Die Wirkung der Zinsfussermässigung auf Rentensätze

Autor(en): **Dizler, Carl**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **1 (1906)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550940

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Wirkung der Zinsfussermässigung auf Rentensätze.

Von **Carl Dizler** in Stuttgart.

Einleitung.

Die Höhe der Leibrenten hängt bei gegebenem Alter und gegebener Versicherungsform insbesondere ab von der Sterbetafel und dem rechnungsmässigen Zinsfusse. Wird der Zinsfuss herabgesetzt, so ermässigt sich auch die Rente. Der Zweck dieser Abhandlung ist nun, im einzelnen darzulegen, welchen Einfluss eine Veränderung des Zinsfusses auf die Höhe der Rentensätze hat. Dabei sollen unter Rentensätzen die jährlichen Bezüge verstanden sein, welche aus runden Einlagebeträgen (100 Fr.; 1 Fr.) hervorgehen.

Wir setzen zunächst den Fall, der rechnungsmässige Zinsfuss betrage 4 % und für ein gewisses Alter sei die zugehörige Leibrente dreimal so hoch, nämlich 12 % der Einlage. Hierbei ist die Leibrente naturgemäss höher als der Zins, denn der Versicherungsnehmer erhält gegen Hingabe seines Kapitales von der Gesellschaft nicht nur Zinsen, sondern auch Kapitalteile und Erbanteile ausgefolgt. Die Verhältnisse

liegen nun aber nicht etwa so, dass die Rente einfach aus zwei konstanten Teilen besteht, im vorliegenden Falle aus 4 %, die von der Zinsanrechnung, und aus 8 %, die von der Kapitalauflösung und Vererbung herrühren. Die Rente ist vielmehr ein kunstvolles Gewebe mit zahlreichen Kreuz- und Querfäden, die derart in einander verschlungen sind, dass sich nicht ohne weiteres erkennen und sagen lässt, welchen Einfluss der Zinsfuss für sich allein auf die Höhe der Rentensätze hat. Nehmen wir nun an, der Zinsfuss werde von 4 % auf 3 ½ % herabgesetzt, so fragt es sich, in welchem Verhältnis die zugehörige Rente vermindert wird. Beträgt die neue Rente wieder das Dreifache des Zinsfusses, also 10 ½ %, oder geht sie wie der Zins um ½ % zurück, so dass sie sich auf 11 ½ % beläuft, oder liegt der neue Wert zwischen, über oder unter den zwei angegebenen Werten?

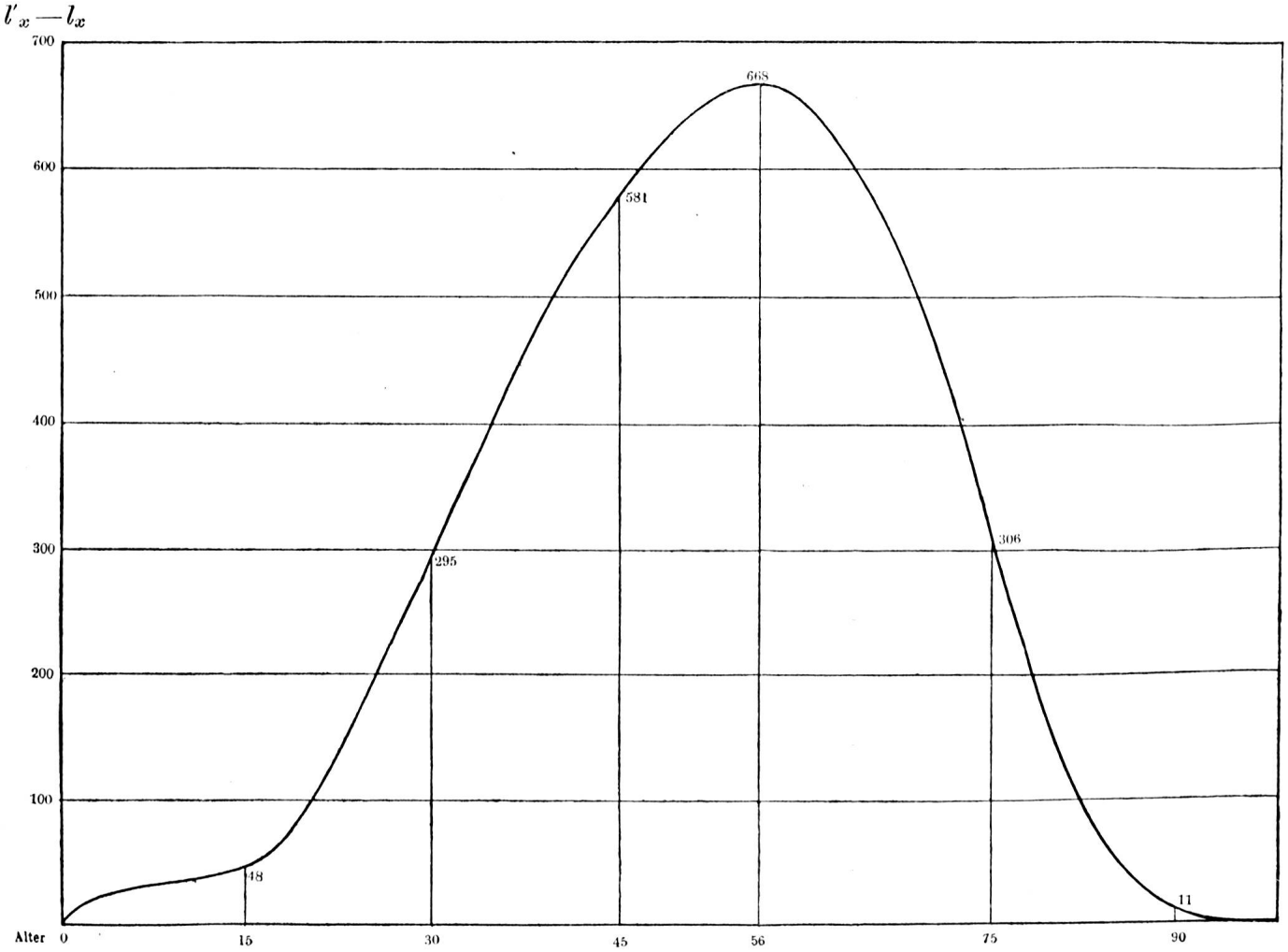
•

Die Fragen beantworten sich zunächst am einfachsten auf empirischem Wege, nämlich an Hand von Beispielen. Wir berechnen die Rentenreihen bei verschiedenem Zinsfusse und bilden die zugehörigen Differenzen. Vergleichen wir nun die Rentendifferenzen mit der Zinsendifferenz, so lassen sich interessante Gesetze feststellen. Das wichtigste derselben ist, dass mit verschwindenden Ausnahmen die Rentendifferenzen kleiner sind als die Zinsendifferenz. Sodann ist ein charakteristischer Unterschied zwischen vor- und nachschussweise zahlbaren Renten. Durchlaufen wir die Alter von oben nach unten, so ist die Differenzenreihe der vorschüssigen Renten klein anfangend und grösser und grösser werdend. Bei nachschüssigen Renten fängt die Reihe hoch an, nimmt allmählich ab, hat an gewisser Stelle ein Minimum und nimmt dann wieder zu.

Mehrbetrag der Zahl der Lebenden $[l'_x - l_x]$ bei Ausschaltung der Lungentuberkulose als Todesursache.

Männliches Geschlecht.

Alter x	Von 10,000 lebendgebornen Knaben überleben das Alter x		
	bei Einschluss der Schwindsuchtsmortalität	bei Ausschluss der Schwindsuchtsmortalität	Differenz $l'_x - l_x$
1	8,180	8,190	10
15	7,299	7,347	48
30	6,624	6,919	295
45	5,578	6,159	581
56	4,471	5,139	668
75	1,416	1,722	306
90	47	58	11

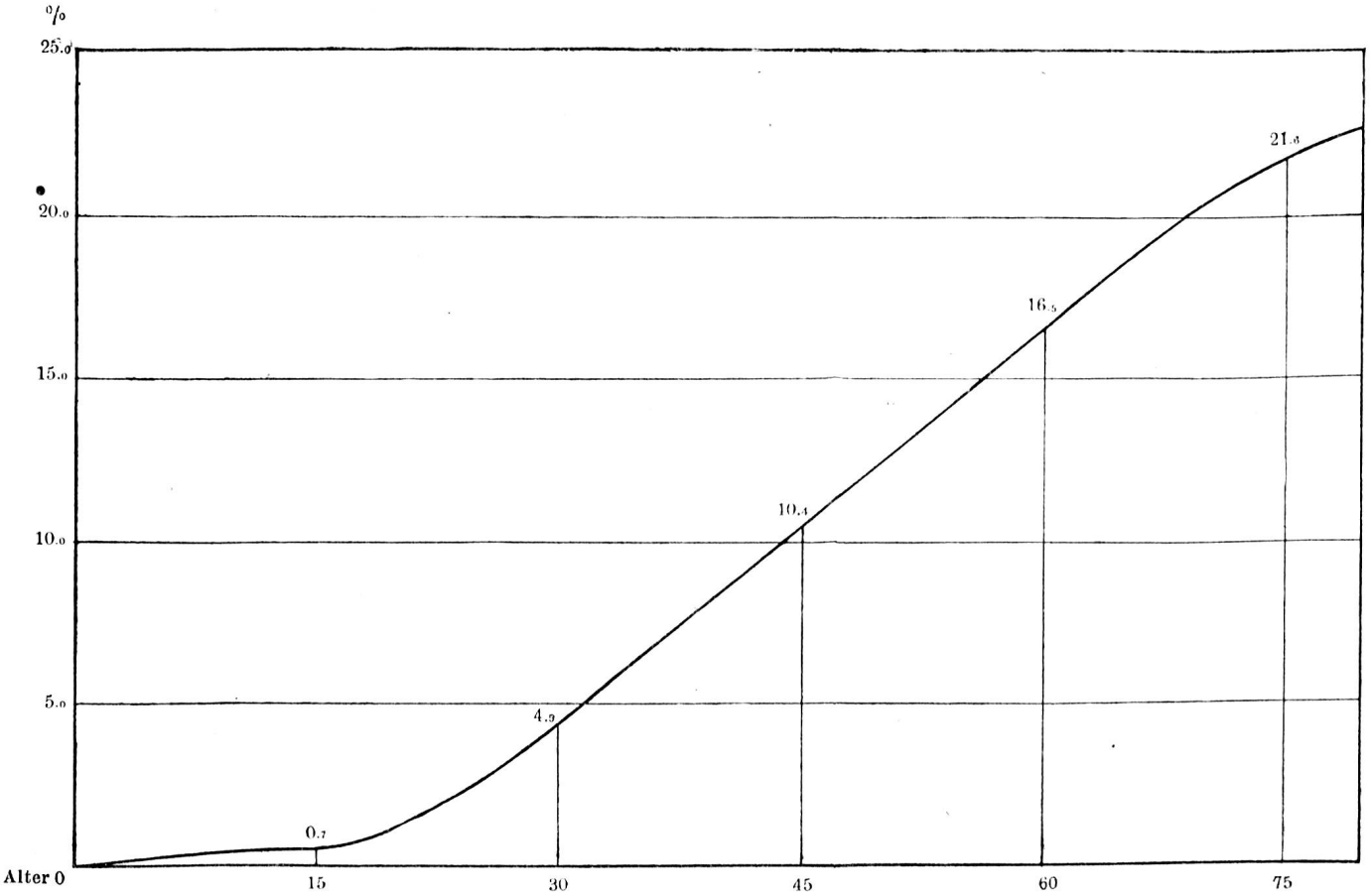


Prozentualer Mehrbetrag der Lebenden bei Ausschaltung der Schwindsuchtssterblichkeit.

Männliches Geschlecht.

