Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 1 (1906)

Artikel: Du calcul de l'intérêt pour une période inférieure à un an

Autor: Dumas, S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550820

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Du calcul de l'intérêt pour une période inférieure à un an.

Par **S. Dumas,** Berne.

Soit i l'intérêt d'un franc pendant un an et t le temps pendant lequel le capital est placé. Lorsque t est inférieur à une année, il y a trois manières de calculer l'intérêt.

1° L'intérêt est proportionnel au temps, un franc devient:

(1) $$f_1(t) = 1 + i\,t.$$

On nomme quelquefois cette méthode la méthode commerciale.

2° On remarque que l'intérêt n'est payable qu'à la fin de l'année; pour le ramener à sa valeur au moment t, on doit en soustraire son propre intérêt; un franc devient:

(2) $$f_2(t) = 1 + i\,t - (1 - t)\,t\,i^2.$$

3° Par la troisième méthode, dite méthode exponentielle, un franc devient:

(3) $$f_3(t) = (1 + i)^t.$$

Exemple: Soient fr. 1 000 000 placés au 3 % pendant 4 mois. L'intérêt calculé par la première méthode est:

$$\text{Fr. } 1\,000\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{3} = \text{Fr. } 10\,000,$$

par la seconde:

$$\text{Fr. } 1\,000\,000 \left[0{,}03 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \cdot 0{,}0009\right] = \text{Fr. } 9800,$$

par la troisième:

$$\text{Fr. } 1\,000\,000 \left[1{,}03^{-\frac{1}{3}} - 1\right] = \text{Fr. } 9902.$$

Comme son nom l'indique, la méthode commerciale est en usage dans le commerce. C'est celle dont se sert par exemple Kaan [1]).

Nous ne connaissons aucun auteur qui emploie la seconde méthode.

Pour les travaux scientifiques, on préfère en général la méthode exponentielle. Jacques Bernoulli [2]) l'introduisit dans la science, sous une forme un peu différente de celle que nous donnons ici; Dormoy [3]), Sutton et King [4]) l'emploient dans leurs ouvrages; Zillmer [5]), en 1861, et Landré [6]) se prononcent catégoriquement en sa faveur. Elle a le grand avantage de ne pas distinguer le cas où t est entier de celui où il ne l'est pas.

L'équation (1) représente une droite, (2) une parabole, et (3) une courbe exponentielle; ces trois lignes

---

[1]) Die mathematischen Rechnungen bei Pensions-Instituten der Eisenbahnbeamten und deren Witwen (Vienne 1864). Anleitung zur Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien (Vienne 1888).

[2]) Acta eruditorum (Mai 1690), [voir Maurice Cantor, Politische Arithmetik, 2e éd., Leipzig 1903].

[3]) Théorie mathématique des assurances sur la vie (Paris 1878).

[4]) The Institute of Actuaries' Text-Book (2e éd., Londres 1901). Traduction française par Amédée Bégault (Paris et Bruxelles 1894).

[5]) Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen (Berlin, 1re éd., 1861; 2e éd., 1887).

[6]) Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung (Jena 1895).

passent par les deux points $[t = 0,\ f(t) = 1]$ et $[t = 1,\ f(t) = (1 + i)]$, c'est-à-dire que lorsque t est nul ou égal à un an, les trois méthodes donnent les mêmes résultats.

Ainsi que M. Moser[1]), développons l'exponentielle en série :

$$(4) \quad (1+i)^t = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{t(t-1)}{2!} i^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} i^3 + \ldots$$

La méthode commerciale est la même que la méthode exponentielle, si l'on néglige les termes de degré en i supérieur au premier ; dans la seconde, nous tenons compte du terme en i^2, mais en doublant son coëfficient. Les termes de la série (4) sont alternativement positifs et négatifs lorsque t est compris entre 0 et 1 ; c'est donc la première méthode qui donne les résultats les plus forts, et la seconde les plus faibles.

Divisons le terme du second degré par celui du premier, le quotient $\frac{1}{2}(t-1)\,i$ est de l'ordre de grandeur de 0,01. Les résultats des trois méthodes ne diffèrent donc entre eux que de valeurs de l'ordre de leur centième.

De même, le terme en i^3 est de l'ordre du centième de celui en i^2 ; dans une première approximation nous pouvons le négliger ainsi que les suivants. Dans ces conditions, on peut admettre que le résultat de la méthode exponentielle est égal à la moyenne arithmétique des résultats des deux autres. L'erreur commise ainsi est de l'ordre du centième des différences des trois méthodes entre elles, c'est-à-dire de l'ordre du dix-millième de l'intérêt ou du millionième du capital.

