Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung

Autor(en): **Schaertlin, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **1 (1906)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550788

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur mathematischen Theorie der Invaliditäts-versicherung.

Von Dr. **G. Schaertlin**, Zürich.

Der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt zum bevorstehenden fünfzigjährigen Jubiläum gewidmet.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit hat den Verfasser seit längerer Zeit beschäftigt. Schon früher hat er in einem Aufsatz [1]): „Über die Höhe der finanziellen Belastung, welche durch die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten voraussichtlich hervorgerufen wird", die Beziehungen zwischen den Rentenbarwerten aufgestellt, die im Abschnitt 6 dieses Aufsatzes entwickelt werden. Der unseres Wissens dort zum erstenmal festgestellte Zusammenhang ist seither wiederholt von andern Autoren untersucht und nachgewiesen worden Von den uns bekannten Arbeiten, welche sich damit beschäftigen, sind, ohne dass wir Anspruch auf Vollständigkeit machen, zu erwähnen: ein Aufsatz von F. Möller [2]) über Invaliditätsversicherung, ein Gutachten von Dr. Ch. Moser [3]) über Invaliden- und

[1]) Zeitschrift für Schweizerische Statistik, XXV. Jahrgang, 1889, Seite 225.

[2]) Assekuranz-Jahrbuch von A. Ehrenzweig, XVIII. Jahrgang, Seite 61.

[3]) Invaliden- und Altersversicherung, Seite 59. Bern, Neukomm & Zimmermann.

Altersversicherung, ein Aufsatz von Dr. J. Eggenberger[1]) über die Mortalitäts- und Invaliditätsverhältnisse der bayerischen Bergleute, und endlich die Arbeit von E. Hamza[2]) für den Kongress der Versicherungsmathematiker in Paris.

Leider wird der schöne Aufsatz von Hamza durch einige wesentliche Fehler entstellt und fällt er durch die Verwendung der gewöhnlichen und hernach der „unabhängigen" Sterbenswahrscheinlichkeiten und Invaliditätswahrscheinlichkeiten der Aktiven in zwei Teile auseinander, die in keinen Zusammenhang miteinander gebracht sind. Diese Spaltung ist nicht nötig und liegt, wie aus unsern Entwicklungen hervorgeht, nicht in der Natur der Sache.

1. Eine Gesamtheit von l_w Personen des Alters w sterbe nach einer bestimmten, bekannten Absterbeordnung. Die Gesamtheit zerfalle in der Folge in zwei verschiedene Gruppen: in eine Gruppe von Aktiven und in eine Gruppe von Invaliden. Von den Aktiven, die im Alter w noch die Gesamtheit ausmachten, treten die mit fortschreitendem Alter invalid Gewordenen aus und zu den Invaliden über. Diese Gruppe, deren Zahl beim Alter w gleich o war, vermehrt sich um die invalid Gewordenen und nimmt um die Zahl der durch den Tod Ausscheidenden ab; sie wird anfangs zunehmen, ein Maximum erreichen und dann abnehmen.

---

[1]) Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft. Dritter Band, Seite 228, und vierter Band, Seite 129.

[2]) Documents. Troisième Congrès international d'Actuaires, Paris. Note sur la théorie mathématique de l'assurance contre le risque d'invalidité d'origine morbide, sénile, ou accidentelle. Seite 154. L. Dulac, éditeur, Paris.

Die Gruppe der Aktiven nimmt ab, einmal um die invalid werdenden und sodann um die während ihrer Zugehörigkeit zu dieser Abteilung sterbenden Mitglieder.

Die Absterbeordnung der Invaliden wird im allgemeinen von derjenigen der Gesamtheit aller Personen verschieden sein.

2. Die unmittelbare Beobachtung habe zur Ermittlung der folgenden Werte für die verschiedenen Alter x geführt.

Es seien uns bekannt:

q_x, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitglied der Gesamtheit im Laufe des $(x+1)$. Jahres sterbe,

q_x^i, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Invalider im $(x+1)$. Jahre sterbe,

i_x, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver im $(x+1)$. Jahre invalid werde.

Hieraus leitet man, von l_w ausgehend, in bekannter Weise die Aktivitätsordnung ab, nämlich die Reihe der Zahlen $\overline{l_x^{aa}}$ der in jedem Alter lebenden Aktiven und die Reihe $\overline{l_x^{ii}}$ der Invaliden jedes Alters.

Es ist nämlich:

$$
\begin{aligned}
\overline{l_w^{ii}} &= 0 \\
\overline{l_{w+1}^{ii}} &= \overline{l_w^{aa}}\, i_w \left(1 - \frac{q_w^i}{2}\right) \\
\overline{l_{w+2}^{ii}} &= \overline{l_{w+1}^{aa}}\, i_{w+1} \left(1 - \frac{q_{w+1}^i}{2}\right) + \overline{l_{w+1}^{ii}}\,(1 - q_{w+1}^i) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{l_w^{aa}} &= l_w \\
\overline{l_{w+1}^{aa}} &= l_{w+1} - \overline{l_{w+1}^{ii}} \\
\overline{l_{w+2}^{aa}} &= l_{w+2} - \overline{l_{w+2}^{ii}} \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Dabei ist der Annahme gemäss:

$$l_x = l_x^{\overline{aa}} + l_x^{\overline{ii}}. \qquad (2)$$

Von der Reihe der Invaliden, deren Glieder wir mit $l_x^{\overline{ii}}$ bezeichnen, ist wohl zu unterscheiden die Absterbeordnung der Invaliden, deren Glieder man erhält, wenn man eine Anzahl Invalide l_x^i des Alters x absterben lässt, ohne dass neue zutreten.

3. Die folgende Entwicklung will nun mit den Werten l_x, $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$, unter Beiziehung der Fundamentalgrössen i_x und q_x^i (oder l_x^i), die Grundwerte der Invaliditätsversicherung darstellen.

Zu diesem Behufe sind in erster Linie die folgendermassen zu definierenden Fundamentalwerte herzuleiten:

$q_x^{\overline{aa}}$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver des Alters x im folgenden Jahre als Aktiver (ohne vorher aus der Gruppe der Aktiven ausgeschieden zu sein) stirbt;

$p_x^{\overline{aa}}$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver des Alters x das folgende Jahr als Aktiver überlebt;

$q_x^{\overline{ai}}$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver des Alters x im folgenden Jahre invalid wird und hernach im gleichen Jahre stirbt;

$p_x^{\overline{ai}}$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver des Alters x im folgenden Jahre invalid wird, dieses Jahr aber überlebt;

q_x^a, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver des Alters x im folgenden Jahre stirbt, sei es im aktiven, sei es im invaliden Zustand;

p_x^a, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Aktiver des Alters x das folgende Jahr überlebt, sei es als Aktiver, sei es als Invalider.

Da q_x^a und p_x^a entgegengesetzte Wahrscheinlichkeiten sind, so besteht die Beziehung

$$q_x^a + p_x^a = 1. \tag{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden und hernach zu sterben, bildet zusammen mit der Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden und zu überleben, die Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden. Also ist

$$q_x^{\overline{ai}} + p_x^{\overline{ai}} = i_x. \tag{4}$$

Ebenso bilden die Wahrscheinlichkeiten $q_x^{\overline{aa}}$ und $p_x^{\overline{aa}}$ zusammen die Wahrscheinlichkeit, nicht invalid zu werden; daraus folgt:

$$q_x^{\overline{aa}} + p_x^{\overline{aa}} = 1 - i_x. \tag{5}$$

Die Addition der Gleichungen (4) und (5) ergiebt

$$q_x^{\overline{ai}} + p_x^{\overline{ai}} + q_x^{\overline{aa}} + p_x^{\overline{aa}} = 1. \tag{6}$$

Ferner ist nach der Definition der Fundamentalgrössen

$$q_x^{\overline{aa}} + q_x^{\overline{ai}} = q_x^a \tag{7}$$

und

$$p_x^{\overline{aa}} + p_x^{\overline{ai}} = p_x^a. \tag{8}$$

Die Reihen der $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ werden aufgestellt unter Benützung der sich selbst erklärenden Beziehung

$$q_x^{\overline{ai}} = \frac{i_x\, q_x^i}{2}. \tag{9}$$

Werden daher die Reihen der l_x, l_x^i, $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ als gegeben der Rechnung zu Grunde gelegt, so ist Gleichung (9) als Identität aufzufassen.

4. Zu den Fundamentalbeziehungen zwischen den eben definierten Wahrscheinlichkeiten und den Werten

von l_x, $l_x^{\overline{aa}}$ und l_x^{ii} gelangen wir durch die folgende Überlegung.

Von den l_x Lebenden des Alters x sterben im folgenden Jahre $l_x\, q_x$ Personen.

Zu derselben Zahl gelangen wir durch Ermittlung der sterbenden Aktiven und Invaliden.

Als Aktive sterben: $l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{\overline{aa}}$.

Als Invalide sterben:

1. von den $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven: $l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{\overline{ai}}$,
2. „ „ $l_x^{\overline{ii}}$ Invaliden: $l_x^{\overline{ii}}\, q_x^{i}$.

Also ist

$$l_x\, q_x = l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{\overline{aa}} + l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{\overline{ai}} + l_x^{\overline{ii}}\, q_x^{i} \qquad (10)$$

und wegen Gleichung (7)

$$l_x\, q_x = l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{a} + l_x^{\overline{ii}}\, q_x^{i}, \qquad (11)$$

oder bei Benützung von Gleichung (2)

$$l_x^{\overline{aa}}\, q_x + l_x^{\overline{ii}}\, q_x = l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{a} + l_x^{\overline{ii}}\, q_x^{i}.$$

Also ist

$$l_x^{\overline{aa}}\,(q_x - q_x^{a}) = l_x^{\overline{ii}}\,(q_x^{i} - q_x). \qquad (12)$$

Aus den Gleichungen (10) und (2) folgt

$$q_x^{\overline{ai}} = q_x - q_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}}\,(q_x - q_x^{i}). \qquad (13)$$

Substituiert man für $l_x^{\overline{ii}}$ den Wert, der sich aus Gleichung (2) ergiebt, so findet man

$$q_x^{\overline{ai}} = q_x^{i} - q_x^{\overline{aa}} - \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}}\,(q_x^{i} - q_x). \qquad (14)$$

Da die Zahl der von l_x Personen das folgende Jahr Überlebenden gleich sein muss der Summe der überlebenden Aktiven und Invaliden, so erhalten wir ohne weiteres für die Lebenswahrscheinlichkeiten Beziehungen, die den Gleichungen (10) bis (14) analog sind. Ähnliche Betrachtungen wie vorher führen zu den folgenden Gleichungen:

$$l_x\, p_x = l_x^{\overline{aa}}\,(p_x^{\overline{aa}} + p_x^{\overline{ai}}) + l_x^{\overline{ii}}\, p_x^{i} \tag{15}$$

$$l_x\, p_x = l_x^{\overline{aa}}\, p_x^{a} + l_x^{\overline{ii}}\, p_x^{i} \tag{16}$$

$$l_x^{\overline{aa}}\,(p_x - p_x^{a}) = l_x^{\overline{ii}}\,(p_x^{i} - p_x) \tag{17}$$

$$p_x^{\overline{ai}} = p_x - p_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}}\,(p_x - p_x^{i}) \tag{18}$$

$$p_x^{\overline{ai}} = p_x^{i} - p_x^{\overline{aa}} - \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}}\,(p_x^{i} - p_x). \tag{19}$$

Statt der Lebenden l_x, $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ können in den Identitäten (2) und (10) bis (19), ohne deren Gültigkeit zu zerstören, die diskontierten Zahlen D_x, $D_x^{\overline{aa}}$ und $D_x^{\overline{ii}}$ eingesetzt werden.

5. Stellt man die Betrachtungen, welche zu den Gleichungen (10) bis (19) geführt haben, statt für das Jahr als Zeiteinheit, für den Zeitabschnitt dx an, so gelangt man zu den Beziehungen zwischen den Sterbens- und Invaliditätsintensitäten einerseits, den Lebenden l_x, $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ anderseits.

Bekanntlich hat die Sterbensintensität μ_x, auf die Zeit dx bezogen, also der Wert $\mu_x\, dx$, dieselbe Bedeutung, wie die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x für die Zeiteinheit von einem Jahr.

Es ist also

$$l_x \mu_x dx = l_x - l_{x+dx} = - d l_x,$$

woraus

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \frac{d l_x}{dx}.$$

Angenähert ist

$$\mu_x = \frac{8 (l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12 l_x}.$$

(Text Book, Kap. II, Art. [40].)

Wir bezeichnen im folgenden mit μ_x die Sterbensintensität der Mitglieder der Gesamtheit, mit μ_x^i die Sterbensintensität der Invaliden im Alter x.