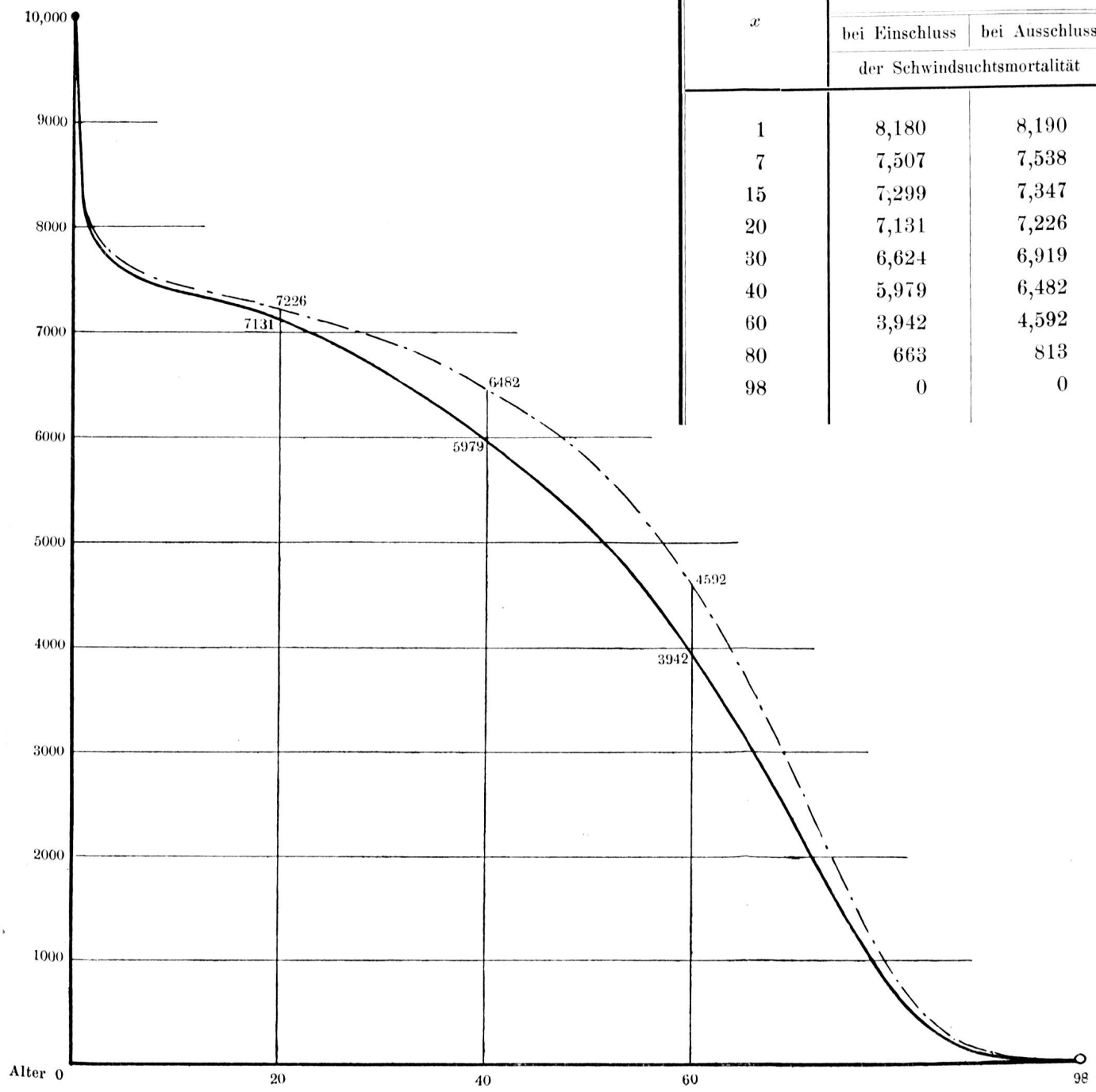
Alter x	Von 10,000 lebendgebornen Knaben überleben das Alter x			
	bei Einschluss der Schwindsuchtsmortalität	bei Ausschluss der Schwindsuchtsmortalität	Differenz absolut	Differenz %
1	8,180	8,190	10	0.1
15	7,299	7,347	48	0.7
30	6,624	6,919	295	4.5
45	5,578	6,159	581	10.4
60	3,942	4,592	650	16.5
75	1,416	1,722	306	21.6

Beispiel: Von 10,000 lebendgebornen Knaben überleben das 45. Altersjahr bei Einschluss der Schwindsuchtsmortalität: 5578; bei Ausschluss der Lugentuberkulose als Todesursache würden 581 oder 10.4 % mehr leben.



Überlebenskurve des männlichen Geschlechts.

——— bei Einschluss, — · — bei Ausschluss der Lungentuberkulose als Todesursache.



Alter x	Von je 10,000 lebendgebornen Knaben überleben das Alter x	
	bei Einschluss der Schwindsuchtsmortalität	bei Ausschluss der Schwindsuchtsmortalität
1	8,180	8,190
7	7,507	7,538
15	7,299	7,347
20	7,131	7,226
30	6,624	6,919
40	5,979	6,482
60	3,942	4,592
80	663	813
98	0	0

Dabei sind die Differenzen der nachschüssigen Renten durchweg grösser als die der vorschüssigen. Das Minimum fällt in die Alter zwischen 45 und 70 Jahren. Da die Kurve ziemlich flach ist, so sind die Differenzen in der Gegend des Minimums oft durch 20 Jahre hindurch nahezu konstant. Die Grundgestalt der Differenzenreihen ist dieselbe, wie auch die Sterbejahrsrentenleistung, die Sterbetafel und der Zinsfuss beschaffen sein mögen. Wenn Sterberente vorgesehen ist, fällt das Minimum zirka 5 Jahre höher als bei Versicherung ohne Rente im Todesjahr. Die dargelegten Gesetze treten bei jeder Sterbetafel auf, also auch dann, wenn dieselbe eine arithmetische Reihe I. Ordnung bildet (Moivresche Hypothese), sowie bei Zeitrenten (Reihe 0ter Ordnung). Je kleiner der Zinsfuss ist, auf ein desto niedrigeres Alter kommt das Minimum zu liegen.

Bei der mathematischen Untersuchung sind drei Alter zu unterscheiden: das Eintrittsalter x, das Endalter der Tafel w ($l_w = 0$) und das Ergänzungsalter oder die Dauer n, die sich definiert durch die Gleichung $n = w - x$. Wir betrachten die zum Kapitale 1 gehörige Zinszahl i (z. B. 0,04), sowie die zur Einlage 1 gehörige Rente U. Die entsprechenden Differenzen sind $\triangle i$ und $\triangle U$. Soll beispielsweise das Grössenverhältnis beider Differenzen untersucht werden, so ist festzustellen, ob $\triangle U < \triangle i$ ist. Vielfach ist es von Vorteil, zur Diskussion der Differenzen die Differentialquotienten beizuziehen und nachzuweisen, ob und wann $\frac{dU}{di} < \frac{di}{di} = 1$ ist.

Des weiteren greifen wir zunächst die auf Grund der Moivreschen Hypothese ($l_x = w - x = n$) berech-

neten Leibrenten, sowie die Zeitrenten heraus. Mit Hülfe geeigneter Potenzreihen gelingt es, das innere Wesen der Rente gewissermassen mit Röntgenstrahlen zu durchleuchten und über zwei wichtige Spezialfälle überraschende Aufschlüsse zu erhalten, die in gewissem Sinne als typisch gelten können. Über Grösse und Richtung der Rentendifferenzen erhalten wir in roher Annäherung die Relationen

$$\triangle U_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{n+1} \triangle i$$

für vorschüssige Leibrenten nach Moivre,

$$\triangle U_x^{(0)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} \triangle i$$

für nachschüssige Leibrenten ohne Sterberente nach Moivre, wobei $n = w - x$. Ebenso lässt sich Ort und Grösse des Minimalwertes bestimmen. Der Minimalwert der Rentendifferenzen beläuft sich bei nachschüssigen Renten ohne Sterbeleistung auf zirka 80 %, bei derselben Form mit voller Rente im Sterbejahr auf zirka 75 % und bei nachschüssigen Zeitrenten auf zirka 60 % der entsprechenden Zinsendifferenz.

Für ganz beliebige gesetzlose Tafeln lassen sich derart spezielle Nachweise nicht erbringen. Doch lässt sich ein interessantes Gesetz feststellen. Die Rentendifferenzen sind nämlich unter der Voraussetzung kleiner als die Zinsendifferenz, dass die Barwerte der Rente 1, d. h. die Werte $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_{x+1}$, $\mathfrak{a}_{x+2}$ . . . mit zunehmendem Alter abnehmen. Ist dies nicht der Fall, hat also die Reihe $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_{x+1}$, $\mathfrak{a}_{x+2}$ . . . irgendwo ein Maximum, dann ist es möglich, dass unterhalb dieser Stelle die Rentendifferenzen grösser sind als die Zinsendifferenz. Es gilt also

$$\triangle U_x < \triangle i$$

$$\text{wenn } \mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_{x+1} > \mathfrak{a}_{x+2} > \ldots$$

Zusammenfassend ist zu bemerken, dass die Rentendifferenzen in der Regel kleiner sind als die Zinsendifferenz. Ausnahmen sind nur möglich am Anfang und Ende der Tafel. Sie müssen vorkommen bei nachschüssigen Renten in den höchsten Altern, also bei Sätzen, die praktisch ohne Wert sind, und sie können vorkommen, wenn am Anfang der Tafel die Sterblichkeit unverhältnismässig gross ist. Dies ist der Fall bei Rentnertafeln in den ersten Lebensjahren und bei Sterbetafeln für Invalide in den Jahren nach Eintritt der Invalidität.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile werden verschiedene Beispiele dargelegt, an denen die bereits ausgesprochenen Gesetze ersichtlich sind. Im zweiten Teile wird der Versuch gemacht, diese Gesetze zu veranschaulichen und zu beweisen. Dies geschieht in zwei Kapiteln. Das erste Kapitel führt vor, was sich aus den Potenzreihen nach der Zinszahl i folgern lässt. Die auf diesem Wege gewonnenen Resultate sind klar und einfach, aber nicht hinlänglich sicher und allgemein gültig. Das zweite Kapitel soll hierin ergänzen und erweitern. Bezüglich der Zeitrenten gelingt es, Beweise in aller Strenge zu erbringen. Bei Leibrenten lässt sich die Bedingung aufstellen, unter welcher das wichtigste Gesetz über das Grössenverhältnis zwischen Zinsendifferenz und Rentendifferenz zur Anwendung kommt. Bezüglich der übrigen Gesetze ist man auf Analogieschlüsse vom speziellen Fall (Moivresche Hypothese) zum allgemeinen Fall (beliebige Tafel) angewiesen.

Die im Anhang gegebenen Reihen zeigen, dass diese Analogieschlüsse richtig sind.

Am Schlusse folgen fünf graphische Darstellungen, welche das Verhalten der Differentialquotientenreihe in der Gegend des Ursprungs ($n = 0$) veranschaulichen. Wir ersetzen hierbei die $\frac{dU}{di}$-Reihe näherungsweise durch die Gleichung $y = f(n)$. Die Untersuchung geschieht mit Hülfe des Signierungsprinzips und des Prinzips der linearen Kombination (Methode von Prof. Dr. C. Reuschle). Hierbei ergeben sich aus der Gleichung zunächst einige Gerade, durch welche die Ebene in verschiedene Zwickel geteilt wird. Diese Zwickel sind für den Durchgang der Kurve abwechslungsweise offen und gesperrt (schraffiert). Die Schnittpunkte der Geraden sind zugleich Schnitt- oder Berührungspunkte der Kurve. Man hat gewissermassen eine Landschaft vor sich mit Bergen und Tälern, und sieht, wie die durchfliessende Kurve eingeengt ist, wo sie Durchbruchstellen hat, ob sie links oder rechts in die Täler einmündet u. s. w. Namentlich wird der charakteristische Unterschied zwischen vor- und nachschüssigen Renten ins Licht gesetzt. Beim Eintritt des Arguments n ins Positive kommt die eine Kurve von unten und die andere von oben her, und diese gewissermassen soziale Verschiedenheit der Geburtsverhältnisse bei gleichen oder ähnlichen Endzielen ist bestimmend für den ganzen Verlauf der Kurve resp. Reihe.

Die ganze Untersuchung bezieht sich auf Nettowerte; ein Verwaltungszuschlag ist nicht in Berücksichtigung gezogen.