---

[1]) Cours du semestre d'été 1905 à l'université de Berne.

Etudions brièvement les variations de la différence des deux premières méthodes; c'est la plus simple des trois différences $f_1(t) - f_2(t)$, $f_1(t) - f_3(t)$ et $f_3(t) - f_2(t)$.

$$(5) \qquad f_1(t) - f_2(t) = (1 - t)\, t\, i^2$$

$$\frac{d}{dt}\Big[f_1(t) - f_2(t)\Big] = (1 - 2t)\, i^2$$

Cette dérivée, positive quand t varie de 0 à $1/2$, s'annule pour t égal à $1/2$; elle est négative quand t varie de $1/2$ à 1. Quand t croît de 0 à $1/2$, la différence (5) croît de 0 à son maximum $1/4\, i^2$; quand t continue à croître, elle décroît et s'annule pour t égal à 1.

Des remarques que nous avons faites précédemment résulte que les deux différences $f_1(t) - f_3(t)$ et $f_3(t) - f_2(t)$ varient de la même façon; leurs maxima diffèrent peu de $1/8\, i^2$; ils sont atteints pour des valeurs de t voisines de $1/2$.

Recherchons à quel moment la différence entre les méthodes commerciale et exponentielle est maximum

$$f_1(t) - f_3(t) = (1 + i\,t) - (1 + i)^t$$

$$\frac{d}{dt}\Big[f_1(t) - f_3(t)\Big] = i - (1 + i)^t \operatorname{Log}(1 + i).$$

Nous avons un maximum lorsque

$$(1 + i)^t \operatorname{Log}(1 + i) = i.$$

Prenons les logarithmes des deux membres

$$t \operatorname{Log}(1 + i) + \operatorname{Log} \operatorname{Log}(1 + i) = \operatorname{Log} i$$

$$t = \frac{\operatorname{Log} i - \operatorname{Log} \operatorname{Log}(1 + i)}{\operatorname{Log}(1 + i)}.$$

On trouverait de même que la valeur de t qui rend maximum la différence $f_3(t) - f_2(t)$, est la racine comprise entre 0 et 1 de l'équation

$$(1+i)^t \operatorname{Log}(1+i) - i + (1-2t)\, i^2 = 0,$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$t - \frac{\operatorname{Log}(1 - i + 2ti)}{\operatorname{Log}(1+i)} - \frac{\operatorname{Log} i - \operatorname{Log}\operatorname{Log}(1+i)}{\operatorname{Log}(1+i)} = 0.$$

En résumé, nous voyons que les résultats auxquels conduisent les trois méthodes diffèrent trop peu pour qu'on puisse avoir des difficultés dans un règlement de comptes; des raisons d'opportunité décideront donc seules du choix de la méthode. Les commerçants emploieront probablement longtemps encore celle à laquelle ils sont accoutumés; elle ne conduit qu'à des calculs très simples.

La méthode exponentielle est un peu plus compliquée; elle nécessite l'usage des logarithmes; mais elle est bien préférable dans les travaux scientifiques; elle est beaucoup mieux fondée rationnellement et surtout elle reste la même lorsque t est fractionnaire que lorsqu'il est entier.

Maximum de $f_1(t) - f_2(t)$.

i	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$[f_1(t) - f_2(t)]$ maximum
0,02	1,010	1,009900	0,000100
0,03	1,015	1,014775	0,000225
0,04	1,020	1,019600	0,000400
0,05	1,025	1,024375	0,000625

Maximum de $f_1(t) - f_3(t)$.

i	t	$f_1(t)$	$f_3(t)$	$[f_1(t)-f_3(t)]$ maximum
0,02	0,50064	1,010013	1,009963	0,000050
0,03	0,50136	1,015041	1,014930	0,000111
0,04	0,50171	1,020068	1,019872	0,000196
0,05	0,50202	1,025101	1,024796	0,000305

Maximum de $f_3(t) - f_2(t)$.

i	t	$f_3(t)$	$f_2(t)$	$[f_3(t)-f_2(t)]$ maximum
0,02	0,4992	1,009934	1,009884	0,000050
0,03	0,4987	1,014850	1,014736	0,000114
0,04	0,4983	1,019736	1,019532	0,000204
0,05	0,4979	1,024590	1,024270	0,000320