treffwahrscheinlichkeit dann am größten ist, wenn der mitt-

lere Zielfehler das 1,05fache der fünfzigprozentigen Streuung beträgt. Ist die Streuung wesentlich kleiner, so geht die ganze Schußgarbe unter Umständen am Ziel vorbei, ist sie wesentlich größer, so kann das Ziel zwischen der Streugarbe durchschlüpfen.

---

172. Sitzung, Freitag, den 27. April 1951

Herr PD Dr. **Heinz Schilt** (Biel) spricht **«Über die aus physikalischen Meßreihen gewonnenen Mittelwerte».**

Der Referent gibt einen Überblick über die Art der Auswertung von Messungen. Gewöhnlich wird aus Meßreihen auf die übliche Art ein Mittelwert gebildet. Dieser kann dann mit Hilfe der verschiedenen Tests darauf hin untersucht werden, ob er nur zufällig von einem bekannten Wert abweicht oder ob systematische Abweichungen vorliegen. Diese Tests sind auch anwendbar, wenn zwei oder mehr Meßreihen vorliegen, zwischen denen eine Korrelation besteht (siehe Linder, Statistische Methoden, Basel 1945).

An der Bestimmung des Regressionskoeffizienten zeigt der Referent, daß diese bei einer linearen Regression darauf hinausläuft, ein gewogenes Mittel zu bilden. So ist der Regressionskoeffizient zweier Meßreihen x_i und y_i gleich dem Mittelwert von $\frac{y_i}{x_i}$, wenn jedem Quotienten als Gewicht $g_i = x^2_i$ beigegeben wird.

In der Praxis treten nun zusätzliche Schwierigkeiten auf, indem die Meßwerte nicht alle mit gleicher Güte gemessen werden können, zum Beispiel ist die Ablesegenauigkeit bei elektrischen Meßinstrumenten nicht über dem ganzen Meßbereich gleich groß. Der Referent schlägt vor, dies durch eine entsprechende Gewichtsverteilung der einzelnen Meßwerte zu berücksichtigen, wobei eine gewisse Willkür nicht vermieden werden kann.

---

173. Sitzung, Freitag, den 23. November 1951

Herr Prof. Dr. **Max Schürer** (Bern) spricht über **«Dimensionslose Naturkonstanten».**

Der Referent stellt zuerst eine Tabelle der wichtigsten Naturkonstanten auf. Es handelt sich (im atomaren Bereich) um die Protonenmasse M, die Elektronenmasse m, die Elementarladung e, das Plancksche Wirkungsquantum h, die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante f; weiter (im kosmischen Bereich) um die mittlere Massendichte im Weltall ϱ, die Rezessionskonstante der Galaxien a, das Weltalter A und schließlich den Weltradius R_E (nach Einstein).

Sowohl zwischen den atomaren wie auch zwischen den kosmischen Konstanten (zu denen auch c und f zu zählen sind) lassen sich gewisse dimensionslose Beziehungen aufstellen, wie zum Beispiel:

$$\frac{M}{m} = 1836{,}5\,; \qquad \frac{hc}{2\pi e^2} = 137{,}034\,; \qquad \frac{e^2}{f\,M\,m} = 2{,}27 \cdot 10^{39}\,;$$

$$Aa = 1{,}9\,; \qquad \frac{8\pi f \varrho}{a^2} = 0{,}4\,; \qquad \frac{R_E \cdot a}{c} = 2\,.$$

Die Existenz derartiger, von der Wahl der Maßeinheiten unabhängiger, weil dimensionsloser Naturkonstanten stellt uns vor das Problem, sie theoretisch zu begründen.

Der Referent führt hierauf im atomaren und im kosmischen Bereich natürliche Maßeinheiten ein, die sich aus den gegebenen Konstanten ableiten lassen. Es sind dies die Protonenmaße M, die elementare Länge $l_0 = h/Mc$ und die elementare Zeit $\tau_0 = l_0/c$; weiter die Gesamtmaße im Weltall $\mathfrak{M} = 2\pi^2 R_E^3 \varrho$, der Weltradius R_E und das Weltalter A. Vergleicht man diese beiden Gruppen von Einheiten miteinander, so ergeben sich weitere dimensionslose Naturkonstanten, nämlich:

$$\frac{\mathfrak{M}}{M} = 4{,}1 \cdot 10^{79}\,; \quad \frac{R_E}{l_0} = 2{,}5 \cdot 10^{40}\,; \quad \frac{A}{\tau_0} = 2{,}3 \cdot 10^{40}.$$

Dabei erkennt man die erstaunliche Tatsache, daß diese Zahlen in einer einfachen Beziehung zueinander stehen. Setzt man nämlich

$$N = 2\,\frac{\mathfrak{M}}{M} = 8{,}2 \cdot 10^{79},$$

so erhält man approximativ

$$\frac{R_E}{l_0} \sim \sqrt{N}\,; \quad \frac{A}{\tau_0} \sim \sqrt{N} \quad \text{und von früher} \quad \frac{e^2}{f\,M\,m} \sim \sqrt{N}\,;$$

N kann dabei als die Anzahl der Teilchen im Weltall interpretiert werden.