Die Leibrente besitzt eine sehr schätzenswerte gute Eigenschaft: sie zeigt eine gewisse Widerstandskraft gegenüber den Veränderungen des Zinsfusses. Herabminderungen des rechnungsmässigen Zinsfusses

kommen nur gedämpft in ihr zum Ausdruck. Wenn beispielsweise der Zinsfuss von 4 % auf 3 ½ % heruntergeht, so vermindert sich das Zinserträgnis aus 100 Fr. Kapital um 50 Ct. oder um 12 ½ %. Die aus 100 Fr. Einlage sich ergebende nachschüssige Leibrente ohne Sterbejahrsrentenleistung geht unter Zugrundelegung der Stuttgarter Rentnertafel von 1855 um folgende Beträge zurück: Eintrittsalter 80 Jahre: 44,6 Ct.; 60 Jahre: 40,7 Ct.; 40 Jahre: 41,2 Ct.; 20 Jahre: 42,8 Ct.; 0 Jahre: 53,7 Ct. In Prozenten beträgt der Rückgang sogar nur: 80 Jahre: 2,02 %; 60 Jahre: 4,24 %; 40 Jahre: 6,26 %; 20 Jahre: 7,84 % und 0 Jahre: 9,07 %.

Es ist schon gesagt worden, das Geld bekomme durch die Berührung mit dem Menschen persönliche Eigenschaften. Man kann es mit einem Ross vergleichen, das die Qualität des Reiters spürt und den einen vorwärts bringt, den andern abwirft. Die Leibrente als die mit dem Leben des Menschen am engsten verknüpfte Geldanlage besitzt einen menschenfreundlichen Zug. Wer Leibrenten kauft, sucht Schutz gegen die Unzulänglichkeit derzeitiger Zinsverhältnisse und gegen allerlei Unannehmlichkeiten, die mit dem Besitze von Wertpapieren verbunden sind. Die Leibrente bleibt nur ihrem Berufe treu, wenn sie sich spröde erweist gegen die Einflüsse der Zinsfussermässigung.

Das verhältnismässige Beharrungsvermögen der Leibrente gestattet einige Folgerungen und Vorhersagungen.

Der Zustand der Erlebensfallversicherung ist kein rosiger; die Rentenversicherung rentiert den Anstalten nicht. Wir befinden uns in einer Periode zunehmender Lebensdauer, was für die Lebensversicherung günstig, für die Rentenversicherung ungünstig ist. Die Rentner

leben vielfach länger und beziehen mehr an Rente, als sie rechnungsmässig sollten. Durch neue, besonders nach Geschlechtern getrennte Tafeln hat man sich allerorten bemüht, diese Hochkonjunktur an Lebenserwartung zu fassen. Nun kann die Lebensdauer nicht unbegrenzt wachsen; unsere Zeit schliesst auch lebenverkürzende Momente genug in sich. Aber ob wir jetzt schon — und namentlich bei Rentnern — auf dem Beharrungszustande angelangt sind, vermag niemand zu sagen. Möglich ist es, dass die Rentner über ihr neuestes Kleid abermals hinauswachsen. Dem möglichen Verlust durch Sterblichkeit kann begegnet werden durch sichern Zinsgewinn. Die Gesellschaften können einen niedern rechnungsmässigen Zinsfuss ansetzen zum Ausgleich gegen etwaige Sterblichkeitsverluste. Eine solche Massregel bietet im allgemeinen mehr Vorteile als Nachteile.

Unsere Zeit zeichnet sich nicht nur durch Zunahme der Lebensdauer, sondern auch durch Zunahme des Wohlstandes aus. Mit der Vermehrung des Kapitals geht eine Verminderung der Rentabilität Hand in Hand. Es dürften noch Zeiten kommen, wo erstklassige Anlagepapiere wesentlich weniger abwerfen als heutzutage. Die sinkende Tendenz des Zinsfusses hat auch ein Sinken der Renten im Gefolge, gelegentlich bemerkt, ohne rückwirkende Kraft für bestehende Versicherungen. Aber der Rückgang der Renten ist absolut und prozentual geringer als der des Zinsfusses, und damit wachsen die Leibrenten an Bedeutung gegenüber sonstigen Geldanlagen. Die verhältnismässige Festigkeit der Renten bei weichendem Zinsfusse eröffnet der Rentenversicherung eine günstige Zukunftsperspektive.

Diese Festigkeit zeigt sich durch alle Altersstufen hindurch. Aber im allgemeinen ist die Einbusse der

kleineren Renten für jüngere Beitrittsalter beträchtlicher als die der grössern Renten für höhere Eintrittsalter. Demzufolge werden jüngere Personen mehr und mehr vom Beitritt in die Rentenversicherung abgehalten. Die alten Klassenrentenanstalten hatten ihre Kundschaft vorwiegend in der Kinderwelt; die Mitglieder der neuen Rentenanstalten sind in der Hauptsache ältere Personen. Die Gesellschaften werden diese Verschiebung, die sich in der Zukunft noch mehr ausprägt, im allgemeinen nicht gerade bedauern. Ihre Hauptform zur Versicherung jüngerer Personen bleibt in der Regel die Lebensversicherung. Aber es gibt auch reine Rentenanstalten, welche die Lebensversicherung nicht pflegen. Wollen dieselben mit jüngern und mittlern Personen nicht ganz aus dem Geschäfte kommen, so müssen sie geeignete Versicherungsformen wählen. Als solche empfehlen sich aufgeschobene Renten, steigende Renten und eventuell Renten in Verbindung mit Invaliditätsversicherung.

1. Teil.

Die Wirkung der Zinsfussermässigung an Beispielen.

§ 1. Vor- und nachschussweise zahlbare Leibrenten bei 4 % und 3½ % Zins, berechnet auf Grund der Stuttgarter Rentnersterbetafel vom Jahre 1855.

Tafel über den Betrag der sofort beginnenden Renten und deren Differenzen aus Fr. 100 Einlage ohne Rückvergütung.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Eintrittsalter x	Distanz bis zum Endalter der Tafel	Betrag der vorschussweise zahlbaren Leibrente			Betrag der nachschussweise zahlbaren Leibrente mit voller Rente im Sterbejahr			ohne Sterbejahrsrentenleistung			mit Rentenrate (Teilrente bis zum Todestage) im Sterbejahr		
		4 % Zins	3½ % Zins	Differenz	4 % Zins	3½ % Zins	Differenz	4 % Zins	3½ % Zins	Differenz	4 % Zins	3½ % Zins	Differenz
Jahre	Jahre	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
95	4	60,181	60,022	*0,159*	62,588	62,122	*0,466*	151,137	150,138	*0,999*	88,519	87,882	*0,637*
90	9	37,142	36,891	*0,251*	38,628	38,182	*0,446*	59,090	58,456	*0,634*	46,717	46,192	*0,525*
85	14	25,601	25,314	*0,287*	26,625	26,200	*0,425*	34,411	33,895	*0,516*	30,022	29,555	*0,467*
80	19	18,082	17,782	*0,300*	18,805	18,405	*0,400*	22,074	21,628	*0,446*	20,309	19,887	*0,422*

75	24	13,694	13,385	*0,309*	14,242	13,853	*0,389*	15,867	15,453	*0,414*	15,010	14,609	*0,401*
70	29	11,183	10,863	*0,320*	11,631	11,243	*0,388*	12,591	12,187	*0,404*	12,092	11,696	*0,396*
65	34	9,659	9,327	*0,332*	10,045	9,654	*0,391*	10,692	10,287	*0,405*	10,359	9,960	*0,399*
60	39	8,600	8,259	*0,341*	8,944	8,548	*0,396*	9,409	9,002	*0,407*	9,171	8,769	*0,402*
55	44	7,785	7,436	*0,349*	8,096	7,697	*0,399*	8,442	8,034	*0,408*	8,266	7,862	*0,404*
50	49	7,119	6,765	*0,354*	7,404	7,002	*0,402*	7,665	7,256	*0,409*	7,532	7,127	*0,405*
45	54	6,587	6,228	*0,359*	6,850	6,446	*0,404*	7,052	6,642	*0,410*	6,949	6,543	*0,406*
40	59	6,170	5,806	*0,364*	6,417	6,010	*0,407*	6,576	6,164	*0,412*	6,496	6,086	*0,410*
35	64	5,844	5,474	*0,370*	6,078	5,666	*0,412*	6,207	5,791	*0,416*	6,142	5,728	*0,414*
30	69	5,582	5,206	*0,376*	5,805	5,388	*0,417*	5,912	5,492	*0,420*	5,858	5,439	*0,419*
25	74	5,366	4,984	*0,382*	5,580	5,158	*0,422*	5,670	5,245	*0,425*	5,625	5,201	*0,424*
20	79	5,179	4,792	*0,387*	5,386	4,960	*0,426*	5,462	5,034	*0,428*	5,424	4,997	*0,427*
15	84	5,004	4,614	*0,390*	5,204	4,775	*0,429*	5,268	4,837	*0,431*	5,236	4,806	*0,430*
10	89	4,844	4,450	*0,394*	5,037	4,606	*0,431*	5,090	4,657	*0,433*	5,064	4,631	*0,433*
5	94	4,747	4,347	*0,400*	4,937	4,499	*0,438*	4,983	4,544	*0,439*	4,960	4,521	*0,439*
0	99	5,591	5,110	*0,481*	5,814	5,289	*0,525*	5,922	5,385	*0,537*	5,868	5,337	*0,531*

§ 2. Ermässigung nachschussweise zahlbarer Leibrenten ohne Sterbejahrsrentenleistung bei Herabsetzung des rechnungsmässigen Zinsfusses von 4 % auf 3½ %, berechnet auf Grund verschiedener Rentnersterbetafeln.

Tafel über den Betrag der Differenzen 4 %iger und 3½ %iger sofort beginnender Leibrenten aus Fr. 100 Einlage ohne Rückvergütung.

1. Alter beim Eintritt	2. Tafel von Deparcieux	3. Tafel der 17 englischen Gesellschaften	4. Tafel der Allgemeinen Rentenanstalt zu Stuttgart vom Jahre 1855	5. Tafel der Preussischen Rentenanstalt von Semmler vom Jahre 1875	6. Tafel der Sächsischen Altersrentenbank vom Jahre 1889	7. Deutsche Rentnersterbetafel für beide Geschlechter	8. Deutsche Rentnersterbetafel für männliche Personen	9. Deutsche Rentnersterbetafel für weibliche Personen	10. Französische Rentnersterbetafel für beide Geschlechter	11. Englische Rentnertafel von 1883 für männliche Personen	12. Englische Rentnertafel von 1883 für weibliche Personen
Jahre	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.	Cts	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.
80	50,2	49,8	44,6	50,1	50,1	48,0	49,8	47,6	50,3	44,6	43,7
75	45,9	46,1	41,4	44,8	44,8	44,2	46,8	44,0	45,3	42,7	41,4
70	43,1	43,8	40,4	42,4	42,4	42,5	43,9	41,5	42,2	41,4	40,2
65	41,1	41,8	40,5	40,8	40,6	40,4	41,2	39,9	40,3	40,3	38,9
60	39,8	40,5	40,7	39,6	39,6	39,5	40,4	38,9	39,2	39,7	38,4
55	39,7	39,8	40,8	38,8	38,9	39,8	39,6	38,6	38,9	39,6	38,5
50	39,7	39,5	40,9	38,9	38,8	38,8	39,4	38,5	38,9	39,9	38,8
45	39,7	39,5	41,0	39,0	39,0	38,8	39,3	38,7	39,2	40,5	39,2
40	39,9	39,8	41,2	39,7	39,5	39,1	39,2	39,1	39,5	41,0	39,9
35	40,5	40,2	41,6	40,4	40,1	39,4	39,1	39,6	40,0	—	—
30	41,5	40,9	42,0	41,1	40,7	40,0	39,7	40,1	40,7	—	—
25	42,3	41,5	42,5	41,9	41,3	40,7	40,8	40,7	41,5	—	—
20	43,1	42,2	42,8	42,6	41,9	—	—	—	42,5	—	—
15	43,6	42,9	43,1	42,9	42,3	—	—	—	43,1	—	—
10	44,0	43,7	43,3	42,9	42,8	—	—	—	—	—	—
5	46,0	44,9	43,9	44,0	43,7	—	—	—	—	—	—
0	—	58,7	53,7	49,0	49,6	—	—	—	—	—	—

§ 3. Vor- und nachschussweise zahlbare Leibrenten bei 4% und 3½% Zins, berechnet auf Grund einer in arithmetischer Reihe erster Ordnung abnehmenden Sterbetafel.