μ_x^a soll die Intensität des Ausscheidens aus dem aktiven Zustande infolge Todes oder Invalidität bedeuten. Die Werte von μ_x^a stimmen überein mit den Sterbensintensitäten aus einer Absterbeordnung, deren Lebende mit der Zahl der Aktiven der Aktivitätsordnung übereinstimmen.

Es ist also

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \frac{d l_x}{dx}$$

$$\mu_x^i = - \frac{1}{l_x^i} \frac{d l_x^i}{dx}$$

$$\mu_x^a = - \frac{1}{l_x^{aa}} \frac{d l_x^{\overline{aa}}}{dx}. \qquad (20)$$

Endlich bezeichne r_x die Invaliditätsintensität, also den Betrag, welcher, mit der Zahl $l_x^{\overline{aa}}$ der Aktiven und der Zeit dx multipliziert, die in dieser Zeit dx entstehenden Invaliden liefert.

Wir stellen nun dieselben Überlegungen an, die uns im 4. Abschnitt zu den Gleichungen (10) bis (19) geführt haben.

Von den l_x Lebenden der Gesamtheit sterben in der Zeit dx

$$l_x \, \mu_x \, dx.$$

Zu demselben Betrag muss man gelangen, wenn man für die Zeit dx die Zahl der gestorbenen Aktiven und Invaliden ermittelt.

Von den $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven scheiden in der Zeit dx überhaupt, durch Tod oder Invalidität, aus

$$l_x^{\overline{aa}} \, \mu_x^a \, dx.$$

Hiervon fallen für uns ausser Betracht die invalid gewordenen, welche nicht sterben, sondern die Zeit dx überleben.

Ihre Zahl ist

$$l_x^{\overline{aa}} \, r_x \, dx \left(1 - \frac{\mu_x^i \, dx}{2}\right).$$

Von den vorhandenen $l_x^{\overline{ii}}$ Invaliden sterben

$$l_x^{\overline{ii}} \, \mu_x^i \, dx.$$

Hieraus folgt

$$l_x \, \mu_x \, dx = l_x^{\overline{aa}} \, \mu_x^a \, dx - l_x^{\overline{aa}} \, r_x \, dx \left(1 - \frac{\mu_x^i \, dx}{2}\right) + l_x^{\overline{ii}} \, \mu_x^i \, dx.$$

Also ist

$$\mu_x^a = \mu_x + r_x + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} (\mu_x - \mu_x^i).$$

Hieraus folgt

$$r_x = \mu_x^a - \mu_x + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} (\mu_x^i - \mu_x), \qquad (21)$$

oder

$$r_x = \mu_x^a - \mu_x^i - \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}} (\mu_x - \mu_x^i). \qquad (22)$$

Man bemerke, dass die Gleichungen (21) und (22) bestehen, auch wenn man in dem Ausdruck für die invalid gewordenen Aktiven, welche die Zeit dx überleben, für $\frac{\mu_x^i}{2}$ eine andere endliche Funktion von μ_x^i einführt.

Die Gleichungen (21) und (22) gestatten eine leichte Berechnung der Invaliditätsintensität, wenn, wie anzunehmen ist, μ_x, μ_x^a und μ_x^i berechnet sind.

Bezeichnet man endlich mit $\mu_x^{\overline{aa}}$ die Sterbensintensität der Aktiven, so muss, da nach Gleichung (5)

$$p_x^{\overline{aa}} + q_x^{\overline{aa}} + i_x = 1,$$

auch

$$(1 - \mu_x^a\, dx) + \mu_x^{\overline{aa}}\, dx + v_x\, dx = 1 \quad \text{sein.}$$

Also

$$\mu_x^a = \mu_x^{\overline{aa}} + v_x. \tag{23}$$

6. *Die Invaliditätsrente.* Es sei der Barwert der Invaliditätsrente 1 für einen Aktiven des Alters x, zahlbar zum erstenmal zu Beginn des auf das Invalidisierungsjahr folgenden Jahres zu ermitteln.

Es sei

a_x der Barwert der nachschüssigen Leibrente 1 für ein Mitglied des Alters x der Gesamtheit;

a_x^i der Barwert der nachschüssigen Leibrente 1 eines Invaliden;

$a_x^{\overline{aa}}$ der Barwert der Leibrente 1 eines Aktiven, zahlbar so lange dieser aktiv ist;

$a_x^{\overline{ai}}$ der Barwert der Leibrente 1 eines Aktiven, zahlbar nachdem dieser invalid geworden, während der Dauer der Invalidität, erstmals zu Anfang des auf das Invalidisierungsjahr folgenden Jahres;

a_x^a der Barwert der nachschüssigen Leibrente 1 eines Aktiven, zahlbar so lange der Aktive als Aktiver oder Invalider lebt.

Dann ist offenbar

$$a_x^a = a_x^{\overline{aa}} + a_x^{\overline{ai}}. \tag{24}$$

Im weitern bestehen zufolge der Definitionen die Identitäten

$$l_x\, a_x = l_x^{\overline{aa}}\, a_x^a + l_x^{\overline{ii}}\, a_x^i. \tag{25}$$

Oder wegen Gleichung (2)

$$l_x^{\overline{aa}}\,(a_x - a_x^a) = l_x^{\overline{ii}} \cdot (a_x^i - a_x) \tag{26}$$

und

$$a_x^{\overline{ai}} = a_x - a_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}}\,(a_x - a_x^i) \tag{27}$$

$$a_x^{\overline{ai}} = a_x^i - a_x^{\overline{aa}} - \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}}\,(a_x^i - a_x). \tag{28}$$

$a_x^{\overline{ai}}$ kann auch folgendermassen bestimmt werden:

Von $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven werden invalid und überleben das Invalidisierungsjahr

$$l_x^{\overline{aa}}\, i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right).$$

Der Barwert der an sie auszurichtenden Renten ist

$$v\, l_x^{\overline{aa}}\, i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right)(1 + a_{x+1}^i).$$

Der Barwert sämtlicher Renten ist

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\, l_{x+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t} \left(1 - \frac{q_{x+t}^i}{2}\right)(1 + a_{x+t+1}^i).$$

Der Barwert der Renteneinheit ist also

$$a_x^{\overline{ai}} = \frac{v}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t} \left(1 - \frac{q_{x+t}^i}{2}\right)(1 + a_{x+t+1}^i). \quad (29)$$

Der Definition von $a_x^{\overline{ai}}$ gemäss hat $\mathfrak{a}_x^{\overline{ai}}$ keine reale Bedeutung: denn vor der Invalidisierung kann keine Invalidenrente ausgerichtet werden.

Man wird daher bei der Invaliditätsrente, deren Raten mit dem Versicherungsjahre fällig werden, sich der Ausdrücke „vorschüssig“ und „nachschüssig“ zu enthalten haben.

7. Die beiden im Abschnitt 6 entwickelten Ausdrücke für $a_x^{\overline{ai}}$ sind identisch.

Im folgenden soll der Ausdruck (29) in die Form (27) übergeführt werden.

Nach (29) ist

$$a_x^{\overline{ai}} = \frac{1}{l_x^{\overline{aa}}} \Bigg[v\, l_x^{\overline{aa}}\, i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) \frac{l_{x+1}^i + v\, l_{x+2}^i + \cdots}{l_{x+1}^i}$$

$$+ v^2\, l_{x+1}^{\overline{aa}}\, i_{x+1} \left(1 - \frac{q_{x+1}^i}{2}\right) \frac{l_{x+2}^i + v\, l_{x+3}^i + \cdots}{l_{x+2}^i}$$

$$+ v^3\, l_{x+2}^{\overline{aa}}\, i_{x+2} \left(1 - \frac{q_{x+2}^i}{2}\right) \frac{l_{x+3}^i + v\, l_{x+4}^i + \cdots}{l_{x+3}^i}$$

$$\cdots \Bigg].$$

Setzt man statt $l_x^{\overline{aa}}\, i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right)$, also statt der im $(x+1)$. Jahr invalid werdenden und das Invalidisierungsjahr überlebenden Aktiven, den gleichwertigen Ausdruck

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}} \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i},$$

so wird das erste Glied der ersten Zeile des Klammerausdruckes:

$$v\left(l_{x+1}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+1}^{i}}{l_x^{i}}\right).$$

Das zweite Glied der ersten Zeile und das erste Glied der zweiten Zeile geben:

$$v^2\left(l_{x+1}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+1}^{i}}{l_x^{i}}\right)\frac{l_{x+2}^{i}}{l_{x+1}^{i}} + v^2\left(l_{x+2}^{\overline{ii}} - l_{x+1}^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+2}^{i}}{l_{x+1}^{i}}\right)$$

$$= v^2\left(l_{x+2}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+2}^{i}}{l_x^{i}}\right).$$

Das dritte Glied der ersten Zeile, das zweite der zweiten Zeile und das erste der dritten Zeile geben:

$$v^3\left(l_{x+1}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+1}^{i}}{l_x^{i}}\right)\frac{l_{x+3}^{i}}{l_{x+1}^{i}}$$

$$+ v^3\left(l_{x+2}^{\overline{ii}} - l_{x+1}^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+2}^{i}}{l_{x+1}^{i}}\right)\frac{l_{x+3}^{i}}{l_{x+2}^{i}}$$

$$+ v^3\left(l_{x+3}^{\overline{ii}} - l_{x+2}^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+3}^{i}}{l_{x+2}^{i}}\right)$$

$$= v^3\left(l_{x+3}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}}\,\frac{l_{x+3}^{i}}{l_x^{i}}\right).$$

Es ist also

$$a_x^{\overline{ai}} = \frac{1}{l_x^{\overline{aa}}}\left[\left(v\,l_{x+1}^{\overline{ii}} + v^2\,l_{x+2}^{\overline{ii}} + v^3\,l_{x+3}^{\overline{ii}} + \ldots\right)\right.$$

$$\left. - \left(l_x - l_x^{\overline{aa}}\right)\frac{v\,l_{x+1}^{i} + v^2\,l_{x+2}^{i} + v^3\,l_{x+3}^{i} + \ldots}{l_x^{i}}\right],$$

oder, da

$$l_x^{\overline{ii}} = l_x - l_x^{\overline{aa}},$$

so ist:

$$a_x^{\overline{ai}} = \frac{1}{l_x^{\overline{aa}}} [v\, l_{x+1} + v^2\, l_{x+2} + \ldots - (v\, l_{x+1}^{\overline{aa}}$$

$$+ v^2\, l_{x+2}^{\overline{aa}} + \ldots) - (l_x - l_x^{\overline{aa}})\, a_x'$$

Demnach ist:

$$a_x^{\overline{ai}} = \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}}\, a_x - a_x^{\overline{aa}} - \frac{l_x - l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}}\, a_x^i$$

$$a_x^{ai} = a_x - a_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} (a_x - a_x^i),$$

was nachzuweisen war.

8. *Die in unterjährigen Raten zahlbare Rente.* Ebenso wie die Identität (27), besteht die folgende:

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{ai}} = a_x^{(m)} - \overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} (a_x^{(m)} - \overset{(m)}{a}{}_x^{i}). \qquad (30)$$

$\overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{ai}}$ bedeutet die in Raten von $\frac{1}{m}$ je zu Anfang des Zeitabschnittes $\frac{1}{m}$ zahlbare Rente; die erste Rate ist zahlbar zu Anfang des auf den Invalidisierungsabschnitt folgenden Zeitabschnittes.

Nun ist aber, (Text Book, Kap. IX, Art. 22),

$$\overset{(m)}{a}{}_x = a_x + \frac{m-1}{2\,m} - \frac{m^2-1}{12\,m^2} (\mu_x + \delta), \qquad (31)$$

wo

$$\delta = \log \text{nat}\, (1 + i).$$

Entsprechend ist

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{i} = a_x^{i} + \frac{m-1}{2\,m} - \frac{m^2-1}{12\,m^2} (\mu_x^{i} + \delta) \qquad (32)$$

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{aa}} = a_x^{\overline{aa}} + \frac{m-1}{2\,m} - \frac{m^2-1}{12\,m^2} (\mu_x^{a} + \delta). \qquad (33)$$

Durch die Substitution in Gleichung (30) erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (21)

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{ai}} = a_x^{\overline{ai}} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, r_x, \tag{34}$$

oder in erster Annäherung, die für die Praxis meistens genügt:

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{ai}} = a_x^{\overline{ai}}. \tag{34^a}$$

Ferner ist

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{a} = \overset{(m)}{a}{}_x^{aa} + \overset{(m)}{a}{}_x^{ai} = a_x^{\overline{aa}} + \frac{m-1}{2\, m} - \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\,(\mu_x^a + \delta)$$

$$+ a_x^{\overline{ai}} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, r_x.$$

Und wegen Gleichung (23)

$$\overset{(m)}{a}{}_x^{a} = a_x^{a} + \frac{m-1}{2\, m} - \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\,(\mu_x^{\overline{aa}} + \delta). \tag{35}$$

9. *Die kontinuierlichen Renten.* Für den Fall $m = \infty$ gehen die im vorausgehenden Artikel behandelten Renten in kontinuierliche über.