Es liegen zwei Versuche vor, eine theoretische Begründung dieser Erscheinungen zu geben. Die erste stammt von Eddington und ist in seinem außerordentlich schwierigen, posthumen Werk «Fundamental Theories» niedergelegt. Eddington versucht dort, die dimensionslosen Naturkonstanten a priori aus einer erkenntnistheoretischen Analyse unserer Meßvorgänge abzuleiten. So geht zum Beispiel die bekannte Zahl 137 aus einer gruppentheoretischen Betrachtung über die Diracschen Wellenfunktionen hervor, während die Zahl 1836,5 sich als Wurzel der Gleichung

$$10\,m^2 - 136\,m m_0 + (137/136)^{5/6}\,m_0^2 = 0$$

darstellen läßt; ($m_0^2 = 10 \cdot M \cdot m$). Die Zahl N gibt Eddington in der Form

$$N = \frac{3}{2} \cdot 136 \cdot 2^{256} = 2{,}36 \cdot 10^{79}$$

an.

Der andere Versuch wurde von Dirac und Jordan in Angriff genommen. Für diese beiden Forscher sind die angeführten Zahlen keine Konstanten, sondern Funktionen des Weltalters A. Infolge der Veränderlichkeit der Gravitationskonstanten kommen sie zu einer Hypothese der kontinuierlichen Materieerzeugung im Weltall.

Der Referent betont zum Schluß noch die Schwierigkeiten der Theorien und daraus sich ergebenden bescheidenen Fortschritte, die bisher erzielt wurden.

---

174. Sitzung, Freitag, den 14. Dezember 1951

Herr Dr. Peter Wilker (Bern) spricht über **«Das Auswahlaxiom».**

Der Fragenkreis um das Auswahlaxiom beschäftigt die mathematische Wissenschaft schon seit mehr als fünfzig Jahren. In seiner gebräuchlichsten Formulierung lautet das Axiom: Zu jedem System nicht leerer, paarweiser fremder Mengen gibt es eine *Aus-*

wahlmenge genannte Menge, welche mit jeder Menge des Systems genau ein Element gemeinsam hat und sonst keine weiteren Elemente besitzt. Der bei oberflächlicher Betrachtung anschauliche Charakter des Axioms («Herausgreifen», «Auswählen» der Elemente) erweist sich bei der Diskussion konkreter Beispiele als Täuschung, hervorgerufen durch die unzulässige Übertragung von im Endlichen geläufigen Begriffen auf das Unendliche. Das Auswahlaxiom ist ein reines Existenzaxiom, das über die effektive Bestimmung der Auswahlmenge keine Auskunft gibt.

Die *Anwendungen* des Auswahlaxioms in der Mengenlehre und den verwandten Gebieten sind sehr zahlreich und tiefliegend. So wird es zum Beispiel schon bei den grundlegenden Gesetzen der Arithmetik der Kardinalzahlen, bei der Theorie der endlichen Mengen oder in wichtigen Fragen der Punktmengen-, Maß- und Funktionenlehre gebraucht. Sein wichtigstes Anwendungsgebiet liegt aber beim *Wohlordnungssatz*, wo es 1904 auch zum ersten Male ausdrücklich formuliert wurde (Zermelo). Der Beweis des Satzes stützt sich fast ausschließlich auf das Auswahlaxiom; dieses übt damit indirekt, infolge der großen Bedeutung des Wohlordnungssatzes in Mengen- und Punktmengenlehre, Algebra und Geometrie, einen noch stärkeren Einfluß auf die Mathematik aus.

Von besonderem Interesse für die Erfassung des Auswahlaxioms ist die Kenntnis mit ihm *äquivalenter* Aussagen, die an seiner Stelle als Axiom gebraucht werden können, wobei das Auswahlaxiom dann als beweisbarer Satz erscheint. Dazu gehört in erster Linie der Wohlordnungssatz selbst sowie die Trichotomie. Es sind nun aber — insbesondere von der polnischen Schule — eine große Anzahl Relationen zwischen Kardinalzahlen entdeckt worden, welche mit dem Auswahlaxiom äquivalent sind. Ein besonders einfaches Beispiel ist die für alle unendlichen Kardinalzahlen gültige Formel $m^2 = m$. Es scheint aber nicht, daß der innere Zusammenhang dieser Relationen mit dem Auswahlaxiom tiefer untersucht wurde, so daß hier noch ein interessantes Forschungsgebiet offen liegt.

Das Auswahlaxiom, so fruchtbar es sich auch für große Teile der Mathematik erwiesen hat, wird dennoch von einer Reihe bedeutender Mathematiker *abgelehnt* oder zum mindesten im Gebrauch stark beschränkt. Dies geschieht auf Grund einer — gewöhnlich als Empirismus oder Intuitionismus bezeichneten — grundsätzlichen Auffassung der Mathematik, die insbesondere rein existentielle Aussagen als sinnlos ablehnt und sich nur auf konstruktiv Bestimmtes stützen will. Das Auswahlaxiom als reines Existenzaxiom war und ist daher besonders scharfen Angriffen ausgesetzt. Auch Befürworter des Axioms müssen die großen Schwierigkeiten anerkennen, die sich beispielsweise der vom Axiom behaupteten Wohlordnung des Kontinuums entgegenstellen. Bei einer radikalen Durchführung des empiristischen Programms müßte ein großer Teil der heutigen Mengenlehre aufgegeben werden.

Neben den zu Beginn genannten wichtigen Folgerungen des Auswahlaxioms gibt es noch eine Reihe anderer, die *paradox* erscheinen und dadurch die Kritik des Axioms stützten. Es sind dies etwa der bekannte Satz von Banach und Tarski über die Endlich-Gleichheit von Punktmengen oder die von Hamel bewiesene Existenz unstetiger Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$, deren Bilder die ganze Ebene überall dicht erfüllen. Die Beantwortung aller vom Auswahlaxiom aufgeworfenen Probleme, auch nur die der hier allein behandelten inhaltlich-heuristischen, steht noch in Aussicht.