$l_x = 86 - x = n$ (Moivresche Hypothese).

Tafel über den Betrag der sofort beginnenden Renten und Rentendifferenzen aus Fr. 100 Einlage.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Alter beim Eintritt x	Zahl der Lebenden n	Betrag der vorschussweise zahlbaren Leibrente			Betrag der nachschussweise zahlbaren Leibrente								
					mit voller Rente im Sterbejahr			ohne Sterbejahrsrentenleistung			mit Rentenrate (Teilrente bis zum Todestage) im Sterbejahr		
		4% Zins	3½% Zins	Differenz	4% Zins	3½% Zins	Differenz	4% Zins	3½% Zins	Differenz	4% Zins	3½% Zins	Differenz
Jahre	Personen	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr	Fr.	r.	Fr.	Fr.	Fr.
85	1	100,000	100,000	*0,000*	104,000	103,500	*0,500*	—	—	—	208,000	207,000	*1,000*
80	6	30,449	30,218	*0,231*	31,667	31,275	*0,392*	43,781	43,303	*0,478*	36,752	36,319	*0,433*
75	11	18,891	18,613	*0,278*	19,646	19,264	*0,382*	23,291	22,870	*0,421*	21,314	20,913	*0,401*
70	16	14,154	13,852	*0,302*	14,720	14,337	*0,383*	16,487	16,080	*0,407*	15,554	15,158	*0,396*
65	21	11,586	11,268	*0,318*	12,050	11,662	*0,388*	13,105	12,699	*0,406*	12,555	12,159	*0,396*
60	26	9,982	9,651	*0,331*	10,382	9,989	*0,393*	11,089	10,682	*0,407*	10,724	10,324	*0,400*
55	31	8,890	8,548	*0,342*	9,245	8,847	*0,398*	9,757	9,347	*0,410*	9,494	9,090	*0,404*
50	36	8,101	7,749	*0,352*	8,425	8,020	*0,405*	8,815	8,400	*0,415*	8,615	8,206	*0,409*
45	41	7,506	7,146	*0,360*	7,806	7,396	*0,410*	8,115	7,696	*0,419*	7,958	7,543	*0,415*
40	46	7,044	6,676	*0,368*	7,326	6,910	*0,416*	7,578	7,154	*0,424*	7,450	7,030	*0,420*

§ 4. Vor- und nachschussweise für die Dauer von n Jahren zahlbare Zeitrenten bei 4 % und 3½ % Zins.

Tafel über den Betrag der Renten und Rentendifferenzen aus Fr. 100 Einlage.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Dauer der Rentenleistung	Letzte Rente fällig nach	Betrag der vorschussweise zahlbaren Zeitrente			Betrag der nachschussweise zahlbaren Zeitrente		
n Jahre	$n-1$ Jahren	4 % Zins	3½ % Zins	Differenz	4 % Zins	3½ % Zins	Differenz
Jahre	Jahre	Fr.	Fr.	Fr	Fr.	Fr.	Fr.
1	0	100,0000	100,0000	*0,0000*	—	—	—
2	1	50,9803	50,8599	*0,1204*	104,0000	103,5000	*0,5000*
3	2	34,6488	34,4863	*0,1625*	53,0196	52,6400	*0,3796*
4	3	26,4894	26,3044	*0,1850*	36,0348	35,6984	*0,3414*
5	4	21,5987	21,3991	*0,1996*	27,5490	27,2251	*0,3239*
6	5	18,3424	18,1321	*0,2103*	22,4627	22,1481	*0,3146*
7	6	16,0201	15,8014	*0,2187*	19,0761	18,7668	*0,3093*
8	7	14,2815	14,0557	*0,2258*	16,6609	16,3544	*0,3065*
9	8	12,9320	12,7000	*0,2320*	14,8527	14,5476	*0,3051*
10	9	11,8548	11,6175	*0,2373*	13,4492	13,1446	***0,3046***

11	10	10,9758	10,7335	*0,2423*	12,3290	12,0241	*0,3049*
12	11	10,2454	9,9984	*0,2470*	11,4149	11,1091	*0,3058*
13	12	9,6292	9,3779	*0,2513*	10,6552	10,3483	*0,3069*
14	13	9,1027	8,8474	*0,2553*	10,0143	9,7061	*0,3082*
15	14	8,6481	8,3888	*0,2593*	9,4668	9,1570	*0,3098*
20	19	7,0751	6,7981	*0,2770*	7,6138	7,2940	*0,3198*
25	24	6,1549	5,8622	*0,2927*	6,5586	6,2272	*0,3314*
30	29	5,5605	5,2532	*0,3073*	5,8879	5,5445	*0,3434*
35	34	5,1516	4,8307	*0,3209*	5,4314	5,0759	*0,3555*
40	39	4,8580	4,5243	*0,3337*	5,1060	4,7387	*0,3673*
45	44	4,6406	4,2950	*0,3456*	4,8664	4,4877	*0,3787*
50	49	4,4759	4,1191	*0,3568*	4,6857	4,2961	*0,3896*
55	54	4,3491	3,9819	*0,3672*	4,5469	4.1770	*0,3999*
60	59	4,2501	3,8732	*0,3769*	4,4388	4,0293	*0,4095*

§ 5. Ermässigung nachschussweise für die Dauer von n Jahren zahlbarer Zeitrenten bei Herabsetzung des Zinsfusses um ½ %, berechnet unter Zugrundelegung verschiedener Zinsfüsse. Markierung des Minimums der Differenzenreihen.

Tafel über den Betrag der Differenzen 6 %iger, 5½ %iger, 5 %iger, 4½ %iger, 4 %iger, 3½ %iger und 3 %iger Zeitrentensätze aus je Fr. 100 Einlage.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Dauer der Rentenleistung: *n* Jahre	Letzte Rente fällig nach *n*—1 Jahren	Rückgang der Rente bei Ermässigung des Zinsfusses					
		von 6 % auf 5½ %	von 5½ % auf 5 %	von 5 % auf 4½ %	von 4½ % auf 4 %	von 4 % auf 3½ %	von 3½ % auf 3 %
Jahre	Jahre	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.	Cts.
1	0	—	—	—	—	—	—
2	1	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
3	2	38,19	38,13	38,07	38,02	37,96	37,89
4	3	34,56	34,45	34,36	34,24	34,14	34,04
5	4	32,97	32,82	32,68	32,54	32,39	32,24
6	5	32,20	32,01	31,83	31,65	31,46	31,26
7	6	31,84	31,62	31,39	31,16	30,93	30,70
8	7	**31,71**	31,44	31,19	30,91	30,65	30,38
9	8	31,72	**31,42**	**31,12**	30,82	30,51	30,21
10	9	31,83	31,49	31,16	**30,81**	**30,46**	30,12
11	10	32,00	31,63	31,26	30,88	30,49	**30,10**
12	11	32,22	31,82	31,41	30,99	30,58	30,15
13	12	32,48	32,04	31,59	31,14	30,69	30,22
14	13	32,76	32,28	31,81	31,31	30,82	30,32
15	14	33,06	32,55	32,04	31,51	30,98	30,45
16	15	33,37	32,84	32,28	31,73	31,16	30,58

2. Teil.

Mathematische Untersuchungen über die Wirkung der Zinsfussermässigung.

1. Kapitel.

Untersuchung des in eine Reihe nach i entwickelten Differentialquotienten $\frac{dU}{di}$.

§ 6. Darstellung der Einlage a_x als Potenzreihe nach dem Abzinsungsfaktor v.

$$a_x = 1 + \frac{1}{l_x}(l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + l_{x+3}v^3 + \ldots\ldots + l_{w-1}v^{w-x-1}) \tag{1}$$

§ 7. Entwicklung der Einlage a_x in eine Potenzreihe nach der Zinszahl i.

Nach dem binomischen Satze ist

$$v^n = (1+i)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}i + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}i^2 - \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}i^3 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}i^4 - + \ldots$$

Setzt man hierin für n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4 . . ., so erhält man für die aufeinander folgenden Potenzen von v:

$$v = 1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - + \ldots$$
$$v^2 = 1 - 2i + 3i^2 - 4i^3 + 5i^4 - + \ldots$$
$$v^3 = 1 - 3i + 6i^2 - 10i^3 + 15i^4 - + \ldots$$
$$v^s = \binom{s-1}{0} - \binom{s}{1}i + \binom{s+1}{2}i^2 - \binom{s+2}{3}i^3 + \binom{s+3}{4}i^4 - + \ldots$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Potenzreihe (1) im vorigen Paragraphen erhält man nach einigen Umformungen:

$$a_x = 1 + \frac{1}{l_x}(\Sigma\, l_{x+1} - \Sigma^{\mathrm{II}}\, l_{x+1}\, i + \Sigma^{\mathrm{III}}\, l_{x+1}\, i^2 - \\ - \Sigma^{\mathrm{IV}}\, l_{x+1}\, i^3 + - \ldots) \qquad (2)$$

Dabei ist

$$l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + l_{x+4} + \ldots = \Sigma\, l_{x+1} \qquad = \Sigma\, l_{x+1}$$

$$l_{x+1} + 2l_{x+2} + 3l_{x+3} + 4l_{x+4} + \ldots = \\ = \Sigma\, l_{x+1} + \Sigma\, l_{x+2} + \Sigma\, l_{x+3} + \ldots \qquad = \Sigma^{\mathrm{II}}\, l_{x+1}$$

$$l_{x+1} + 3l_{x+2} + 6l_{x+3} + 10l_{x+4} + \ldots = \\ = \Sigma^{\mathrm{II}} l_{x+1} + \Sigma^{\mathrm{II}} l_{x+2} + \Sigma^{\mathrm{II}} l_{x+3} + \ldots \qquad = \Sigma^{\mathrm{III}} l_{x+1}$$

$$\binom{s-1}{0} l_{x+1} + \binom{s}{1} l_{x+2} + \binom{s+1}{2} l_{x+3} + \binom{s+2}{3} l_{x+4} + \ldots = \\ = \Sigma^{s-1} l_{x+1} + \Sigma^{s-1} l_{x+2} + \Sigma^{s-1} l_{x+3} + \ldots \qquad = \Sigma^{s}\, l_{x+1}$$

§ 8. Anwendung auf die Moivresche Hypothese und auf Zeitrenten.

I. Die Summationen der Formel (2) werden besonders einfach, wenn die Zahlen der Lebenden in einer arithmetischen Reihe I. Ordnung abnehmen. Wir setzen nach Moivre $l_x = w - x = n$; $l_{x+1} = w - x - 1 = n - 1$ u. s. w., und erhalten dann

$$l_x = n$$

$$\Sigma\, l_{x+1} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{1} + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = \binom{n}{2}$$

$$\Sigma^{\mathrm{II}}\, l_{x+1} = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \ldots\ldots + 6 + 3 + 1 = \binom{n+1}{3}$$

$$\Sigma^{\mathrm{III}}\, l_{x+1} = \binom{n+1}{3} + \binom{n}{3} + \binom{n-1}{3} + \ldots\ldots + 10 + 4 + 1 = \binom{n+2}{4}$$

$$\Sigma^{s}\, l_{x+1} = \binom{n+s-2}{s} + \binom{n+s-3}{s} + \binom{n+s-4}{s} + \ldots\ldots \\ + \binom{3+s-1}{s} + \binom{2+s-1}{s} + \binom{1+s-1}{s} = \binom{n+s-1}{s+1}$$

Daraus ergibt sich für die nach der Moivreschen Formel gehende Tafel:

$$a_x = \frac{1}{n}\left\{\binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{3} i + \binom{n+2}{4} i^2 - \binom{n+3}{5} i^3 + \ldots\ldots \right. \quad (3)$$
$$\left. (-1)^s \binom{n+s}{s+2} i^s + \ldots\ldots \right\}$$

II. Die Zeitrenten können aufgefasst werden als Leibrenten, bei denen die Tafel eine arithmetische Reihe 0ter Ordnung bildet. Es ist also $l_x = l_{x+1} = l_{x+2} = \ldots\ldots = 1$. Demgemäss erhalten wir:

$$l_x = 1$$

$$\Sigma\, l_{x+1} = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + 1 + 1 = \binom{n-1}{1}$$

$$\Sigma^{\mathrm{II}}\, l_{x+1} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{1} + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = \binom{n}{2}$$

$$\Sigma^{\mathrm{III}}\, l_{x+1} = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \ldots\ldots + 6 + 3 + 1 = \binom{n+1}{3}$$

u. s. w.