Wenden wir die Bezeichnung $\bar{a}_x$ für $a_x^{(m)}$ an, wenn m ins unendliche wächst, so gelten die Gleichungen

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,(\mu_x + \delta)$$

$$\bar{a}_x^{\overline{aa}} = a_x^{\overline{aa}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,(\mu_x^a + \delta) \tag{36}$$

$$\bar{a}_x^{\overline{ai}} = a_x^{\overline{ai}} + \frac{1}{12}\, r_x \tag{37}$$

$$\bar{a}_x^{a} = a_x^{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,(\mu_x^{\overline{aa}} + \delta). \tag{38}$$

Aus den Gleichungen (31) bis (35) in Verbindung mit (36) bis (38) folgt:

$$\overset{(m)}{a_x} = \bar{a}_x - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}\,(\mu_x + \delta) \qquad (31^a)$$

$$\overset{(m)}{a_x^i} = \bar{a}_x^i - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}\,(\mu_x^i + \delta) \qquad (32^a)$$

$$\overset{(m)}{a_x^{\bar{a}a}} = \bar{a}_x^{\bar{a}a} - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}\,(\mu_x^a + \delta) \qquad (33^a)$$

$$\overset{(m)}{a_x^{\bar{a}i}} = \bar{a}^{\bar{a}i} \qquad - \frac{1}{12\,m^2}\,\nu_x \qquad (34^a)$$

$$\overset{(m)}{a_x^a} = \bar{a}_x^a - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}\,(\mu_x^{\bar{a}a} + \delta). \qquad (35^a)$$

Die Formeln (36) bis (38) geben, wenn der Zinsfuss gleich 0 gesetzt wird, die vollständige mittlere Lebensdauer eines Aktiven, (38), die Zeit, welche er als Aktiver, (36), und die Zeit, welche er als Invalider verlebt, (37).

10. *Kapitalversicherung auf den Todesfall und den Invaliditätsfall.* Die Kapitalversicherung 1 auf den Todesfall, fällig am Schlusse des Todesjahres, hat den Wert

$$A_x = 1 - d\,(1 + a_x),$$

wo

$$d = \frac{i}{1+i} = iv = 1 - v.$$

Demgemäss ist auch

$$A_x^i = 1 - d\,(1 + a_x^i) \qquad (39)$$

der Barwert der Kapitalversicherung 1 für den Invaliden (x).

Es liegt nahe, auch die Aktivitätsordnung wie eine Sterbetafel zu behandeln und die Bedeutung des Ausdruckes $1 - d\,(1 + a_x^{\overline{aa}})$ zu untersuchen. Wird die Aktivitätsordnung in dieser Weise verwendet, und berechnet man den genannten Ausdruck, so gewährt man jedem Ausscheidenden am Schlusse des Ausscheidungsjahres das Kapital 1. Der Aktive erhält also die Versicherungssumme 1, wenn er als Aktiver stirbt oder wenn er als Invalider ausscheidet.

Der Ausdruck $1 - d\,(1 + a_x^{\overline{aa}})$ ist daher der Barwert des Kapitals 1, das dem Aktiven im Invaliditätsfall, oder vorher im Falle des Absterbens gewährt wird.

Den Wert der Leistung im Invaliditätsfall bezeichnen wir mit $(A_x^{\overline{ai}})$, den Wert der Leistung im Todesfall allein mit $A_x^{\overline{aa}}$. Es ist also

$$A_x^{\overline{aa}} + (A_x^{\overline{ai}}) = 1 - d\,(1 + a_x^{\overline{aa}}). \qquad (40)$$

Der Wert von $(A_x^{\overline{ai}})$ kann direkt bestimmt werden.

Es ist

$$(A_x^{\overline{ai}}) = v\,\frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} v^{x+t}\, l_{x+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t}}{v^x\, l_x^{\overline{aa}}} = v\,\frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t}}{D_x^{aa}}. \qquad (41)$$

Ferner ist

$$A_x^{\overline{aa}} = v\,\frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{\overline{aa}}\, q_{x+t}^{\overline{aa}}}{D_x^{aa}}. \qquad (42)$$

Der Wert A_x^a der Versicherung 1 für einen Aktiven (x), zahlbar wenn dieser stirbt, sei es als Aktiver, sei es als Invalider, berechnet sich wie folgt:

Es ist definitionsgemäss

$$l_x^{\overline{aa}} \, A_x^a + l_x^{\overline{ii}} \, A_x^i = l_x \, A_x.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} l_x^{\overline{aa}} \, A_x^a &= l_x \, [1 - d \, (1 + a_x)] - l_x^{\overline{ii}} \, [1 - d \, (1 + a_x^i)] \\ &= l_x - l_x^{\overline{ii}} - d \, [l_x \, (1 + a_x) - l_x^{\overline{ii}} \, (1 + a_x^i)] \\ &= l_x^{\overline{aa}} - d \cdot l_x^{\overline{aa}} \, (1 + a_x^a). \end{aligned}$$

Also ist

$$A_x^a = 1 - d \, (1 + a_x^a). \qquad (43)$$

Den Wert von $A_x^{\overline{ai}}$, den Barwert der Versicherung 1 für einen Aktiven, fällig, wenn dieser, nachdem er invalid geworden, stirbt, bestimmen wir aus der Identität

$$l_x^{\overline{aa}} \, (A_x^{\overline{aa}} + A_x^{\overline{ai}}) + l_x^{\overline{ii}} \, A_x^i = l_x \, A_x$$

$$A_x^{\overline{ai}} = A_x - A_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} \, (A_x - A_x^i), \qquad (44)$$

oder

$$A_x^{\overline{ai}} = A_x^i - A_x^{\overline{aa}} - \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}} \, (A_x^i - A_x). \qquad (45)$$

Will man endlich noch feststellen, welche Bedeutung dem Ausdruck $1 - d \, a_x^{\overline{ai}}$ beizulegen ist, so gehe man auf Gleichung (43) zurück. Danach ist

$$A_x^a = 1 - d \, (1 + a_x^{\overline{aa}} + a_x^{\overline{ai}})$$

$$A_x^a = 1 - d \, (1 + a_x^{\overline{ai}}) - d \, a_x^{\overline{aa}},$$

oder nach Gleichung (40)

$$A_x^a = 1 - d \, (1 + a_x^{\overline{ai}}) - 1 + A_x^{\overline{aa}} + (A_x^{\overline{ai}}) + d.$$

Also ist

$$A_x^{\overline{aa}} + A_x^{\overline{ai}} = -d\, a_x^{\overline{ai}} + A_x^{\overline{aa}} + (A_x^{\overline{ai}}).$$

Hieraus folgt

$$d\, a_x^{\overline{ai}} = (A_x^{\overline{ai}}) - A_x^{\overline{ai}}. \qquad (46)$$

$d\, a_x^{\overline{ai}}$ stellt also die Einbusse dar, welche der Aktive (x) erleidet, wenn ihm statt der Kapitalversicherung 1, zahlbar im Invaliditätsfall, eine Kapitalversicherung geboten wird, die fällig wird, wenn er als Invalider stirbt.

11. Soll das Versicherungskapital, statt am Schlusse des Versicherungsjahres, zur Zeit des Todes bezahlt werden, und bezeichnen wir den Barwert einer solchen Versicherung mit $\bar{A}_x$, so ist

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

(Text Book, Kap. X, Art. 7.)

Entsprechend ist

$$\bar{A}_x^i = \frac{i}{\delta} A_x^i.$$

Da

$$l_x \bar{A}_x = l_x^{\overline{aa}} \bar{A}_x^a + l_x^{\overline{ii}} \bar{A}_x^i,$$

oder

$$l_x A_x \frac{i}{\delta} = l_x^{\overline{aa}} \bar{A}_x^a + l_x^{\overline{ii}} A_x^i \frac{i}{\delta}$$

und auch

$$l_x A_x \frac{i}{\delta} = l_x^{\overline{aa}} A_x^a \frac{i}{\delta} + l_x^{\overline{ii}} A_x^i \frac{i}{\delta},$$

so folgt durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen

$$o = l_x^{\overline{aa}} \left(\bar{A}_x^a - A_x^a \frac{i}{\delta}\right),$$

oder

$$\bar{A}_x^a = \frac{i}{\delta} A_x^a. \tag{47}$$

Verteilen sich die invalid Werdenden gleichmässig übers Jahr (Gleichung 9), so ist

$$(\bar{A}_x^{\overline{ai}}) = \frac{i}{\delta} (A_x^{\overline{ai}}). \tag{48}$$

Erfolgt die Ausscheidung aus der Aktivität gleichförmig über das Jahr, so ist

$$\bar{A}_x^{\overline{aa}} + (\bar{A}_x^{\overline{ai}}) = \frac{i}{\delta} [A_x^{\overline{aa}} + (A_x^{\overline{ai}})] \tag{49}$$

und wegen (48)

$$\bar{A}_x^{\overline{aa}} = \frac{i}{\delta} A_x^{\overline{aa}} \tag{50}$$

und endlich wegen der Identität

$$\bar{A}_x^{\overline{ai}} = \bar{A}_x - A_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} (\bar{A}_x - \bar{A}_x^i)$$

$$\bar{A}_x^{\overline{ai}} = \frac{i}{\delta} A_x^{\overline{ai}}. \tag{51}$$

12. *Die vollständigen Renten.* Wird beim Tode des Rentners noch eine Ratarente im Verhältnis zur Zeit von der Fälligkeit der letzten Rente bis zum Tode gewährt, so liegt eine vollständige Rente vor. Ihren Barwert bezeichnen wir mit $\mathring{a}_x$.

Es ist

$$\mathring{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x - \frac{\mu_x}{12m^2}, \tag{52}$$

(Text Book, Kap. XI, Art. [18]).

oder auch

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \bar{a}_x \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) + \frac{\delta}{12m^2}. \qquad (53)$$

(Text Book, Kap. XI, Art. [19].)

Demgemäss ist auch

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{i}} = \overset{(m)}{a_x^{i}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^i - \frac{\mu_x^i}{12m^2} \qquad (54)$$

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{i}} = \bar{a}_x^i \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) + \frac{\delta}{12m^2}. \qquad (55)$$

Ferner besteht die Identität

$$l_x \, \overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = l_x^{\bar{a}a} \, \overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{a}} + l_x^{\bar{i}i} \, \overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{i}},$$

oder wegen den Gleichungen (52) und (54)

$$l_x^{\bar{a}a} \, \overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{a}} = \left(l_x^{\bar{a}a} + l_x^{\bar{i}i}\right) \left[a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x - \frac{\mu_x}{12m^2}\right]$$
$$- l_x^{\bar{i}i} \left[\overset{(m)}{a_x^{i}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^i - \frac{\mu_x^i}{12m^2}\right].$$

Und wegen der Gleichungen (21) und (23)

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{a}} = \overset{(m)}{a_x^{a}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^a - \frac{1}{12m^2} \left(\mu_x + \frac{l_x^{\bar{i}i}}{l_x^{\bar{a}a}} \mu_x - \frac{l_x^{\bar{i}i}}{l_x^{\bar{a}a}} \mu_x^i\right)$$

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{a}} = \overset{(m)}{a_x^{a}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^a - \frac{1}{12m^2} \mu_x^{\bar{a}a}, \qquad (56)$$

oder wegen der Gleichung (35[a]) und da

$$\bar{A}_x^a = 1 - \delta \, \bar{a}_x^a;$$

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}_x^{a}} = \bar{a}_x^a \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) + \frac{\delta}{12m^2}. \qquad (57)$$

Im weitern ist zufolge einer Entwicklung entsprechend der des Text Book, Kap. XI, Art. [18]

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{aa}} = \overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{aa}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^{\overline{aa}} - \frac{\mu_x^{\overline{aa}}}{12m^2}. \tag{58}$$

Dieser Herleitung gemäss stellt $\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{aa}}$ den Barwert einer vollständigen Aktivitätsrente dar, bei welcher im Todesfall, nicht aber im Invaliditätsfall, eine Ratarente im Verhältnis der seit der letzten Rentenzahlung verflossenen Zeit gewährt wird.