Somit ist die Einlage für 1 Fr. Zeitrente, zahlbar erstmals sofort, letztmals nach $n-1$ Jahren:

$$a_{\overline{n}|} = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} i + \binom{n+1}{3} i^2 - \binom{n+2}{4} i^3 + \ldots\ldots \quad (4)$$
$$\ldots\ldots (-1)^s \binom{n+s-1}{s+1} i^s + \ldots\ldots$$

§ 9. Zur Konvergenz vorstehender Potenzreihen.

Die nach dem Abzinsungsfaktor v entwickelte Potenzreihe (1) ist positiv und endlich und damit konvergent.

Dagegen ist die nach der Zinszahl i entwickelte Potenzreihe (2) von wechselndem Vorzeichen und unendlich. In den aufeinander folgenden Gliedern nehmen die Potenzen von i sehr rasch ab, aber gleichzeitig nehmen die zugehörigen Koëffizienten zu. Wir müssen deshalb noch untersuchen, ob und inwieweit die Reihe konvergent ist. Dabei soll die Zinszahl i

gegeben sein und festgestellt werden, für welche Dauer n und welches Beitrittsalter x die Reihe (2) zu gebrauchen ist.

Eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn die aufeinander folgenden Glieder abnehmen, wenn also im vorliegenden Falle

$$\Sigma^{s+1} l_{x+1} i^s < \Sigma^s l_{x+1} i^{s-1} \text{ oder}$$

$$\frac{\Sigma^{s+1} l_{x+1}}{\Sigma^s l_{x+1}} = \frac{\Sigma^s l_{x+1} + \Sigma^s l_{x+2} + \Sigma^s l_{x+3} + \ldots + \Sigma^s {}_{w-1}}{\Sigma^s l_{x+1}} < \frac{1}{i}$$

Nun sind im Zähler des mittleren Bruches die einzelnen Glieder abnehmend.

Es ist also

$$\Sigma^s l_{x+1} + \Sigma^s l_{x+2} + \Sigma^s l_{x+3} + \ldots + \Sigma^s l_{w-1} < (w-x-1) \Sigma^s l_{x+1}$$

und demzufolge

$$\frac{\Sigma^{s+1} l_{x+1}}{\Sigma^s l_{x+1}} < w-x-1 = n-1$$

Die Reihe (2) konvergiert somit unter allen Umständen, wenn

$$(w-x) = n < \frac{1}{i} + 1 = a_{\overline{\infty}|} + 1 \qquad (5)$$

§ 10. Bedeutung vorstehender Potenzreihen.

Der praktische Wert der Reihen (2), (3) und (4) ist mit Rücksicht auf die in (5) gezogene Grenze beschränkt. Setzen wir $i = 0{,}03$, so muss $n < 34$ sein. Nehmen wir demgemäss $w = 100$, so lässt sich die Reihe (2) mit Nutzen nur gebrauchen für die Eintrittsalter von 66 bis zu 100 Jahren und die Reihe (4) für die Dauer von 0 bis zu 34 Jahren. Dabei ist indessen zu bemerken, dass die in (5) gezogene Grenze

etwas zu scharf ist; tatsächlich ist der Konvergenzbereich grösser.

Innerhalb dieses Rahmens kann man nach vorstehenden Formeln ohne technische Hülfsmittel Rentenwerte direkt herstellen. Man erhält hierbei eine Reihe von Näherungswerten, die dem wahren Wert immer näher kommen und die abwechslungsweise über und unter dem richtigen Werte sind. Dafür zwei Beispiele.

1. Beispiel. Einlage für 1 Fr. vorschüssige Rente für das Alter von 70 Jahren nach der deutschen Rentnertafel und 3 % Zins aus Zins. Nach Formel (2) erhält man folgende Näherungswerte:

a_{70} = *a)* 10,1752 *b)* 8,2178 *c)* 8,5585 *d)* 8,5075 *e)* 8,5143 *f)* 8,5135

Auf gewöhnlichem versicherungstechnischem Wege erhält man:

$$a_{70} = 8{,}51356$$

2. Beispiel. Einlage für 1 Fr. vorschüssige Zeitrente für $n = 10$. Erste Rente sofort, letzte nach neun Jahren zahlbar. Zinsfuss 3 %. Nach Formel (4) hat man:

$a_{\overline{10}|}$ = *a)* 10,0000 *b)* 8,6500 *c)* 8,7985 *d)* 8,7851 *e)* 8,7861

Bei direkter Rechnung ergibt sich:

$$a_{\overline{10}|} = 8{,}7861$$

Als spezifischer Vorzug der Reihen (2), (3) und (4) sei erwähnt, dass man aus den gleichen Unterlagen Resultate für verschiedene Zinsfüsse herstellen kann.

Die Hauptbedeutung der Reihen (2), (3) und (4) besteht darin, dass sie einen Einblick in den Bau der Renten gewähren, wie wir im folgenden sehen werden.

§ 11. Die aus 1 Fr. Einlage hervorgehende Rente U in eine Potenzreihe nach der Zinszahl i entwickelt.

I. Aus Formel (3) erhalten wir für die *vorschüssige Leibrente* U_x auf Grund der Moivreschen Hypothese $(w-n=x)$:

$$U_x = \frac{1}{a_x} = \frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}\left\{\frac{2}{3}i + \frac{1}{18}(n-10)i^2 - \right.$$
$$-\frac{1}{270}(n^2+25n-134)i^3 - \frac{1}{3240}(n^3-21n^2-$$
$$\left.-384n+1484)i^4 + + \ldots\right\} \qquad (6)$$

II. Für die *nachschüssige Leibrente ohne Sterbejahrsrentenleistung* ergibt sich:

$$U_x^{(0)} = \frac{1}{a_x - 1} = \frac{2}{n-1} + \frac{n+1}{n-1}\left\{\frac{2}{3}i + \frac{1}{18}(n-2)i^2 - \right.$$
$$-\frac{1}{270}(n-2)(n+7)i^3 - \frac{1}{3240}(n-2)(n^2-13n-$$
$$\left.-50)i^4 + \ldots\right\} \qquad (7)$$

III. *Nachschüssige Leibrente mit voller Sterbejahrsrente:*

$$U_x^{(1)} = \frac{1+i}{a_x} = \frac{2}{n+1} + \frac{n+2}{n+1}\left\{\frac{2}{3}i + \frac{1}{18}(n-1)i^2 - \right.$$
$$\left.-\frac{1}{270}(n-1)(n+8)i^3 + \ldots\right\} \qquad (8)$$

IV. Aus Formel (4) folgt für die *vorschüssige Zeitrente:*

$$U_{\overline{n}|} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\left\{\frac{1}{2}i + \frac{1}{12}(n-5)i^2 - \right.$$
$$-\frac{1}{8}(n-3)i^3 - \frac{1}{720}(n^3+n^2-109n+251)i^4 +$$
$$\left.+\frac{1}{288}(n^3+n^2-49n+95)i^5 + \ldots\right\} \qquad (9)$$

V. Die *nachschüssige Zeitrente* lautet:

$$U_{\overline{n}|}^{(0)} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{2}i + \frac{1}{12}(n-2)i^2 - \right.$$
$$-\frac{1}{24}(n-2)i^3 - \frac{1}{720}(n-2)(n^2-2n-18)i^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{480}(n-2)(n+2)(n-4)i^5 + \ldots\right\} \qquad (10)$$

§ 12. Bedeutung und Verwendung vorstehender Rentenreihen.

I. Praktische Bedeutung haben die Reihen (9) und (10) zur Ermittlung von *Annuitäten.*

Beispiel. Jemand erhält ein Darlehen von Fr. 10,000 unter der Bedingung, dass Kapital und Zinsen in 20 gleichen jährlichen Zahlungen zurückzuerstatten sind. Es wird mit Zins aus Zins gerechnet. Die Zahlung erfolgt erstmals nach 1 Jahr und letztmals nach 20 Jahren. Mit der letzten Zahlung muss die Tilgung des Kapitals vollendet sein.

Wir benützen die auf 1 Fr. Darlehen berechnete Reihe (10) und setzen $n = 21$.

Alsdann ist

$$U_{\overline{21}|}^{(0)} = 0{,}05 + 0{,}525i + 1{,}6625i^2 - 0{,}83125i^3 - 10{,}556875i^4 + 15{,}477083i^5$$

Setzen wir hierin $i = 0{,}03$, so erhalten wir sukzessive folgende Näherungswerte:

a) 0,05 *b)* 0,06 57 5 *c)* 0,06 72 462 *d)* 0,06 72 238 *e)* 0,06 72 153 *f)* 0,06 72 157

Der durch direkte Rechnung gefundene Wert ist 0,06 72 15 707.

Die jährliche Zahlung ist somit Fr. 672. 16.

II. Die Koëffizienten der vorstehenden Potenzreihen schreiten nach keinem erkennbaren Gesetze fort. Die Reihen sind daher für grosse Werte von n nicht zu gebrauchen. Namentlich lässt sich der Grenzwert für $n = \infty$ nicht daraus ermitteln. Dagegen konvergieren die Reihen, wie leicht nachzuweisen (siehe obiges Beispiel), für alle praktisch vorkommenden Werte von n und eignen sich gut zur Diskussion der Differenzen- resp. Differentialquotienten-Kurve.

III. Den Zusammenhang zwischen Zinsendifferenz $\triangle i$ und Rentendifferenz $\triangle U$ erhält man in erster roher Annäherung beispielsweise bei nachschüssiger Leibrente ohne Sterberente (7) wie folgt:

Beim Zinsfuss i ist die Rente $U_x^{(0)} = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} i$

" " i^1 " " " $U_x^{(0)1} = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} i^1$

Durch Subtraktion erhält man hieraus:

$$\triangle U_x^{(0)} = U_x^{(0)} - U_x^{(0)1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} \triangle i$$

IV. In vielen Fällen ist es bequemer, anstatt mit Differenzen mit Differentialquotienten zu rechnen.

Die Ableitung der Rente nach dem Zinse ist:

$$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1}$$

Bei einer Vergleichung der Grösse zwischen $\frac{dU_x^{(0)}}{di}$ und $\frac{di}{di} = 1$ handelt es sich somit um die Untersuchung, ob $\frac{dU_x^{(0)}}{di}$ ein echter Bruch ist.

V. Will man untersuchen, ob und wo die Differentialquotienten-Kurve $\frac{dU_x^{(0)}}{di}$ ein Extremum hat, so muss ein weiteres Glied der Reihe (7) beigezogen werden. Wir gehen aus von der Gleichung:

$$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} + \frac{1}{9} \cdot \frac{n+1}{n-1} (n-2)\, i = \frac{in^2 + (6-i)\, n + 6 - 2i}{9\,(n-1)}$$

Diese Gleichung wird nach n differenziert. Wir erhalten dann

$$\frac{d^2 U_x^{(0)}}{di\, dn} = \frac{in^2 - 2in - 12 + 3i}{9\,(n-1)^2}$$

Der Zähler dieses Bruches, gleich 0 gesetzt, gibt den gesuchten Wert

$$n = 1 \pm \sqrt{\frac{12}{i} - 2}$$

Setzt man hierin beispielweise $i = 0{,}03$, so erhält man $n = 19{,}93$ für das Minimum der Differenzenreihe.

§ 13. Die Differential-Quotienten in rohester Annäherung nebst zugehörigem Minimum.

I. *Vorschüssige Leibrente* nach Moivre:

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{n+1} \qquad (11)$$

Extremum für $n = -1 + \sqrt{-\frac{12}{i} + 22}$ (imaginär für gebräuchliche Zinsfüsse)

II. *Nachschüssige Leibrente ohne Sterberente* nach Moivre:

$$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} \qquad (12)$$

Extremum für $n = 1 \pm \sqrt{\frac{12}{i} - 2}$ (reell)

III. *Nachschüssige Leibrente mit voller Sterbjahrsrente* nach Moivre:

$$\frac{dU_x^{(1)}}{di} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$\text{Extremum für } n = -1 \pm \sqrt{\frac{6}{i} - 2} \text{ (reell)} \tag{13}$$

IV. *Vorschüssige Zeitrente:*

$$\frac{dU_{\overline{n}|}}{di} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$\text{Extremum für } n = \pm \sqrt{-\frac{3}{i} + 5} \text{ (imaginär)} \tag{14}$$

V. *Nachschüssige Zeitrente:*

$$\frac{dU_{\overline{n}|}^{(0)}}{di} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\text{Extremum für } n = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{i} - 1} \text{ (reell)} \tag{15}$$

§ 14. Diskussion der Differenzen-Kurve aus den Näherungswerten des Differential-Quotienten.

I. *Grössenverhältnis* der *Rentendifferenzen* zu den *Zinsdifferenzen.* Die Näherungswerte des § 13 sind für die in der Praxis vorkommenden Werte von n echte Brüche. Daraus folgt, dass die bei Ermässigung des Zinsfusses entstehende Herabminderung der Rentenwerte kleiner ist, als die des Zinses. Es ist

$$\triangle U < \triangle i \text{ oder } \frac{dU}{di} < \frac{di}{di} = 1$$

Eine Ausnahme machen die nachschüssigen Renten für kleinste Werte von n, also für kürzeste Dauer resp. allerhöchste Eintrittsalter.

II. *Richtung* der *Differenzen-Kurve* bei zunehmender Versicherungsdauer n resp. bei abnehmendem Beitrittsalter x. Es besteht ein prinzipieller Unterschied zwischen vor- und nachschüssigen Renten. Die ersteren beginnen mit dem Werte 0 und nehmen mit fortschreitendem n beständig zu; die letzteren dagegen fangen mit dem Werte ∞ oder 1 an, nehmen ab und sind bald kleiner als 1. Grösse und Richtung der Rentendifferentialquotienten-Kurve ersieht man am raschesten aus folgender Übersicht. Der Zinsendifferentialquotient ist hierbei die Einheit.

Dauer	n	1	2	3	4	5	6
Alter	x	$w-1$	$w-2$	$w-3$	$w-4$	$w-5$	$w-6$
Vorschüssige Leibrente	$\frac{dU_x}{di}$	0,000	0,222	0,333	0,400	0,444	0,476
Nachschüssige Leibrente ohne Sterberente	$\frac{dU_x^{(0)}}{di}$	∞	2,000	1,333	1,111	1,000	0,933
Nachschüssige Leibrente mit Sterberente	$\frac{dU_x^{(1)}}{di}$	1,000	0.889	0,833	0,800	0,778	0,762
Vorschüssige Zeitrente	$\frac{dU_{\overline{n}\rceil}}{di}$	0,000	0,250	0,333	0,375	0,400	0,417
Nachschüssige Zeitrente	$\frac{dU_{\overline{n}\rceil}^{(0)}}{di}$	∞	1,000	0,750	0,667	0,625	0,600

III. *Minimum* der Differenzenreihen. Wenn man die gebräuchlichen Werte von i in die hergehörigen Formeln des § 13 einsetzt, so erhält man bei vorschüssigen Renten einen imaginären, bei nachschüssigen einen reellen Wert. Die ersteren haben also kein Extremum, die letzteren besitzen ein solches, das nach Lage der Dinge ein Minimum ist. Die Differenzenreihe der nachschüssigen Rente nimmt also anfangs ab, biegt dann um und nimmt wieder zu. Anbei die Zusammenstellung derjenigen Werte von n, für welche bei gegebenem Zinsfuss ein Minimum auftritt.

Zinsfuss	6 %	5 %	4 %	3 %
Nachschüssige Leibrente ohne Sterberente . .	15,1	16,4	18,3	21,0
Nachschüssige Leibrente mit Sterberente . . .	8,9	9,9	11,2	13,1
Nachschüssige Zeitrente .	8,0	8,7	9,6	10,9

Aus dieser Aufstellung geht hervor, dass das Minimum auf ein um so niedrigeres Eintrittsalter fällt, je niedriger der Zinsfuss ist. Es fällt bei der Leibrente ohne Sterbejahrsrentenleistung auf ein wesentlich niedrigeres Beitrittsalter als bei der Leibrente mit Sterberente. Im allgemeinen fällt es in die gebräuchlichsten Eintrittsalter. Es erübrigt noch, den Wert des Minimums beim Zinsfuss von 3 % festzustellen.

Nachschüssige Leibrente ohne Sterberente . .	$n = 21$	$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = 0{,}797$
Nachschüssige Leibrente mit Sterberente . .	$n = 13$	$\frac{dU_x^{(1)}}{di} = 0{,}754$
Nachschüssige Zeitrente	$n = 11$	$\frac{dU_{\overline{n}}^{(0)}}{di} = 0{,}598$

Daraus folgt, dass die Rentenermässigung an der niedersten Stelle bei nachschüssigen Leibrenten ohne Sterberente zirka 80 %, bei desgl. mit Sterberente zirka 75 % und bei nachschüssigen Zeitrenten zirka 60 % beträgt. Da die Kurve sehr flach ist, so ändert sich dieses prozentuale Verhältnis für zahlreiche Nachbarwerte nicht wesentlich.

IV. *Mängel* der Diskussion. Die bisherigen Untersuchungen geben im allgemeinen einen klaren Durchblick durch die in Frage stehenden Verhältnisse. Sie bedürfen indessen noch einer Ergänzung in dreifacher Beziehung.

a) Wir haben Teile einer Reihe benützt, deren ganzen Verlauf wir nicht kennen. Es bleibt noch übrig, zu untersuchen, ob der geschlossene Ausdruck des Differentialquotienten das bisher Gefundene bestätigt.

b) Sodann ist es auch von Interesse, die Werte des Differentialquotienten für $n = \infty$ zu erfahren. Aus der seitherigen Potenzreihe heraus ist dies nicht möglich.

c) Endlich beziehen sich die Untersuchungen nur auf einen Spezialfall einer Sterbetafel. Es erübrigt noch, zu erforschen, wie sich die Verhältnisse bei einer beliebigen Tafel gestalten.

Aus diesen Gründen folgt noch ein weiteres Kapitel mit ergänzenden Untersuchungen.

---

2. Kapitel.

Untersuchung des Differenzialquotienten $\frac{dU}{di}$ in geschlossener Form.

§ 15. Vorschussweise zahlbare Zeitrente in geschlossener Form.

I. Die Einlage für 1 Fr. Rente lautet:

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} \qquad (16)$$

Daraus ergibt sich als Rente aus 1 Fr. Einlage

$$U_{\overline{n}|} = \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1} = \frac{r^n - r^{n-1}}{r^n - 1} \qquad (17)$$

Für die Ableitung von $U_{\overline{n}|}$ nach i erhalten wir

$$\frac{dU_{\overline{n}|}}{di} = \frac{r^{2n-2} - nr^{n-1} + (n-1)\,r^{n-2}}{(r^n - 1)^2} \tag{18}$$

oder nach Division des Zählers und des Nenners durch $(r-1)^2$

$$\frac{dU_{\overline{n}|}}{di} = \frac{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots + (n-1)\,r^{n-2}}{r^{2n-2} + 2r^{2n-3} + 3r^{2n-4} + \ldots + (n-1)r^n + nr^{n-1} + (n-1)r^{n-2} + \ldots + 3r^2 + 2r + 1} \tag{18a}$$

II. Durch Koëffizientenvergleichung ergibt sich hieraus, dass

$$\frac{dU_{\overline{n}|}}{di} < \frac{di}{di} = 1$$

Damit ist unanfechtbar bewiesen, dass die Rentendifferenz kleiner ist als die Zinsendifferenz.

III. Es bleibt noch der Grenzwert zu untersuchen für $n = \infty$.

Aus (18a) ergibt sich (19)

$$\frac{dU_{\overline{\infty}|}}{di} = \lim. \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots \text{in inf.}}{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots \text{in inf.}} = \frac{1}{r^2}$$

Das Gleiche wird bestätigt aus (16).

$$a_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots \text{in inf.} = \frac{1}{1-v} = \frac{r}{r-1}$$

$$U_{\overline{\infty}|} = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r} \qquad \frac{dU_{\overline{\infty}|}}{di} = \frac{1}{r^2}$$

IV. Das Fortschreiten der Differentialquotienten erkennt man aus folgender Zusammenstellung:

n	Differentialquotient	Näherungswert für $r = 1$
1	$\frac{dU_{\overline{1}|}}{di} = \frac{0}{1}$	$0 = 0{,}000$
2	$\frac{dU_{\overline{2}|}}{di} = \frac{1}{r^2+2r+1}$	$\frac{1}{4} = 0{,}250$

3	$\frac{dU_{\overline{3}\vert}}{di} = \frac{r^2+2r}{r^4+2r^3+3r^2+2r+1}$	$\frac{3}{9} = 0{,}333$
4	$\frac{dU_{\overline{4}\vert}}{di} = \frac{r^4+2r^3+3r^2}{r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1}$	$\frac{6}{16} = 0{,}375$
n	$\frac{dU_{\overline{n}\vert}}{di} =$	$\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$

Diese Resultate decken sich mit § 14, II.

§ 16. Nachschussweise zahlbare Zeitrente in geschlossener Form.

I. Analog der vorhergehenden Entwicklung an vorschüssigen Zeitrenten erhalten wir für die Ableitung der nachschüssigen Zeitrente $U_{\overline{n}\vert}^{(0)}$ nach i

$$\frac{dU_{\overline{n}\vert}^{(0)}}{di} = \frac{r^{2n-2} - nr^{n-1} + (n-1)r^{n-2}}{(r^{n-1}-1)^2} \tag{20}$$

$$\frac{dU_{\overline{n}\vert}^{(0)}}{di} = \frac{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots + (n-1)r^{n-2}}{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots + (n-2)r^{n-1} + (n-1)r^{n-2} + (n-2)r^{n-3} + \ldots + 3r^2 + 2r + 1} \tag{20a}$$

Setzen wir für n spezielle Werte ein, so erhalten wir beispielweise

n	Differentialquotient	Näherungswert für $r = 1$
1	$\frac{dU_{\overline{1}\vert}^{(0)}}{di} = \frac{0}{0}$	allwertig
2	$\frac{dU_{\overline{2}\vert}^{(0)}}{di} = \frac{1}{1}$	$1 = 1{,}000$
3	$\frac{dU_{\overline{3}\vert}^{(0)}}{di} = \frac{r^2+2r}{r^2+2r+1}$	$\frac{3}{4} = 0{,}750$

$$4 \quad \frac{dU_{\overline{4}|}^{(0)}}{di} = \frac{r^4+2r^3+3r^2}{r^4+2r^3+3r^2+2r+1} \qquad \frac{6}{9} = 0{,}667$$

$$5 \quad \frac{dU_{\overline{5}|}^{(0)}}{di} = \frac{r^6+2r^5+3r^4+4r^3}{r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1} \qquad \frac{10}{16} = 0{,}625$$

$$n \quad \frac{dU_{\overline{n}|}^{(0)}}{di} = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\infty \quad \frac{dU_{\overline{\infty}|}^{(0)}}{di} = \lim. \frac{r^{2n-4}+2r^{2n-5}+3r^{2n-6}+\ldots \textit{in inf.}}{r^{2n-4}+2r^{2n-5}+3r^{2n-6}+\ldots \textit{in inf.}} = 1 = 1{,}000 \qquad (21)$$

II. Aus vorstehendem ergibt sich, dass mit Ausnahme des Wertes $n = 1$ der Differentialquotient $\frac{dU^{(0)}}{di}$ ein echter Bruch, also kleiner als $\frac{di}{di}$ ist. Er fängt bei $n = 2$ mit dem Werte 1 an, fällt dann mit fortschreitendem n, erreicht aber schliesslich für $n = \infty$ den Grenzwert 1 wieder. Daran erkennt man, dass derselbe irgendwo umbiegen und ein Minimum haben muss.

Damit sind die in der Einleitung ausgesprochenen Gesetze, soweit es sich um Zeitrenten handelt, bewiesen.

§ 17. Vorarbeiten für Leibrenten in geschlossener Form.