Aus den Gleichungen (56) und (58) folgt:

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{ai}} = \overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{a} - \overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{aa}} = \overset{(m)}{a}{}_x^{a} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^{a} - \frac{1}{12m^2} \mu_x^{\overline{aa}}$$

$$- \left(\overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{aa}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^{\overline{aa}} - \frac{1}{12m^2} \mu_x^{\overline{aa}} \right)$$

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{ai}} = \overset{(m)}{a}{}_x^{\overline{ai}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^{\overline{ai}}.$$

Und wegen Gleichung (34)

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{ai}} = a_x^{\overline{ai}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^{\overline{ai}} + \frac{m^2-1}{12m^2} \nu_x, \tag{59}$$

oder wegen Gleichung (37)

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{ai}} = \bar{a}_x^{\overline{ai}} + \frac{1}{2m} \bar{A}_x^{\overline{ai}} - \frac{1}{12m^2} \nu_x. \tag{60}$$

$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}}{}_x^{\overline{ai}}$ ist der Barwert einer vollständigen, in Raten von $\frac{1}{m}$ zahlbaren Invaliditätsrente 1 eines Aktiven (x). Die erste Rate von $\frac{1}{m}$ ist zahlbar im Lebensfall zu Anfang des auf den Invalidisierungsabschnitt folgenden Abschnittes von $\frac{1}{m}$ eines Jahres. Stirbt der invalid ge-

wordene Aktive im Invalidisierungsabschnitt, also ohne den nächstfolgenden Abschnitt zu erleben, so ist eine Teilrente im Verhältnis der seit dem Anfang jenes Zeitabschnittes verflossenen Zeit (also nicht im Verhältnis der seit der Invalidisierung verflossenen Zeit) zu gewähren.

Bemerkung. Will man eine vollständige Aktivitätsrente 1 so bilden, dass im Todesfall und im Invaliditätsfall eine Schlussrente gewährt wird, und bezeichnet man ihren Barwert mit $(\overset{\circ}{a}{}^{\overline{aa}}{}^{(m)})$, so erhält man ihren Wert aus der Aktivitätsordnung gerade so, wie den Wert einer vollständigen Leibrente aus der Absterbeordnung.

Es ist also:

$$(\overset{\circ}{a}{}_x^{\overline{aa}}{}^{(m)}) = a_x^{\overline{aa}}{}^{(m)} + \frac{1}{2m}(\overline{A}_x^{\overline{aa}} + (\overline{A}_x^{\overline{ai}})) - \frac{\mu_x^a}{12m^2},$$

oder

$$(\overset{\circ}{a}{}_x^{\overline{aa}}{}^{(m)}) = \overline{a}_x^{\overline{aa}}\left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) + \frac{\delta}{12m^2}. \qquad (58a)$$

Die Differenz $\overset{\circ}{a}{}_x^{a}{}^{(m)} - (\overset{\circ}{a}{}_x^{\overline{aa}}{}^{(m)})$, die wir mit $(\overset{\circ}{a}{}_x^{\overline{ai}}{}^{(m)})$ bezeichnen wollen, stellt den Barwert der vollständigen, in Raten von $\frac{1}{m}$ zahlbaren Invaliditätsrente 1 eines Aktiven (x) dar, wobei als erste Rente eine Rate im Verhältnis der Zeit von der Invalidisierung bis zum Schluss des Invalidisierungsabschnittes gewährt wird.

Stirbt der Invalide im Invalidisierungsabschnitt, so wird als Schlussrente eine Rente im Verhältnis der Zeit von der Invalidisierung bis zum Todestag geleistet.

Definitionsgemäss ist

$$\left(\overset{m)}{\overset{\circ}{a}{}^{\overline{ai}}_{x}}\right) = \overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}^{a}_{x}} - \left(\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}^{\overline{aa}}_{x}}\right),$$

oder wegen der Gleichungen (57) und (58a)

$$\left(\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}^{\overline{ai}}_{x}}\right) = \overline{a}{}^{\overline{ai}}_{x} \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right). \qquad (60a)$$

13. Die Invaliditätsrente, bei welcher die Rentenzahlung sich nach dem Moment des Eintrittes der Invalidität richtet, wird einen von den beiden im Abschnitt 12 berechneten abweichenden Wert haben. Wir bezeichnen mit $\overset{(m)}{\hat{\overset{\circ}{a}}{}^{\overline{ai}}_{x}}$ den Barwert einer in Raten zahlbaren vollständigen Leibrente, wobei die erste Rente $\frac{1}{m}$ eines Jahres nach der Invalidisierung bezahlt werden soll.

Findet die Invalidisierung im Alter ϑ statt, so ist die in diesem Moment entstandene Verbindlichkeit $\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}^{i}_{\vartheta}}$, wobei gemäss Gleichung (55)

$$\overset{(m)}{\overset{\circ}{a}{}^{i}_{\vartheta}} = \overline{a}{}^{i}_{\vartheta} \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right) + \frac{\delta}{12\,m^2}$$

Führt man die Wahrscheinlichkeit ein, dass die Invalidisierung im Alter ϑ eintritt, diskontiert auf das Alter x und integriert, so erhält man

$$\overset{(m)}{\hat{\overset{\circ}{a}}{}^{\overline{ai}}_{x}} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right) \int_x^\infty \frac{1}{l^{\overline{aa}}_x}\, l^{\overline{aa}}_{\vartheta}\, v^{\vartheta - x}\, r_{\vartheta}\, a^{i}_{\vartheta}\, d\vartheta$$

$$+ \frac{\delta}{12\,m^2} \int_x^\infty \frac{1}{l^{\overline{aa}}_x}\, l^{\overline{aa}}_{\vartheta}\, v^{\vartheta - x}\, r_{\vartheta}\, d\vartheta$$

Der Wert des ersten Integrales ist, wie die Betrachtung von Gleichung (29) lehrt, $\bar{a}_x^{\overline{ai}}$, der des zweiten ist gemäss Gleichung (42) gleich $(\bar{A}_x^{\overline{ai}})$.

Also ist

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}_x^{\overline{ai}} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right) \bar{a}_x^{\overline{ai}} + \frac{\delta}{12\,m^2} (\bar{A}_x^{\overline{ai}}), \qquad (61)$$

oder sehr angenähert

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}_x^{\overline{ai}} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right) \bar{a}_x^{\overline{ai}}. \qquad (61^{a})$$

Man vergleiche hierzu die Bemerkung zum Abschnitt 12.

Soll die erste Rente im Betrage von $\frac{1}{m}$ mit der Invalidisierung fällig werden, so ist zu $\overset{(m)}{\mathring{a}}{}_x^{\overline{ai}}$ noch zu addieren der Betrag $\frac{1}{m}$ $(\bar{A}_x^{\overline{ai}})$, so dass der Barwert dann beträgt

$$\overset{(m)}{\mathring{\mathfrak{a}}}{}_x^{\overline{ai}} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right) \bar{a}_x^{\overline{ai}} + \frac{12\,m + \delta}{12\,m^2} (\bar{A}_x^{\overline{ai}}). \qquad (62)$$

14. *Die aufgeschobene Invaliditätsrente.* Findet ein Aufschub in der Weise statt, dass die Invalidität, wenn sie in den ersten n Jahren eintritt, keinen Anspruch auf Rente geben soll, so ist der Barwert des Anspruches nach n Jahren

$$a_{x+n}^{\overline{ai}}.$$

Der gegenwärtige Wert ${}_{n|}\,a_x^{\overline{ai}}$ ist

$${}_{n|}\,a_x^{\overline{ai}} = \frac{D_{x+n}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\, a_{x+n}^{\overline{ai}}. \qquad (63)$$

Der Wert der aufgeschobenen Aktivitätsrente ist

$$ {}_{n|}a_x^{\overline{aa}} = \frac{D_{x+n}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\, a_{x+n}^{\overline{aa}}. \qquad (64) $$

Die aufgeschobene Rente 1 für einen Aktiven (x), zahlbar im Aktivitäts- und Invaliditätsfalle, hat den Wert

$$ {}_{n|}a_x^{a} = \frac{D_{x+n}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\, a_{x+n}^{a}. \qquad (65) $$

Soll der Aufschub in der Weise verstanden werden, dass die Rentenzahlung um n Jahre aufgeschoben, aber auch den Invaliden gewährt wird, die in der Aufschubszeit, also vor dem Alter $(x+n)$, invalid geworden sind, so ist der Wert der Rente nach n Jahren für $l_x^{\overline{aa}}$ Personen

$$ l_{x+n}^{\overline{aa}}\, a_{x+n}^{\overline{ai}} + \left(l_{x+n}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}} \cdot \frac{l_{x+n}^{i}}{l_x^{i}} \right) a_{x+n}^{i}. $$

Der Barwert für eine Person ist im Alter (x)

$$ \frac{D_{x+n}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\, a_{x+n}^{\overline{ai}} + \left(\frac{D_{x+n}^{\overline{ii}}}{D_x^{\overline{aa}}} - \frac{D_x^{\overline{ii}}}{D_x^{\overline{aa}}}\, \frac{D_{x+n}^{i}}{D_x^{i}} \right) a_{x+n}^{i}. $$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck mit ${}_{n\|}a_x^{\overline{ai}}$, so ist

$$ {}_{n\|}a_x^{\overline{ai}} = {}_{n|}a_x^{\overline{ai}} + \frac{1}{D_x^{\overline{aa}}} \left(D_{x+n}^{\overline{ii}} - D_x^{\overline{ii}}\, \frac{D_{x+n}^{i}}{D_x^{i}} \right) a_{x+n}^{i}. \qquad (66) $$

Die um n Jahre aufgeschobene Rente eines Aktiven, zu beziehen gleichviel, ob der Aktive dann noch aktiv ist oder invalid geworden, hat den Wert

$$ {}_{n|}a_x^{a} = {}_{n|}a_x^{\overline{aa}} + {}_{n\|}a_x^{\overline{ai}}. \qquad (67) $$

Es besteht daher die Identität

$$ {}_{n\|}a_x^{\overline{ai}} = {}_{n|}a_x - {}_{n|}a_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}} \left({}_{n|}a_x - {}_{n|}a_x^{i} \right). \qquad (68) $$

Die Beziehungen (63) bis (68) gelten auch für Ratarenten, kontinuierliche und vollständige Renten.

15. *Die temporäre Invaliditätsrente.* Es bestehen die Beziehungen

$$_{|n}a_x^{\overline{aa}} = a_x^{\overline{aa}} - {}_{n|}a_x^{\overline{aa}} \tag{69}$$

$$_{||n}a_x^{\overline{ai}} = a_x^{\overline{ai}} - {}_{n||}a_x^{\overline{ai}} \tag{70}$$

$$_{|n}a_x^{a} = a_x^{a} - {}_{n|}a_x^{a} \tag{71}$$

$$_{||n}a_x^{\overline{ai}} = {}_{|n}a_x - {}_{|n}a_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}}\left({}_{|n}a_x - {}_{|n}a_x^{i}\right). \tag{72}$$

Auch diese Beziehungen gelten allgemein für Ratarenten, kontinuierliche und vollständige Renten.

16. In der Praxis kommt häufig die mit den Dienstjahren steigende Invaliditätsrente vor. Betrüge die Rente, wenn die Invalidität nach n vollen Dienstjahren eingetreten ist, r, nach $(n+1)$ vollen Dienstjahren $(r+\alpha)$, nach $(n+2)$ vollen Dienstjahren $(r+2\alpha)$ etc., nach $(n+\varepsilon)$ vollen Dienstjahren $(r+\varepsilon\alpha)$, so ist der Barwert $(v_{\overline{\varepsilon}|}a)_x^{\overline{ai}}$ der Renten beim Diensteintritt:

$$(v_{\overline{\varepsilon}|}a)_x^{\overline{ai}} = r\,\frac{D_{x+n}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\,a_{x+n}^{\overline{ai}} + \alpha\,\frac{D_{x+n+1}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\,a_{x+n+1}^{\overline{ai}}$$

$$+\,\alpha\,\frac{D_{x+n+2}^{\overline{ai}}}{D_x^{\overline{aa}}}\,a_{x+n+2}^{\overline{ai}} + \ldots\,\alpha\,\frac{D_{x+n+\varepsilon}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}\,a_{x+n+\varepsilon}^{\overline{ai}}$$

$$= r\cdot {}_{n|}a_x^{\overline{ai}} + \alpha\left({}_{n+1|}a_x^{\overline{ai}} + {}_{n+2|}a_x^{\overline{ai}} + \ldots {}_{n+\varepsilon|}a_x^{\overline{ai}}\right)$$

$$(v_{\overline{\varepsilon}|}a)_x^{\overline{ai}} = r\cdot {}_{n|}a_x^{\overline{ai}} + \alpha\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\varepsilon} {}_{n+\varepsilon|}a_x^{\overline{ai}}. \tag{73}$$

Handelt es sich z. B. um eine in Raten zahlbare Rente, gemäss Abschnitt 8, so erhält man

$$(\mathrm{v}_{\overline{\varepsilon}|}\, a)_x^{\overset{(m)}{\overline{ai}}} = (\mathrm{v}_{\overline{\varepsilon}|}\, a)_x^{\overline{ai}} + r\, \frac{\mathrm{D}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{D}_x^{\overline{aa}}}\, \frac{m^2-1}{12\, m^2}\, v_{x+n} +$$

$$\frac{m^2-1}{12\, m^2}\left[\alpha\, \frac{\mathrm{D}_{x+n+1}^{\overline{aa}}}{\mathrm{D}_x^{\overline{aa}}}\, v_{x+n+1} + \ldots \alpha\, \frac{\mathrm{D}_{x+n+\varepsilon}^{\overline{aa}}}{\mathrm{D}_x^{\overline{aa}}}\, v_{x+n+\varepsilon}\right]$$

$$= (\mathrm{v}_{\overline{\varepsilon}|}\, a)_x^{\overline{ai}} + \frac{m^2-1}{12\, m^2}\, \frac{1}{\mathrm{D}_x^{\overline{aa}}}\left[r\, \mathrm{D}_x^{\overline{aa}}\, v_{x+n} + \right.$$

$$\left. \alpha \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\varepsilon} \mathrm{D}_{x+n+\varepsilon}^{\overline{aa}}\, v_{x+n+\varepsilon}\right]. \qquad (74)$$

Der zweite Summand der rechten Seite ist der Fehler, den man begeht, wenn man $(\mathrm{v}_{\overline{\varepsilon}|}\, a)_x^{\overline{ai}}$ für $(\mathrm{v}_{\overline{\varepsilon}|}\, a)_x^{\overset{(m)}{\overline{ai}}}$ setzt.

Derselbe ist klein und hat im allgemeinen in der Praxis keine Bedeutung.

17. *Die Verbindungsrente auf zwei Leben.* Wir bezeichnen mit

a_{xy} den Barwert der Rente 1, zahlbar bis zum ersten Ableben zweier Personen vom Alter x und y;

a_{xy}^{i} bedeute die entsprechende Rente, wenn der $x$jährige invalid ist;

$a_{xy}^{\overline{aa}}$ bedeute den Barwert der Rente 1, aufhörend mit dem Tode von (y) oder mit der Invalidität von (x), spätestens mit dessen Tode;

$a_{xy}^{\overline{ai}}$ bedeute den Barwert der Rente 1, zahlbar an ein Ehepaar, bestehend aus einem Aktiven (x) und einer Frau (y), beginnend mit der Invalidität

des Mannes und aufhörend mit dem ersten Todesfall;

a^{a}_{xy} endlich sei der Barwert einer Rente auf das verbundene Leben eines $x$jährigen Aktiven und einer $y$jährigen Frau, zahlbar bis zum ersten Ableben. Dabei soll es für die Zahlungspflicht gleichgültig sein, ob der Mann aktiv oder invalid ist.

Die Werte von a_{xy} und a^{i}_{xy} werden aus den Tafeln der l_y, l_x und l^{i}_{x} in bekannter Weise hergeleitet.

$a^{\overline{aa}}_{xy}$ wird aus den Tafeln der l_y und $l^{\overline{aa}}_{x}$ ebenso berechnet, wie a_{xy} aus den Tafeln der l_y und l_x.

Nach der Definition muss

$$a^{a}_{xy} = a^{\overline{aa}}_{xy} + a^{\overline{ai}}_{xy}\,; \tag{75}$$

ferner ist

$$l_x\, a_{xy} = l^{\overline{aa}}_{x}\, a^{a}_{xy} + l^{\overline{ii}}_{x}\, a^{i}_{xy}\,. \tag{76}$$

18. *Die Verbindungsrenten in Raten.*

Es ist

$$a^{\overset{(m)}{a}}_{xy} = a^{\overset{(m)}{\overline{aa}}}_{xy} + a^{\overset{(m)}{\overline{ai}}}_{xy}\,. \tag{78}$$

Ferner besteht die Identität:

$$a^{\overset{(m)}{\overline{ai}}}_{xy} = a^{(m)}_{xy} - a^{\overset{(m)}{\overline{aa}}}_{xy} + \frac{l^{\overline{ii}}_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x}}\left(a^{(m)}_{xy} - a^{\overset{(m)}{i}}_{xy}\right). \tag{79}$$

Wir haben ferner die Beziehung:

$$a^{(m)}_{xy} = a_{xy} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\,(\mu_x + \mu_y + \delta). \tag{80}$$

(Text Book, Kap. IX, 32.)

Ebenso ist:

$$a^{\overset{(m)}{i}}_{xy} = a^{i}_{xy} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\,(\mu^{i}_{x} + \mu_y + \delta). \tag{81}$$

Zufolge der in Abschnitt 17 gemachten Bemerkung über die Berechnung von $a_{xy}^{\overline{aa}}$ ist

$$a_{xy}^{\overset{(m)}{\overline{aa}}} = a_{xy}^{\overline{aa}} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x^a + \mu_y + \delta). \quad (82)$$

Hieraus folgt durch Substitution in (79)

$$a_{xy}^{\overset{(m)}{\overline{ai}}} = a_{xy}^{\overline{ai}} + \frac{m^2-1}{12m^2}\nu_x \quad (83)$$

und

$$a_{xy}^{\overset{(m)}{a}} = a_{xy}^{a} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_y + \delta). \quad (84)$$

19. *Die kontinuierliche Verbindungsrente.* Lässt man in den Gleichungen (80) bis (84) m über alle Grenzen wachsen, so entstehen die Gleichungen:

$$\bar{a}_{xy} = a_{xy} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \mu_y + \delta) \quad (85)$$

$$\bar{a}_{xy}^{i} = a_{xy}^{i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x^i + \mu_y + \delta) \quad (86)$$

$$\bar{a}_{xy}^{\overline{aa}} = a_{xy}^{\overline{aa}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x^a + \mu_y + \delta) \quad (87)$$

$$\bar{a}_{xy}^{\overline{ai}} = a_{xy}^{\overline{ai}} \qquad + \frac{1}{12}\nu_x \quad (88)$$

$$\bar{a}_{xy}^{a} = a_{xy}^{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_y + \delta). \quad (89)$$

20. *Die Verbindungsrente in Raten, ausgedrückt durch die kontinuierliche Verbindungsrente.* Aus den Gleichungen (78) bis (84) und (85) bis (89) folgt:

$$a_{xy}^{(m)} = \bar{a}_{xy} - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}(\mu_x + \mu_y + \delta) \quad (90)$$

$$\overset{(m)}{\overset{i}{a}}_{xy} = \bar{a}^{i}_{xy} - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}(\mu_x^i + \mu_y + \delta) \quad (91)$$

$$\overset{(m)}{a}{}^{\overline{aa}}_{xy} = \bar{a}^{\overline{aa}}_{xy} - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}(\mu_x^a + \mu_y + \delta) \quad (92)$$

$$\overset{(m)}{a}{}^{\overline{ai}}_{xy} = \bar{a}^{\overline{ai}}_{xy} \qquad - \frac{1}{12\,m^2}\,\nu_x \quad (93)$$

$$\overset{(m)}{\overset{a}{a}}_{xy} = \bar{a}^{a}_{xy} - \frac{1}{2\,m} + \frac{1}{12\,m^2}(\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_y + \delta). \quad (94)$$

21. *Kapitalversicherung auf den ersten Todesfall von zwei Leben.* Die Bezeichnungen A_{xy}, A^{i}_{xy}, $A^{\overline{aa}}_{xy}$, A^{a}_{xy} und $A^{\overline{ai}}_{xy}$ sind nach Analogie der bisherigen Entwicklungen ohne weiteres verständlich. Ebenso ist klar, dass

$$A^{a}_{xy} = A^{\overline{aa}}_{xy} + A^{\overline{ai}}_{xy} \quad (95)$$

und

$$A^{\overline{ai}}_{xy} = A_{xy} - A^{\overline{aa}}_{xy} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_{xy}^{\overline{aa}}}(A_{xy} - A^{i}_{xy}). \quad (96)$$

Sodann ist

$$A_{xy} = 1 - d\,(1 + a_{xy}) \quad (97)$$

$$A^{i}_{xy} = 1 - d\,(1 + a^{i}_{xy}) \quad (98)$$

$$A^{a}_{xy} = 1 - d\,(1 + a^{a}_{xy}). \quad (99)$$

Ferner bedeutet

$$A^{\overline{aa}}_{xy} + (A^{\overline{ai}}_{x}) = 1 - d\,(1 + a^{\overline{aa}}_{xy}) \quad (100)$$

den Wert einer Versicherung, zahlbar im ersten Todesfall oder vorher, wenn der $x$jährige, der Mann, invalid wird.

Durch diese Entwicklung werden wir zur Berechnung von $(\mathrm{A}_{xy}^{\overline{ai}})$ hingeführt. Es ist der Barwert des Kapitals 1, fällig, wenn der Aktive (x) bei Lebzeiten der Frau (y) invalid wird.

Die folgende Erwägung führt zu deren Bestimmung. Von $l_x^{\overline{aa}}\, l_y$ Aktiven werden im $(x+1)$. Jahre invalid $l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x$. Von diesen sind beim Eintritt der Invalidität verwitwet $l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x\, \frac{q_y^i}{2}$ und nicht verwitwet $l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x \left(1 - \frac{q_y^i}{2}\right)$.

Der Barwert der Auszahlungen im Invaliditätsfall ist für einen Aktiven

$$(\mathrm{A}_{xy}^{\overline{ai}}) = v\, \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} \mathrm{D}_{x+t\,:\,y+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t} \left(1 - \frac{q_{y+t}^i}{2}\right)}{\mathrm{D}_{xy}^{\overline{aa}}}. \qquad (101)$$

Aus Gleichung (99) folgt

$$\mathrm{A}_{xy}^{\overline{aa}} + \mathrm{A}_{xy}^{\overline{ai}} = 1 - d\,(1 + a_{xy}^{\overline{aa}}) - d\, a_{xy}^{\overline{ai}}.$$

Durch Subtraktion von Gleichung (100) kommt

$$(\mathrm{A}_{xy}^{\overline{ai}}) - \mathrm{A}_{xy}^{\overline{ai}} = d\, a_{xy}^{\overline{ai}}, \qquad (102)$$

welche Gleichung analog (46) gebildet ist.

22. Mit genügender Annäherung darf gesetzt werden

$$\overline{\mathrm{A}}_{xy} = \frac{i}{\delta}\, \mathrm{A}_{xy} \qquad (103)$$

$$\overline{\mathrm{A}}_{xy}^{i} = \frac{i}{\delta}\, \mathrm{A}_{xy}^{i} \qquad (104)$$

und, entsprechend der Herleitung von (47),

$$\overline{\mathrm{A}}_{xy}^{a} = \frac{i}{\delta}\, \mathrm{A}_{xy}^{a}. \qquad (105)$$

Analog den Gleichungen (48) bis (51 folgt

$$\bar{A}_{xy}^{\overline{aa}} + (\bar{A}_{xy}^{\overline{ai}}) = \frac{i}{\delta}\,[A_{xy}^{\overline{aa}} + (A_{xy}^{\overline{ai}})] \qquad (106)$$

$$\bar{A}_{xy}^{\overline{aa}} = \frac{i}{\delta}\,A_{xy}^{\overline{aa}}$$

und

$$(\bar{A}_{xy}^{\overline{ai}}) = \frac{i}{\delta}\,(A_{xy}^{\overline{ai}}) \qquad (107)$$

$$\bar{A}_{xy}^{\overline{ai}} = \frac{i}{\delta}\,A_{xy}^{\overline{ai}}. \qquad (108)$$

23. *Die vollständigen verbundenen Renteneinheiten.*

Es ist

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)} = a_{xy}^{(m)} + \frac{1}{2\,m}\,\bar{A}_{xy} - \frac{\mu_x + \mu_y}{12\,m^2}, \qquad (109)$$

(Text Book, Kap. XI, Art. [21].)

oder

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right)\bar{a}_{xy} + \frac{\delta}{12\,m^2}. \qquad (110)$$

Ebenso ist

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)\,i} = a_{xy}^{(m)\,i} + \frac{1}{2\,m}\,\bar{A}_{xy}^{i} - \frac{\mu_x^{i} + \mu_y}{12\,m^2} \qquad (111)$$

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)\,i} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right)\bar{a}_{xy}^{i} + \frac{\delta}{12\,m^2}. \qquad (112)$$