I. Für *vorschussweise* zahlbare Leibrenten haben wir als Barwert der Rente 1 gemäss Gleichung (1)

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{l_x}(l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_{w-2}v^{w-2-x} + l_{w-1}v^{w-1-x})$$

oder nach Erweiterung des Bruches mit r^{n-1} $(n = w - x)$

$$\mathfrak{a}_x = \frac{l_x r^{n-1} + l_{x+1} r^{n-2} + l_{x+2} r^{n-3} + \ldots + l_{w-2} r + l_{w-1}}{l_x r^{n-1}} \qquad (22)$$

Hieraus ergeben sich die Rente aus 1 Fr. Einlage und ihre Ableitung nach i nach gehöriger Reduktion

$$U_x = \frac{l_x r^{n-1}}{l_x r^{n-1} + l_{x+1} r^{n-2} + l_{x+2} r^{n-3} + \ldots + l_{w-2} r + l_{w-1}} \quad (23)$$

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{l_x l_{x+1} r^{2n-4} + 2 l_x l_{x+2} r^{2n-5} + \ldots}{(l_x r^{n-1} + l_{x+1} r^{n-2} + \ldots} \quad (24)$$

$$\frac{+(n-3) l_x l_{w-3} r^n + (n-2) l_x l_{w-2} r^{n-1} + (n-1) l_x l_{w-1} r^{n-2}}{+ l_{w-2} r + l_{w-1})^2}$$

oder in anderer Darstellung nach vollzogener Quadrierung des Nenners

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{A_1 r^{2n-4} + A_2 r^{2n-5} + A_3 r^{2n-6}}{B_1 r^{2n-2} + B_2 r^{2n-3} + B_3 r^{2n-4} +}$$

$$\frac{+ \ldots + A_{n-1} r^{n-2}}{\ldots + B_{n-1} r^n + B_n r^{n-1} + B_{n+1} r^{n-2} + \ldots + B_{2n-2} r + B_{2n-1}} \quad (25)$$

Dabei sind die Werte von A_k definiert durch Gleichung (24), und

$$B_1 = l_x l_x$$
$$B_2 = l_x l_{x+1} + l_{x+1} l_x$$
$$B_3 = l_x l_{x+2} + l_{x+1} l_{x+1} + l_{x+2} l_x$$

. . . . . .

$$B_{2n-2} = l_{w-2} l_{w-1} + l_{w-1} l_{w-2}$$
$$B_{2n-1} = l_{w-1} l_{w-1}$$

II. Für *nachschussweise* zahlbare Leibrenten *ohne Sterberente* erhalten wir auf analoge Weise

$$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = \frac{A_1 r^{2n-4} + A_2 r^{2n-5} + A_3 r^{2n-6} + \ldots}{C_1 r^{2n-4} + C_2 r^{2n-5} + C_3 r^{2n-6} + \ldots} \quad (26)$$

$$\frac{+ A_{n-2} r^{n-1} + A_{n-1} r^{n-2}}{+ C_{n-2} r^{n-1} + C_{n-1} r^{n-2} + C_n r^{n-3} + \ldots + C_{2n-4} r + C_{2n-3}}$$

Hierbei sind die Koëffizienten A_k im Zähler dieselben wie in (25). Im Nenner ist

$$C_1 = l_{x+1}\, l_{x+1}$$
$$C_2 = l_{x+1}\, l_{x+2} + l_{x+2}\, l_{x+1}$$
$$C_3 = l_{x+1}\, l_{x+3} + l_{x+2}\, l_{x+2} + l_{x+3}\, l_{x+1}$$

. . . . . .

$$C_{2n-4} = l_{w-2}\, l_{w-1} + l_{w-1}\, l_{w-2}$$
$$C_{2n-3} = l_{w-1}\, l_{w-1}$$

III. Desgleichen mit *voller Rente* im *Sterbejahr*.

$$\frac{dU_x^{(1)}}{di} = \frac{D_1 r^{2n-2} + D_2 r^{2n-3} + D_3 r^{2n-4} + \ldots + D_{n-1} r^n + D_n r^{n-1}}{B_1 r^{2n-2} + B_2 r^{2n-3} + B_3 r^{2n-4} + \ldots + B_{n-1} r^n + B_n r^{n-1} + B_{n+1} r^{n-2} + \ldots + B_{2n-2} r + B_{2n-1}} \qquad (27)$$

In dieser Gleichung ist der Nenner derselbe wie in (25). Die Koëffizienten des Zählers sind: $D_1 = l_x\, l_x$; $D_2 = 2\, l_x\, l_{x+1}$; $D_3 = 3\, l_x\, l_{x+2}$ u. s. w.

§ 18. Folgerungen für vor- und nachschüssige Leibrenten, die auf Grund der Moivreschen Hypothese berechnet sind.

I. Bei *vorschüssigen* Leibrenten erhalten wir auf Grund der Formel (25) für die aufeinander folgenden Differentialquotienten:

n	Differentialquotient	Näherungswert für $r = 1$
1	$\frac{dU_{85}}{di} = \frac{0}{1}$	$0 = 0{,}000$
2	$\frac{dU_{84}}{di} = \frac{2}{4r^2+4r+1}$	$\frac{2}{9} = 0{,}222$
3	$\frac{dU_{83}}{di} = \frac{6r^2+6r}{9r^4+12r^3+10r^2+4r+1}$	$\frac{12}{36} = 0{,}333$

$$4 \quad \frac{dU_{82}}{di} = \frac{12r^4 + 16r^3 + 12r^2}{16r^6 + 24r^5 + 25r^4 + 20r^3 + 10r^2 + 4r + 1} \qquad \frac{40}{100} = 0{,}400$$

$$5 \quad \frac{dU_{81}}{di} = \frac{20r^6 + 30r^5 + 30r^4 + 20r^3}{25r^8 + 40r^7 + 46r^6 + 44r^5 + 35r^4 + 20r^3 + 10r^2 + 4r + 1} \qquad \frac{100}{225} = 0{,}444$$

$$n \quad \frac{dU_x}{di} = \frac{dU_{86-n}}{di} \qquad \frac{n\binom{n+1}{3}}{\binom{n+1}{2}^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n-1}{n+1} \tag{28}$$

Wir erhalten hier dieselbe steigende Reihe wie in § 14, II, und denselben Nährungswert wie in § 13, Formel (11).

Wollen wir den Grenzwert für $n = \infty$, so müssen wir in (25) die Werte A_k und B_k durch $l_x\, l_x$ dividieren, um Lebenswahrscheinlichkeiten zu erhalten. Bezeichnet man diese Werte mit α_k und β_k, so ist

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{\alpha_1 r^{2n-4} + \alpha_2 r^{2n-5} + \alpha_3 r^{2n-6} + \ldots + \alpha_{n-1} r^{n-2}}{\beta_1 r^{2n-2} + \beta_2 r^{2n-3} + \beta_3 r^{2n-4} + \ldots + \beta_{n-1} r^n + \beta_n r^{n-1} + \beta_{n+1} r^{n-2} + \ldots + \beta_{2n-2} r + \beta_{2n-1}} \tag{25a}$$

Hierbei ist

$$\alpha_1 = \frac{l_{x+1}}{l_x}\,; \quad \alpha_2 = 2\,\frac{l_{x+2}}{l_x}\,; \quad \alpha_3 = 3\,\frac{l_{x+3}}{l_x} \text{ u. s. w.}$$

$$\beta_1 = 1\,; \quad \beta_2 = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x};$$

$$\beta_3 = \frac{l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \text{ u. s. w.}$$

In Anwendung auf die Moivresche Hypothese hat man

$$\alpha_1 = \frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}; \quad \alpha_2 = 2\,\frac{n(n-2)}{n^2} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$\alpha_3 = 3\,\frac{n(n-3)}{n^2} = 3\left(1 - \frac{3}{n}\right) \text{ u. s. w.}$$

$$\beta_1 = \frac{n^2}{n^2} = 1; \quad \beta_2 = \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{(n-1)n}{n^2} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$\beta_3 = \frac{n(n-2)}{n^2} + \frac{(n-1)(n-1)}{n^2} + \frac{(n-2)n}{n^2}$$

$$= 2\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Lässt man hierin n ins Unendliche wachsen, so wird $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 3$ u. s. w. und $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 2$; $\beta_3 = 3$ u. s. w. und es ergibt sich als Grenzwert für $n = \infty$

$$\left.\frac{dU_x}{di}\right|_{n=\infty} = \frac{dU_{w=\infty}}{di} = \frac{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots \text{ in inf.}}{r^{2n-2} + 2r^{2n-3} + 3r^{2n-4} + \ldots \text{ in inf.}}$$

$$= \frac{1}{r^2} = \frac{dU_{\overline{\infty}|}}{di} \tag{29}$$

Die Moivresche Rente hat somit denselben Grenzwert wie die Zeitrente.

II. Bei *nachschussweise* zahlbaren Leibrenten *ohne Sterberente* ist der Näherungswert, wenn $r = 1$ gesetzt wird

$$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = \frac{dU_{86-n}^{(0)}}{di} = \frac{n\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{2}^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1} \tag{30}$$

Der Grenzwert für $n = \infty$ ist

$$\left.\frac{dU_x^{(0)}}{di}\right|_{n=\infty} = \frac{dU_{w=\infty}^{(0)}}{di} = \frac{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots \text{ in inf.}}{r^{2n-4} + 2r^{2n-5} + 3r^{2n-6} + \ldots \text{ in inf.}}$$

$$= \frac{dU_{\overline{\infty}|}^{(0)}}{di} = 1 \tag{31}$$

Setzen wir $n = 1, 2, 3, 4, \ldots \infty$, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{0}{0};\ \frac{2}{1};\ \frac{6r^2+6r}{4r^2+4r+1};\ \frac{12r^4+16r^3+12r^2}{9r^4+12r^3+10r^2+4r+1};\ \ldots 1$$

und näherungsweise für $r = 1$

allwertig; 2; $1^1/_3$; $1^1/_9$; 1; $^{14}/_{15}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{18}{21}$; ... 1

Diese Reihe lässt erkennen, dass irgendwo ein Minimum sein muss.

III. Für *nachschussweise* zahlbare Leibrenten mit *voller Sterbejahrsrente* ist für $r = 1$ der entsprechende Näherungswert

$$\frac{dU_x^{(1)}}{di} = \frac{dU_{86-n}^{(1)}}{di} = \frac{n\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1} \qquad (32)$$

Wird $n = \infty$ gesetzt, so ist der Grenzwert gleich 1 wie in (31).

Für $n = 1, 2, 3, \ldots \infty$ lautet die Reihe

$$\frac{1}{1};\ \frac{4r^2+4r}{4r^2+4r+1};\ \frac{9r^4+12r^3+9r^2}{9r^4+12r^3+10r^2+4r+1};\ \ldots 1$$

oder näherungsweise

$$1;\ \frac{8}{9};\ \frac{5}{6};\ \frac{4}{5};\ \frac{7}{9};\ \ldots 1$$

Auch hier muss ein Minimum auftreten.

§ 19. Vorschüssige Leibrenten nach beliebiger Tafel.

I. Erweitert man in Formel (24) Zähler und Nenner mit $v^{2x+2n-2}$, so ergibt sich nach einfacher Umformung für den Differentialquotienten

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{v \cdot D_x \cdot \Sigma\Sigma D_{x+1}}{\Sigma D_x \cdot \Sigma D_x} \tag{33}$$

woraus nach Division durch D_x

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{v \cdot a_x^I}{a_x \cdot a_x} \tag{34}$$

wo

$$a_x^I = \frac{\Sigma\Sigma D_{x+1}}{D_x} = \frac{1 \cdot D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \ldots}{D_x}$$

d. h. es wird der Barwert der nachschüssigen, mit 1 beginnenden und jährlich um die Einheit steigenden Rente durch das Quadrat des Barwertes der vorschüssigen Rente 1 dividiert und der Quotient um 1 Jahr diskontiert.

Mit Hülfe der Formel (34) lässt sich unabhängig von der Moivreschen Hypothese untersuchen, ob und inwieweit $\frac{dU_x}{di} < \frac{di}{di} = 1$ ist.