Entsprechend der Entwicklung von (56) und (57) finden wir:

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)\,a} = a_{xy}^{(m)\,a} + \frac{1}{2\,m}\,\bar{A}_{xy}^{a} - \frac{\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_y}{12\,m^2} \qquad (113)$$

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)\,a} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right)\bar{a}_{xy}^{a} + \frac{\delta}{12\,m^2}. \qquad (114)$$

Dieselbe Überlegung, welche zu der Gleichung (58) führt, begründet die Beziehung:

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{\overline{aa}}_{xy} = \overset{(m)}{a}{}^{\overline{aa}}_{xy} + \frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\overline{aa}}_{xy} - \frac{\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_y}{12\,m^2}. \quad (115)$$

Durch Subtraktion von (113) und (115) kommt

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{\overline{ai}}_{xy} = \overset{(m)}{a}{}^{\overline{ai}}_{xy} + \frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\overline{ai}}_{xy}. \quad (116)$$

24. *Die Invaliditätsrenten, bei denen die Rentenzahlung sich nach dem Eintritte der Invalidität richtet.* Wir bezeichnen den Barwert einer solchen Rente, wenn es sich um eine Verbindungsrente handelt, entsprechend dem Abschnitt 13, mit $\hat{a}^{ai}_{xy}$. Ganz entsprechend der Entwicklung des Abschnittes 13 finden wir die Beziehungen.

$$\overset{(m)}{\hat{\mathring{a}}}{}^{\overline{ai}}_{xy} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right)\bar{a}^{\overline{ai}}_{xy} + \frac{\delta}{12\,m^2}\,(\bar{A}^{\overline{ai}}_{xy}), \quad (117)$$

oder angenähert

$$\overset{(m)}{\hat{\mathring{a}}}{}^{\overline{ai}}_{xy} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right)\bar{a}^{\overline{ai}}_{xy} \quad (117a)$$

und

$$\overset{(m)}{\hat{\mathring{\mathfrak{a}}}}{}^{\overline{ai}}_{xy} = \left(1 - \frac{\delta}{2\,m}\right)\bar{a}^{\overline{ai}}_{xy} + \frac{12\,m + \delta}{12\,m^2}\,(\bar{A}^{\overline{ai}}_{xy}). \quad (118)$$

25. *Die Überlebenskapitalversicherung.*

Es bezeichne

A^{1}_{xy} den Barwert des Kapitals 1, zahlbar beim Ableben von (x), wenn alsdann (y) noch lebt;

A^{1}_{xy} den Barwert des Kapitals 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn alsdann (x) noch lebt;

A^{2}_{xy} sei der Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (x), wenn er (y) überlebt, und

A_{xy}^{2} der Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn er (x) überlebt.

Nun ist offenbar

$$A^{1}_{xy} + A^{2}_{xy} = A_x$$

$$A_{xy}^{1} + A_{xy}^{2} = A_y,$$

ferner

$$A^{1}_{xy} + A_{xy}^{1} = A_{xy}$$

und also

$$A_{xy}^{1} - A^{2}_{xy} = A_{xy} - A_x$$

$$A^{1}_{xy} - A_{xy}^{2} = A_{xy} - A_y$$

$$A^{2}_{xy} + A_{xy}^{2} = A_x + A_y - A_{xy}$$

Es sollen ferner bedeuten

$A^{i}_{1\,xy}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Invaliden (x) wenn (y) dann noch lebt;

$A^{aa}_{1\,xy}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x) als Aktiver, wenn (y) dann noch lebt;

$A^{ai}_{1\,xy}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x) als Invalider, wenn (y) dann noch lebt;

$A^{a}_{1\,xy}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x) als Aktiver oder Invalider, wenn (y) dann noch lebt.

Sodann sei

$A^{i}_{x\,y\,1}$ der Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn der Invalide (x) dann noch lebt;

$A_{xy}^{\overline{aa}\,1}$ der Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn der Aktive (x) dann als Aktiver noch lebt;

$A_{xy}^{\overline{ai}\,1}$ der Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn (x) dann noch als Invalider lebt;

$A_{xy}^{a\,1}$ der Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn dann (x) noch lebt, gleichviel ob als Aktiver oder Invalider.

Es bezeichne

$A_{xy}^{i\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Invaliden (x), wenn er (y) überlebt;

$A_{xy}^{\overline{aa}\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x), sei es als Aktiver, sei es als Invalider, wenn er (y) als Aktiver überlebt hat.

Je nachdem das Ableben des (x) als Aktiver oder Invalider erfolgt, ist zu unterscheiden zwischen

$A_{xy}^{\overline{aa}:a\,2}$ dem Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x) als *Aktiver,* wenn er (y) überlebt, und

$A_{xy}^{\overline{aa}:i\,2}$ dem Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x) als *Invalider,* wenn er (y) als Aktiver überlebt.

Ferner bedeutet

$A_{xy}^{\overline{ai}\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x), wenn er (y) als Invalider überlebt;

$A_{xy}^{a\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben des Aktiven (x), wenn er (y) überlebt, gleichviel ob als Aktiver oder Invalider.

Es bezeichne

$A_{xy}^{i\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn er den Invaliden (x) überlebt;

$A_{xy}^{\overline{aa}\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn er den Aktiven (x) überlebt. Dabei wird vorausgesetzt, dass (x) als Aktiver gestorben sei.

$A_{xy}^{\overline{ai}\,2}$ bezeichne den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn er den Aktiven (x) überlebt; vorausgesetzt, dass dieser beim Ableben invalid gewesen sei;

$A_{xy}^{a\,2}$ den Barwert der Versicherung 1, zahlbar beim Ableben von (y), wenn er den Aktiven (x) überlebt, gleichviel ob dieser als Aktiver oder Invalider gestorben sei.

Es bestehen folgende Beziehungen

$$A_{xy}^{2\,aa:a} + A_{xy}^{2\,\overline{aa}:i} = A_{xy}^{2\,\overline{aa}}. \tag{119}$$

Ferner

$$A_{xy}^{1\,aa} + A_{xy}^{2\,aa:a} = A_{x}^{\overline{aa}} \tag{120}$$

$$A_{xy}^{1\,\overline{aa}} + A_{xy}^{1\,aa} = A_{xy}^{aa}. \tag{121}$$

Sodann ist

$$A_{xy}^{1\,\overline{ai}} + A_{xy}^{2\,\overline{ai}} + A_{xy}^{2\,\overline{aa}:i} = A_{x}^{\overline{ai}} \tag{122}$$

$$A_{xy}^{1\,ai} + A_{xy}^{1\,\overline{ai}} = A_{xy}^{ai}. \tag{123}$$

Weiter ist

$$A_{xy}^{1\,\overline{aa}} + A_{xy}^{2\,\overline{aa}} + A_{xy}^{1\,\overline{ai}} + A_{xy}^{2\,\overline{ai}} = A_{y} \tag{124}$$

$$A_{xy}^{1\,\overline{aa}} + A_{xy}^{2\,\overline{aa}} + A_{xy}^{1\,\overline{ai}} + A_{xy}^{2\,\overline{ai}} = A_{x}. \tag{125}$$

Und endlich

$$A^{\overline{aa}}_{1\,xy} + A^{\overline{ai}}_{1\,xy} = A^{a}_{1\,xy} \tag{126}$$

$$A^{\overline{aa}}_{xy\,1} + A^{\overline{ai}}_{xy\,1} = A^{a}_{xy\,1} \tag{127}$$

$$A^{\overline{aa}}_{2\,xy} + A^{\overline{ai}}_{2\,xy} = A^{a}_{2\,xy} \tag{128}$$

$$A^{\overline{aa}}_{xy\,2} + A^{\overline{ai}}_{xy\,2} = A^{a}_{xy\,2}. \tag{129}$$

Für jeden der Werte A^a gilt die Beziehung

$$A^a = A + \frac{l^{\overline{ii}}}{l^{\overline{aa}}}(A - A^i).$$

Zur Berechnung von $A^{\overline{aa}}_{1\,xy}$ benutzen wir die Beziehung

$$A^{\overline{aa}}_{1\,xy} = \mu_y \cdot \bar{a}^{\overline{aa}}_{xy} + \frac{1}{2}\left(\bar{a}^{\overline{aa}}_{x:y-1} - \bar{a}^{\overline{aa}}_{x:y+1}\right), \tag{130}$$

(Text Book, Kap. XIII, Art. 32.)

Sie ergibt sich aus der Erwägung, dass man zur Ermittlung von $A^{\overline{aa}}_{1\,xy}$ die Aktivitätsordnung wie eine Absterbeordnung zu behandeln hat, also die durch Tod oder Invalidität Ausscheidenden wie Sterbefälle in die Rechnung einführen muss.

Im weitern können wir die Summe $A^{\overline{ai}}_{1\,xy} + A^{\overline{ai}}_{2\,xy}$ direkt bestimmen. Es ist der Barwert der Versicherung 1, zahlbar, wenn der Ehemann im Zustand der Invalidität stirbt, wobei vorausgesetzt wird, dass die Frau die Invalidisierung des Ehemannes überlebt habe. Von $l_x^{\overline{aa}}\, l_y$ Ehepaaren werden von der Invalidisierung betroffen

$$l_x^{\overline{aa}}\, l_y \left(1 - \frac{q_y}{2}\right) i_x.$$

Von diesen sterben Männer im gleichen Jahr

$$l_x^{\overline{aa}}\, l_y \left(1 - \frac{q_y}{2}\right) i_x \frac{q_x^i}{2}.$$

Von den Ehepaaren, deren Männer invalid werden, ist die Zahl derjenigen, welche das Invaliditätsjahr überleben:

$$l_x^{\overline{aa}}\, l_y \left(1 - \frac{q_y}{2}\right) i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right).$$

Der Barwert der Leistungen auf Anfang des Jahres bezogen ist

$$v\, l_x^{\overline{aa}}\, l_y \left(1 - \frac{q_y}{2}\right) i_x \left[\left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) A_{x+1}^i + \frac{q_x^i}{2}\right];$$

also der Barwert der gesuchten Summe

$$\frac{1}{l_x^{\overline{aa}}\, l_y}\, v \sum_{t=0}^{\infty} v^t\, l_{x+t}^{\overline{aa}}\, l_{y+t} \left(1 - \frac{q_{y+t}}{2}\right) i_{x+t} \left[\frac{q_{x+t}^i}{2} + \left(1 - \frac{q_{x+t}^i}{2}\right) A_{x+t+1}^i\right].$$

Folglich ist

$$A_{1\,xy}^{\overline{ai}} + A_{2\,xy}^{\overline{ai}} = \frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}}\, v \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}} \left(1 - \frac{q_{y+t}}{2}\right) i_{x+t} \times \left[\frac{q_{x+t}^i}{2} + \left(1 - \frac{q_{x+t}^i}{2}\right) A_{x+t+1}^i\right]. \qquad (131)$$

Entsprechend ist

$$A_{xy}^{\overline{ai}} + A_{xy}^{\overline{ai}} = \frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}}\, v \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t} \left[\frac{q_{y+t}}{2} + (1 - q_{y+t})\, A_{y+t+1}\right]. \qquad (132)$$

Die Beziehungen (119) bis (132) führen zur Ermittlung eines jeden der Werte von A.

Um die Werte der Überlebenskapitalversicherung, zahlbar sofort nach dem Tode, angenähert zu finden, hat man die ermittelten Werte mit $\frac{i}{\delta}$ zu multiplizieren.

Auch durch numerische Auswertung der bestimmten Integrale

$$\frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}} v_{x+t} \bar{A}_{x+t}^{i} \, dt$$

und

$$\frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}} v_{x+t} \bar{A}_{y+t} \, dt,$$

gelangt man zu den Werten von

$$\bar{A}_{\overset{1}{xy}}^{\overline{ai}} + \bar{A}_{\overset{2}{xy}}^{\overline{ai}}$$

und

$$\bar{A}_{x\overset{1}{y}}^{\overline{ai}} + \bar{A}_{x\overset{2}{y}}^{\overline{ai}}.$$

Man kann ihnen auch die Form geben

$$\bar{A}_{\overset{1}{xy}}^{\overline{ai}} + \bar{A}_{\overset{2}{xy}}^{\overline{ai}} = \frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}} v_{x+t} (1 - \delta \, \bar{a}_{x+t}^{i}) \, dt$$

$$= (\bar{A}_{xy}^{\overline{ai}}) - \frac{\delta}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}} v_{x+t} \, \bar{a}_{x+t}^{i} \, dt. \tag{133}$$

$$\bar{A}_{x\overset{1}{y}}^{\overline{ai}} + \bar{A}_{x\overset{2}{y}}^{\overline{ai}} = (\bar{A}_{xy}^{\overline{ai}}) - \frac{\delta}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t} v_{x+t} \, \bar{a}_{y+t} \, dt. \tag{134}$$

26. *Überlebensrenten.* Wir bezeichnen mit $a_{x|y}$ den Barwert der Rente 1, zahlbar nach dem Ableben von (x), erstmals zu Anfang des auf das Todesjahr folgenden Jahres, solange (y) lebt.

Es ist

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy}.$$

Ferner

$$a^{i}_{x|y} = a_y - a^{i}_{xy}.$$

$a^{a}_{x|y}$ soll den Wert der Rente bezeichnen, zahlbar nach dem Ableben des Aktiven (x), sei es als Aktiver oder Invalider, solange (y) lebt. Es ist

$$a^{a}_{x|y} = a_y - a^{a}_{xy} = a_y - \overline{a^{aa}_{xy}} - \overline{a^{ai}_{xy}}. \qquad (135)$$

$\overline{a^{aa}_{x|y}}$ ist der Barwert der Rente, zahlbar nach dem Ableben von (x) als Aktiver, so lange (y) lebt.

Zu seiner Bestimmung führt die folgende Betrachtung. Von $\overline{l^{aa}_x}\, l_y$ Ehen werden im nächsten Jahre aufgelöst durch Tod des Mannes im aktiven Zustand

$$\overline{l^{aa}_x}\, l_y\, \overline{q^{aa}_x}.$$

Von $\overline{l^{aa}_x}\, l_y$ Frauen, welche im nächsten Jahre den Mann durch Tod im aktiven Zustande verlieren, überleben das Jahr

$$\overline{l^{aa}_x}\, l_y\, \overline{q^{aa}_x}\,(1 - q_y).$$

Der Barwert ihrer Witwenrente ist

$$v\, \overline{l^{aa}_x}\, l_y\, \overline{q^{aa}_x}\,(1 - q_y)\,(1 + a_{y+1});$$

folglich ist (136)

$$\overline{a^{aa}_{x|y}} = \frac{v}{D^{aa}_{xy}} \sum_{t=0}^{\infty} D^{aa}_{x+t:y+t}\, \overline{q^{aa}_{x+t}}\,(1 - q_{y+t})\,(1 + a_{y+t+1}).$$

$\overline{a^{ai}_{x|y}}$ ist der Barwert der Rente 1, welche (y) bezieht, nachdem (x) als Invalider gestorben.

Von $\overline{l^{aa}_x}\, l_y$ Ehepaaren überleben

$$\overline{l^{aa}_x}\, l_y\,(1 - q_y)$$

Frauen das erste Jahr.

Von den Männern werden invalid und sterben im gleichen Jahre

$$l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x\, \frac{q_x^i}{2};$$

es überleben als Invalide

$$l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right).$$

Der Barwert der Verpflichtungen ist

$$v\, l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x\, (1 - q_y)\, \frac{q_x^i}{2}\, (1 + a_{y+1})$$
$$+ v\, l_x^{\overline{aa}}\, l_y\, i_x\, (1 - q_y) \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) a_{x+1|y+1}^i$$

und folglich

$$a_{x|y}^{\overline{ai}} = \frac{v}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t}\, (1 - q_{y+t})\, [1 + a_{y+t+1}$$
$$- \left(1 - \frac{q_{x+t}^i}{2}\right) (1 + a_{x+t+1:y+t+1}^i)].$$

Also ist

$$a_{x|y}^{\overline{ai}} = \frac{v}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t}\, (1 - q_{y+t})\, (1 + a_{y+t+1}) - a_{xy}^{\overline{ai}}. \tag{137}$$

Die Werte von $a_{x|y}^{\overline{aa}}$ und $a_{x|y}^{\overline{ai}}$ können auch bestimmt werden, indem man die Rente einführt, zahlbar an (y), nachdem (x) invalid geworden. Diese bezeichnen wir mit $(a_{x|y}^{\overline{ai}})$.

Es ist nämlich

$$a_{x|y}^{\overline{aa}} + (a_{x|y}^{\overline{ai}}) + a_{xy}^{\overline{aa}} = a_y. \tag{138}$$

Ferner ist

$$a_{x|y}^{\overline{ai}} = (a_{x|y}^{\overline{ai}}) - a_{xy}^{\overline{ai}}. \tag{139}$$

Der Wert der eingeführten Rente bestimmt sich, wie sofort erhellt, mit der Beziehung

$$(a_{x|y}^{\overline{ai}}) = \frac{v}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}}\, i_{x+t}\,(1 - q_{y+t})\,(1 + a_{y+t+1}) \tag{140}$$

und

$$(\bar{a}_{x|y}^{\overline{ai}}) = \frac{1}{D_{xy}^{aa}} \int_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t}^{\overline{aa}}\, v_{x+t}\, \bar{a}_{y+t}\, dt. \tag{141}$$

Wir bezeichnen mit

$$a_{y|x}^{i} = a_{x}^{i} - a_{xy}^{i}$$

den Barwert der Rente 1, zahlbar nach dem Ableben von (y) an den Invaliden (x).

$a_{y|x}^{a}$ sei der Barwert der Rente 1, zahlbar nach dem Ableben von (y) an den Aktiven (x), gleichviel ob dieser vor oder nach dem Ableben von (y) invalid geworden und als Aktiver oder Invalider gestorben.

Es ist demnach

$$a_{y|x}^{a} = a_{y|x}^{\overline{aa}:a} + a_{y|x}^{\overline{aa}:i} + a_{y|x}^{\overline{ai}}, \tag{142}$$

wo $a_{y|x}^{\overline{aa}:a}$ der Barwert der Rente 1, zahlbar nach dem Ableben von (y) an den Aktiven (x), solange dieser aktiv bleibt;

$a_{y|x}^{\overline{aa}:i}$ der Barwert der Rente 1, zahlbar nach dem Ableben von (y) an den Aktiven (x), nachdem dieser nach dem Ableben von (y) invalid geworden;

$a_{y|x}^{\overline{ai}}$ der Barwert der Rente 1, zahlbar nach dem Ableben von (y) an (x), wenn dieser zur Zeit des Ablebens invalid gewesen.

Offenbar ist

$$a_{y|x}^{\overline{aa}:a} = a_{x}^{\overline{aa}} - a_{xy}^{\overline{aa}} \tag{143}$$

$$a^{ai}_{y|x} = \frac{v}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \sum_{t=0}^{\infty} D^{\overline{aa}}_{x+t:y+t}\, i_{x+t} \left(1 - \frac{q^{i}_{x+t}}{2}\right) \times$$

$$[q_{y+t}\,(1 + a^{i}_{x+t+1}) + (1 - q_{y+t})\,(1 + a^{i}_{x+t+1})$$

$$- (1 - q_{y+t})\,(1 + a^{i}_{x+t+1:y+t+1})]$$

$$a^{\overline{ai}}_{y|x} = \frac{v}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \sum_{t=0}^{\infty} D^{\overline{aa}}_{x+t:y+t}\, i_{x+t} \left(1 - \frac{q^{i}_{x+t}}{2}\right)(1 + a^{i}_{x+t+1})$$

$$- a^{\overline{ai}}_{xy} \qquad (144)$$

$$a^{\overline{aa}:i}_{y|x} = \frac{v}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \sum_{t=0}^{\infty} D^{\overline{aa}}_{x+t:y+t}\, q_{y+t}\, p^{\overline{aa}}_{x+t}\, a^{\overline{ai}}_{x+t+1}. \qquad (145)$$

27. *In Raten zahlbare Renten.*

Da

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy},$$

so ist

$$a^{(m)}_{x|y} = a^{(m)}_{y} - a^{(m)}_{xy} = a_y - a_{xy} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu_x$$

$$a^{(m)}_{x|y} = a_{x|y} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu_x \qquad (146)$$

$$\overset{(m)}{a^{i}_{x|y}} = a^{i}_{x|y} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu^{i}_{x}. \qquad (147)$$

Gemäss Gleichung (135) ist

$$\overset{(m)}{a^{a}_{x|y}} = a^{(m)}_{y} - \overset{(m)}{a^{a}_{xy}},$$

oder wegen (84)

$$= a^{a}_{x|y} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu^{\overline{aa}}_{x}. \qquad (148)$$

Die Gleichungen (148), (138) und (139) führen wegen des symmetrischen Baues von $a_{x|y}^{\overline{aa}}$ und $(a_{x|y}^{\overline{ai}})$ zu der Beziehung

$$\overset{(m)}{a}{}_{x|y}^{aa} = a_{x|y}^{\overline{aa}} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu_x^{\overline{aa}}. \tag{149}$$

Hieraus folgt

$$\overset{(m)}{a}{}_{x|y}^{ai} = a_{x|y}^{\overline{ai}}. \tag{150}$$

Sodann ist wegen (143), (33) und (82)

$$\overset{(m)}{a}{}_{y|x}^{aa:a} = a_{y|x}^{\overline{aa}:a} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu_y. \tag{151}$$

Da

$$a_{y|x}^{a} = a_x^a - a_{xy}^a,$$

so ist wegen Gleichung (35) und (84)

$$\overset{(m)}{a}{}_{y|x}^{a} = \overset{(m)}{a}{}_x^a - \overset{(m)}{a}{}_{xy}^a = a_{y|x}^a + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \mu_y \tag{152}$$

und wegen (142), (151) und (152)

$$\overset{(m)}{a}{}_{y|x}^{aa:i} + \overset{(m)}{a}{}_{y|x}^{ai} = a_{y|x}^{\overline{aa}:i} + a_{y|x}^{\overline{ai}}. \tag{153}$$

28. *Die kontinuierlichen Renten.* Wir lassen in den Gleichungen des 27. Abschnittes m unendlich wachsen und erhalten so unter anderm folgende Beziehungen:

$$\bar{a}_{x|y} = a_{x|y} + \frac{1}{12}\, \mu_x \tag{154}$$

$$\bar{a}_{x|y}^{i} = a_{x|y}^{i} + \frac{1}{12}\, \mu_x^{i} \tag{155}$$

$$\bar{a}_{x|y}^{a} = a_{x|y}^{a} + \frac{1}{12}\, \mu_x^{\overline{aa}} \tag{156}$$

$$\bar{a}^{\overline{aa}}_{x|y} = a^{\overline{aa}}_{x|y} + \frac{1}{12}\,\mu_x^{\overline{aa}} \tag{157}$$

$$\bar{a}^{\overline{ai}}_{x|y} = a^{\overline{ai}}_{x|y}. \tag{158}$$

Durch Verbindung mit den Werten $a^{(m)}$ entstehen die Beziehungen:

$$a^{(m)}_{x|y} = \bar{a}_{x|y} - \frac{1}{12\,m^2}\,\mu_x \tag{159}$$

$$\overset{(m)}{\overset{i}{a}}_{x|y} = \bar{a}^{i}_{x|y} - \frac{1}{12\,m^2}\,\mu_x^{i} \tag{160}$$

$$\overset{(m)}{\overset{a}{a}}_{x|y} = \bar{a}^{a}_{x|y} - \frac{1}{12\,m^2}\,\mu_x^{\overline{aa}} \tag{161}$$

$$\overset{(m)}{a}^{\overline{aa}}_{x|y} = \bar{a}^{\overline{aa}}_{x|y} - \frac{1}{12\,m^2}\,\mu_x^{\overline{aa}} \tag{162}$$

$$\overset{(m)}{a}^{\overline{ai}}_{x|y} = \bar{a}^{\overline{ai}}_{x|y}. \tag{163}$$

29. *Vollständige Renten.* Soll am Schlusse noch eine Ratarente im Verhältnis der abgelaufenen Zeit fällig werden, so ist zu addieren $\frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\,2}_{xy}$, $\frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\,i\;2}_{xy}$, $\frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\,a\;2}_{xy}$, $\frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\,\overline{aa}\;2}_{xy}$, $\frac{1}{2\,m}\,\bar{A}^{\,\overline{ai}\;2}_{xy}$, je nachdem es sich um die Gleichungen (159), (160), (161), (162) oder (163) handelt.

30. *Vollständige Überlebensrenten, die vom Todestag an laufen.* Wir bezeichnen die vom Todestag an laufenden Überlebensrenten mit $\hat{a}_{x|y}$, wenn es sich um unvollständige Renten, mit $\mathring{a}_{x|y}$, wenn es sich um vollständige Renten handelt.

Nach dem Text Book, Kap. XIV, 35, gelten die folgenden Beziehungen:

$$\overset{\circ}{a}{}^{(m)}_{x|y} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right)(a_y - a_{xy}) + \frac{\delta}{12m^2}\,\bar{A}^1_{xy}$$

$$= \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) a_{x|y} + \frac{\delta}{12m^2}\,\bar{A}^1_{xy}.$$

Zur Ermittlung von $\overset{\circ}{a}{}^{(m)\,\overline{ai}}_{x|y}$ stellen wir die folgende Betrachtung an. Sei ϑ das Alter, das (y) erreicht hat, wenn (x) invalid wird. Dann ist das Alter von (x) gleich $(x + \vartheta - y)$. In diesem Augenblick ist die vollständige nachschüssige Überlebensrente

$$\overset{\circ}{a}{}^{(m)\,i}_{x+\vartheta-y|y} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) a^{i}_{x+\vartheta-y|y} + \frac{\delta}{12m^2}\,\bar{A}^{i\;\;1}_{x+\vartheta-y:y}.$$

Führt man die Wahrscheinlichkeit ein, dass x im Alter $(x + \vartheta - y)$ invalid wird, diskontiert und addiert, so erhält man, da das Integral über $\bar{a}^{i}_{x+\vartheta-y|y}$ gerade $\bar{a}^{\overline{ai}}_{x|y}$, und das über $\bar{A}^{i\;\;1}_{x+\vartheta-y:y}$ genau $\bar{A}^{\overline{ai}}_{1\,xy}$ ausmacht.

$$\overset{\circ}{a}{}^{(m)\,\overline{ai}}_{x|y} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}^{\overline{ai}}_{x|y} + \frac{\delta}{12m^2}\,\bar{A}^{\overline{ai}}_{1\,xy}. \qquad (164)$$

Ferner ist

$$\overset{\circ}{a}{}^{(m)\,ai}_{x|y} = \overset{\circ}{a}{}^{(m)\,\overline{ai}}_{x|y} + \frac{1}{m}\,\bar{A}^{\overline{ai}}_{1\,xy}. \qquad (165)$$

Zur Ermittlung von $\overset{\circ}{a}{}^{\overline{aa}}_{x|y}$ nehmen wir an, ϑ sei das Alter, das (y) erreicht hat, wenn (x) stirbt. Dann ist das Alter von (x) gleich $(x + \vartheta - y)$. In diesem Augenblick ist die Verbindlichkeit eine vollständige Rente auf das Leben von (y), also gleich:

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}_{\vartheta} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{\vartheta} + \frac{\delta}{12m^2}.$$

Integrieren wir, so kommt

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{\overline{aa}}_{x|y} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}^{\overline{aa}}_{x|y} + \frac{\delta}{12m^2} \bar{A}^{\overline{aa}}_{\overset{1}{xy}}. \qquad (166)$$

Der letzte Summand ist klein. Angenähert ist

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{\overline{aa}}_{x|y} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}^{\overline{aa}}_{x|y}. \qquad (166^a)$$

Sodann ist:

$$\overset{(m)}{\mathring{\mathfrak{a}}}{}^{\overline{aa}}_{x|y} = \overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{\overline{aa}}_{x|y} + \frac{1}{m} \bar{A}^{\overline{aa}}_{\overset{1}{xy}}. \qquad (167)$$

Aus (164) und (166) folgt:

$$\overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{a}_{x|y} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}^{a}_{x|y} + \frac{\delta}{12m^2} \bar{A}^{a}_{\overset{1}{xy}} \qquad (168)$$

und aus (165) und (167):

$$\overset{(m)}{\mathring{\mathfrak{a}}}{}^{a}_{x|y} = \overset{(m)}{\mathring{a}}{}^{a}_{x|y} + \frac{1}{m} \bar{A}^{a}_{\overset{1}{xy}}. \qquad (169)$$

$a^{a}_{x|y}$ und $\bar{A}^{a}_{\overset{1}{xy}}$ können direkt aus $a_{x|y}$, $a^{i}_{x|y}$, A^{1}_{xy} und $A^{i}_{\overset{1}{xy}}$ berechnet werden.

31. *Die aufgeschobenen Renten auf zwei Leben.*

a. Die Verbindungsrente.

Gemäss der Bedeutung von ${}_{n|}a_{xy}$ ist

$${}_{n|}a_{xy} = \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}} a_{x+n:y+n} \qquad (170)$$

$${}_{n|}a^{i}_{xy} = \frac{D^{i}_{x+n:y+n}}{D^{i}_{xy}} a^{i}_{x+n:y+n} \qquad (171)$$

$$_{n|}\,a_{xy}^{\overline{aa}} = \frac{D_{x+n:y+n}^{\overline{aa}}}{D_{xy}^{aa}}\, a_{x+n:y+n}^{\overline{aa}} \qquad (172)$$

$$_{n|}\,a_{xy}^{\overline{ai}} = \frac{D_{x+n:y+n}^{\overline{aa}}}{D_{xy}^{\overline{aa}}}\, a_{x+n:y+n}^{\overline{ai}}, \qquad (173)$$

wobei $_{n|}\,a_{xy}^{\overline{ai}}$ den Barwert der Rente 1, zahlbar während des Zusammenlebens des Mannes (x) und der Ehefrau (y) bedeutet, beginnend mit der Invalidität von (x). Wird der Mann in den n ersten Jahren invalid, so entsteht kein Anspruch auf Rente.

Ferner ist

$$_{n|}\,a_{xy}^{a} = \frac{D_{x+n:y+n}^{\overline{aa}}}{D_{xy}^{aa}}\, a_{x+n:y+n}^{a}. \qquad (174)$$

Die durch (174) bestimmte Verbindungsrente fängt nach n Jahren zu laufen an, ist also nach $(n+1)$ Jahren zum ersten Mal fällig. Ist (x) aber in den n ersten Jahren invalid geworden, so ist der Anspruch auf Rente erloschen.

Soll die Invalidität in den ersten n Jahren nicht zum Verlust der Rente führen, und bezeichnen wir den Wert einer solchen Verbindungsrente mit $_{n\|}\,a_{xy}$, so haben wir

$$_{n\|}\,a_{xy}^{a} = {}_{n|}\,a_{xy}^{\overline{aa}} + {}_{n\|}\,a_{xy}^{\overline{ai}} \qquad (175)$$

und

$$_{n\|}\,a_{xy}^{a} = {}_{n|}\,a_{xy} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{aa}}\,({}_{n|}\,a_{xy} - {}_{n|}\,a_{xy}^{i}). \qquad (176)$$

Zur Bestimmung von $_{n\|}\,a_{xy}^{\overline{ai}}$ gelangen wir durch die folgende Überlegung.

Von $l_x^{\overline{aa}}\, l_y$ Eheparen leben nach n Jahren noch

$$\left(l_{x+n}^{\overline{ii}}\, l_{y+n} - l_x^{\overline{ii}}\, l_y \frac{l_{x+n}^{i}}{l_x^{i}} \frac{l_{y+n}}{l_y}\right)$$

Ehepaare mit invaliden Männern.

Der Barwert der an sie auszurichtenden Renten ist, auf ein aktives Ehepaar berechnet:

$$v^n \frac{1}{l_x^{aa}\, l_y} \left(l_{x+n}^{\overline{ii}}\, l_{y+n} - l_x^{\overline{ii}}\, l_y \frac{l_{x+n}^{i}}{l_x^{i}} \frac{l_{y+n}}{l_y}\right) a_{x+n:y+n}^{i}$$

oder

$$\frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \frac{D_{xy}^{i}}{D_{x+n:y+n}^{i}} \left(D_{x+n}^{\overline{ii}}\, l_{y+n} - D_x^{\overline{ii}}\, l_y \frac{D_{x+n:y+n}^{i}}{D_{xy}^{i}}\right) {}_{n|}\, a_x^{i}$$

oder

$$\frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \left(\frac{D_{xy}^{i}\, D_{x+n:y+n}^{\overline{ii}}}{D_{x+n:y+n}^{i}} - D_{xy}^{\overline{ii}}\right) {}_{n|}\, a_x^{i}.$$

Folglich erhalten wir (177

$${}_{n||}\, a_{xy}^{\overline{ai}} = {}_{n|}\, a_{xy}^{\overline{ai}} + \frac{1}{D_{xy}^{\overline{aa}}} \left(\frac{D_{xy}^{i}}{D_{x+n:y+n}^{i}}\, D_{x+n:y+n}^{\overline{ii}} - D_{xy}^{\overline{ii}}\right) {}_{n|}\, a_x^{i}.$$

b. Die aufgeschobene Überlebensrente.

Es interessieren uns insbesondere die Renten, welche an die Bedingung geknüpft sind, dass das Überleben nach der Aufschubszeit erfolge.

Je nachdem das Überleben dann erfolgt, wenn der Aktive (x) aktiv oder wenn er invalid ist, unterscheiden wir aufgeschobene Aktivitäts- und Invaliditäts-Überlebensrenten.

Es ist nun

$$_{n|}\, a_{x|y} = \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}\, a_{x+n|y+n} \tag{178}$$

$$_{n|}\, a^{i}_{x|y} = \frac{D^{i}_{x+n:y+n}}{D^{i}_{xy}}\, a^{i}_{x+n|y+n} \tag{179}$$

$$_{n|}\, a^{\overline{aa}}_{x|y} = \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n}}{D^{aa}_{xy}}\, a^{\overline{aa}}_{x+n|y+n} \tag{180}$$

$$_{n|}\, a^{\overline{ai}}_{x|y} = \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n}}{D^{\overline{aa}}_{xy}}\, a^{\overline{ai}}_{x+n|y+n} \tag{181}$$

$$_{n|}\, a^{a}_{x|y} = \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n}}{D^{aa}_{xy}}\, a^{a}_{x+n|y+n}. \tag{182}$$

Insbesondere ist auch

$$_{n|}\, \overset{(m)}{a}{}^{a}_{x|y} = {}_{n|}\, a^{a}_{x|y} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2}\, \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n}}{D^{\overline{aa}}_{x}}\, \mu^{\overline{aa}}_{x}. \tag{183}$$

32. *Die mit den Dienstjahren steigende Aktivitäts- und Invaliditätsüberlebensrente.* Beträgt die Rente, wenn der Tod oder die Invalidität nach n vollen Dienstjahren eintritt, r, nach $(n+1)$ vollen Dienstjahren $(r+\alpha)$, nach $(n+2)$ vollen Dienstjahren $(r+2\alpha)$, nach $(n+\varepsilon)$ vollen Dienstjahren $(r+\varepsilon\alpha)$, so ist der Barwert der Rente beim Diensteintritt

$$(v_{\overline{\varepsilon}|}\, a)^{a}_{x|y} = r\, \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n}}{D^{aa}_{xy}}\, a^{a}_{x+n|y+n}$$

$$+ \alpha\, \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n+1|y+n+1}}{D^{\overline{aa}}_{xy}}\, a^{a}_{x+n+1|y+n+1}$$

$$+ \alpha \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n+2:y+n+2}}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \; a^{a}_{x+n+2|y+n+2}$$

$$+ \ldots \alpha \frac{D^{\overline{aa}}_{x+n+\varepsilon:y+n+\varepsilon}}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \; a^{a}_{x+n+\varepsilon|y+n+\varepsilon}$$

$$= r \cdot {}_{n|}\, a^{a}_{x|y} + \alpha \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\varepsilon} {}_{n+\varepsilon|}\, a^{a}_{x|y} \qquad (184)$$

und ferner

$$(v_{\overline{\varepsilon}|}\, a)^{\overset{(m)}{a}}_{x|y} = (v_{\overline{\varepsilon}|}\, a)^{a}_{x|y} + \frac{m^2 - 1}{12\, m^2} \; \frac{1}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \Big[r \; D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n} \; \mu^{\overline{aa}}_{x}$$

$$+ \alpha \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\varepsilon} D^{\overline{aa}}_{x+n+\varepsilon:y+n+\varepsilon} \; \mu^{\overline{aa}}_{x+n+\varepsilon} \Big]. \qquad (185)$$

Der zweite Summand ist klein und liegt zwischen den Grenzen

$$0 \text{ und } \frac{1}{12} \; \frac{1}{D^{\overline{aa}}_{xy}} \Big[r \cdot D^{\overline{aa}}_{x+n:y+n} \; \mu^{\overline{aa}}_{x}$$

$$+ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\varepsilon} D^{\overline{aa}}_{x+n+\varepsilon:y+n+\varepsilon} \; \mu^{\overline{aa}}_{x+n+\varepsilon} \Big]. \qquad (186)$$

Sieht man vom Restglied ab, so wird

$(v_{\overline{\varepsilon}|}\, a)^{\overset{(m)}{a}}_{x|y} = (v_{\overline{\varepsilon}|}\, a)^{a}_{x|y}$ durch die Gleichung (184) bestimmt. Die Summanden von (184) bestimmen sich gemäss (182).

Zürich, im August 1906.