II. Bei einer beliebigen Rentnertafel bilden mit Ausnahme der jüngsten Lebensalter die Einlagewerte a_x, a_{x+1}, $a_{x+2} \ldots$ eine mit zunehmendem Alter abnehmende Reihe. Es gilt in diesem Falle die Ungleichung

$$a > a_{x+1} > a_{x+2} > \ldots > a_{w-2} > 1 > 0$$

Daraus folgt

$$a_x \cdot D_x = a_x \cdot D_x$$
$$a_x \cdot D_{x+1} > a_{x+1} \cdot D_{x+1}$$
$$a_x \cdot D_{x+2} > a_{x+2} \cdot D_{x+2}$$

u. s. w.

$$a_x (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) > a_x \cdot D_x + a_{x+1} \cdot D_{x+1} + a_{x+2} \cdot D_{x+2} \ldots$$

oder in kürzerer Schreibweise

$$a_x \cdot \Sigma D_x > \Sigma (a_x \cdot D_x)$$

Nun haben wir aus der Definitionsgleichung der vorschüssigen Rente $\mathfrak{a}_x \cdot D_x = \Sigma D_x$, ebenso $\mathfrak{a}_{x+1} \cdot D_{x+1} = \Sigma D_{x+1}$ u. s. w., daher

$$\mathfrak{a}_x \cdot D_x + \mathfrak{a}_{x+1} \cdot D_{x+1} + \mathfrak{a}_{x+2} \cdot D_{x+2} + \ldots$$
$$= \Sigma D + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots$$

oder zusammengefasst

$$\Sigma (\mathfrak{a}_x \cdot D_x) = \Sigma\Sigma D_x$$

Somit lautet die gefundene Ungleichung in anderer Form; und wenn wir noch berücksichtigen, dass $\Sigma\Sigma D_x > \Sigma\Sigma D_{x+1}$

$$\mathfrak{a}_x \cdot \Sigma D_x > \Sigma\Sigma D_x > \Sigma\Sigma D_{x+1}$$

oder nach Division durch D_x und unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{\Sigma D_x}{D_x} = \mathfrak{a}_x, \quad \frac{\Sigma\Sigma D_x}{D_x} = \frac{1D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \ldots}{D_x} = \mathfrak{a}_x^I$$

und

$$\frac{\Sigma\Sigma D_{x+1}}{D_x} = \frac{1D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \ldots}{D_x} = a_x^I$$

$$\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_x^I > a_x^I \tag{35}$$

Nach Division durch $\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x$ folgt hieraus, da $v = \frac{1}{r} < 1$ ist,

$$1 > \frac{\mathfrak{a}_x^I}{\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x} > \frac{a_x^I}{\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x} > \frac{v \cdot a_x^I}{\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x}$$

Somit ergibt die Gleichung (34)

$$\frac{dU_x}{di} = \frac{v \cdot a_x^I}{\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x} < 1 = \frac{di}{di} \tag{36}$$

wenn $\mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_{x+1} > \mathfrak{a}_{x+2} > \ldots > 1 > 0$ ist.

Solange also die Sterblichkeitsverhältnisse einer gegebenen Tafel derart sind, dass die Einlagewerte für die vorschüssige Rente 1 mit zunehmendem Alter abnehmen, so lange ist die durch Herabsetzung des Zinsfusses entstehende Ermässigung der vorschüssigen Rente aus der Einlage 1 kleiner als die entsprechende Ermässigung des Zinses.

§ 20. Nachschüssige Leibrenten mit voller Sterbejahrsrentenleistung nach beliebiger Tafel.

Nach analoger Entwicklung wie im vorhergehenden Paragraphen erhalten wir

$$\frac{dU_x^{(1)}}{di} = \frac{\mathfrak{a}_x^I}{\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{a}_x} < 1 = \frac{di}{di} \tag{37}$$

wenn $\mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_{x+1} > \mathfrak{a}_{x+2} > \ldots > 1 > 0$ ist.

Auch bei dieser Form ist die Ermässigung der Renten kleiner als die des Zinses, solange die Barwerte $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_{x+1}$, $\mathfrak{a}_{x+2} \ldots$ mit zunehmendem Alter abnehmen. Der Beweis folgt aus der Ungleichung (35).

§ 21. Nachschüssige Leibrenten ohne Sterberente nach beliebiger Tafel.

I. Die Vergleichung des Rentendifferentialquotienten mit dem Zinsendifferentialquotienten gestaltet sich wie folgt:

$$\frac{dU_x^{(0)}}{di} = \frac{v \cdot a_x^I}{a_x \cdot a_x} \left\{ \begin{array}{l} > 1 = \frac{di}{di} \text{ für die höchsten Alter } x \\ < 1 = \frac{di}{di} \text{ für die gebräuchlichen} \\ \quad \text{(hohen, mittleren, niederen) Alter } x \end{array} \right\}$$

wenn $\mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_{x+1} > \mathfrak{a}_{x+2} > \ldots$ ist. (38)

II. Wir haben in § 19 bewiesen, dass der Differentialquotient der vorschüssigen Rente $\frac{dU_x}{di}$ stets ein echter Bruch ist, wenn $\mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_{x+1} > \mathfrak{a}_{x+2}$ u. s. w. ist. Es handelt sich hier darum, zu veranschaulichen, inwieweit diese Schlüsse für die nachschüssige Rente ohne Sterbejahrsrentenleistung nicht zutreffen. Wir setzen wieder voraus, dass $\mathfrak{a}_x > \mathfrak{a}_{x+1} > \mathfrak{a}_{x+2} > \ldots$ und demzufolge $a_x > a_{x+1} > a_{x+2} \ldots$ und machen in ähnlicher Weise wie § 19, Abschnitt II die Aufstellung

$$a_x \cdot D_{x+1} < a_x \cdot D_x = \Sigma D_{x+1}$$

$$a_x \cdot D_{x+2} \lesseqgtr a_{x+1} \cdot D_{x+1} = \Sigma D_{x+2}$$

$$\vdots$$

$$a_x \cdot D_{x+k} > a_{x+k-1} \cdot D_{x+k-1} = \Sigma D_{x+k}$$

$$a_x \cdot D_{x+k+1} > a_{x+k} \cdot D_{x+k} = \Sigma D_{x+k+1}$$

u. s. w.

$$a_x \cdot \Sigma D_{x+1} \lesseqgtr \Sigma (a_x \cdot D_x) = \Sigma\Sigma D_{x+1}$$

woraus nach Division durch D_x folgt

$$a_x \cdot a_x \lesseqgtr a_x^I$$

In obiger Aufstellung sind die ersten Glieder links kleiner als die Glieder rechts. Erst bei Zufügung weiterer Glieder kehrt sich später das Verhältnis um. Ist die Reihe recht klein, also das Alter x recht hoch, so gilt $a_x \cdot a_x < a_x^I$; für die längere Reihe dagegen, also für die gebräuchlichen Alter x, hat man $a_x \cdot a_x > a_x^I$. Daraus folgt die Gleichung (38).

Anhang.

Berechnung und graphische Darstellung des Differentialquotienten $\frac{dU}{di}$.

§ 22. Der Differentialquotient $\frac{dU}{di}$ nach der deutschen Rentnertafel bei 3 % Zins. Markierung des Minimums bei nachschüssigen Renten.

Alter x	Ergänzungs-Alter $n=w-x$	Vorschussweise zahlbare Renten $\frac{dU_x}{di}=\frac{v\cdot a_x^{\mathrm{I}}}{\mathrm{a}_x\cdot\mathrm{a}_x}$	Nachschussweise zahlbare Renten ohne Sterberente $\frac{dU_x^{(0)}}{di}=\frac{v\cdot a_x^{\mathrm{I}}}{a_x\cdot a_x}$	Nachschussweise zahlbare Renten mit voller Sterberente $\frac{dU_x^{(1)}}{di}=\frac{\mathrm{a}_x^{\mathrm{I}}}{\mathrm{a}_x\cdot\mathrm{a}_x}$
95	5	0,37 042	1,73 598	0,91 960
90	10	0,52 146	1,27 364	0,89 724
85	15	0,58 885	1,06 686	0,86 358
80	20	0,62 042	0,94 615	0,82 926
75	25	0,63 814	0,87 698	0,80 426
70	30	0,64 635	0,82 984	0,78 320
65	35	0,64 872	0,79 424	0,76 442
60	40	0,65 103	0,77 087	0,75 157
55	45	0,65 554	0,75 799	0,74 524
52	48			0,74 362
51	49			0,74 344
50	50	0,66 164	0,75 181	**0,74 337**
49	51			0,74 343
48	52			0,74 360
47	53		0,75 040	
46	54		0,75 019	
45	55	0,66 887	**0,75 009**	0,74 463
44	56		0,75 011	
43	57		0,75 027	
42	58		0,75 057	
40	60	0,67 705	0,75 157	0,74 823
35	65	0,68 703	0,75 668	0,75 477
30	70	0,69 876	0,76 494	0,76 396
25	75	0,71 168	0,77 539	0,77 499

§ 23. Der Differentialquotient $\frac{dU}{di}$ nach der Bentzienschen Tafel für Invalide bei 3% Zins. Markierung des Maximums der ${}^{i}a_x$ - Reihe.

Eintritts-Alter x	Ergänzungs-Alter $n = w - x$	Barwert der vorschüssigen Rente 1 ${}^{i}a_x$	Vorschussweise zahlbare Renten $\frac{d\,{}^{i}U_x}{di} = \frac{v \cdot {}^{i}a_x^{\mathrm{I}}}{{}^{i}a_x \cdot {}^{i}a_x}$	Nachschussweise zahlbare Renten ohne Sterberente $\frac{d\,{}^{i}U_x^{(0)}}{di} = \frac{v \cdot {}^{i}a_x^{\mathrm{I}}}{{}^{i}a_x \cdot {}^{i}a_x}$	Nachschussweise zahlbare Renten mit voller Sterberente $\frac{d\,{}^{i}U_x^{(1)}}{di} = \frac{{}^{i}a_x^{\mathrm{I}}}{{}^{i}a_x \cdot {}^{i}a_x}$
95	1	1,000	0,000	—	1,000
90	6	2,469	0,464	1,310	0,883
85	11	3,422	0,578	1,153	0,887
80	16	4,406	0,625	1,047	0,871
75	21	5,648	0,645	0,952	0,841
70	26	7,114	0,654	0,885	0,814
65	31	8,575	0,668	0,856	0,804
60	36	9,896	0,685	0,848	0,807
55	41	10,996	0,708	0,856	0,820
50	46	11,712	0,739	0,884	0,847
45	51	12,091	0,775	0,921	0,881
44	52	12,124			
43	53	12,139			
42	54	**12,145**			
41	55	12,142			
40	56	12,127	0,814	0,967	0,921
35	61	11,903	0,853	1,017	0,963
30	66	11,517	0,888	1,065	1,002
25	71	10,688	0,940	1,144	1,062
20	76	9,429	1,003	1,255	1,139

§ 24. Der Differentialquotient $\frac{dU}{di}$ bei Zeitrenten und 3 % Zins. Verhalten der Reihe im Ursprung, im Unendlichen und bei negativem n.

Dauer n	Vorschüssige Zeitrenten $\frac{d\,U_{n\rceil}}{di}$ Gl. (18)	Nachschüssige Zeitrenten $\frac{d\,U_n^{(0)}}{di}$ Gl. (20)
— 5	0,543	0,388
— 4	0,572	0,377
— 3	0,616	0,357
— 2	0,700	0,320
— 1	0,943	0,243
0	∞	0,000
1/4	— 1,432	— 0,164
1/2	— 0,478	— 0,493
3/4	— 0,160	— 1,481
1	0,000	∞
2	0,243	1,000
3	0,327	0,757
4	0,371	0,680
5	0,399	0,643
6	0,420	0,623
7	0,436	0,612
8	0,449	0,605
9	0,460	0,601
10	0,470	0,5989
11	0,479	0.5983
12	0,488	0,5986
13	0,495	0,600
14	0,502	0,601
15	0,509	0,603
∞	0,943	1,000

§ 25. Verhalten der Kurve $\frac{dU}{di}$ in der Nähe des Ursprungs, dargestellt mit Hülfe des Signierungsprinzips und des Prinzips der linearen Kombination.

I. In vielen Fällen kann mit Hülfe vorstehender Prinzipien der rohe Verlauf einer Kurve rasch und in augenfälliger Weise dargestellt werden. Derartige Kurvendiskussion wird besonders von Dr. *Karl Reuschle,* Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart, gepflegt. Vergleiche auch „Praxis der Kurvendiskussion von Dr. K. Reuschle, Metzlersche Buchhandlung 1886". Über die Methode möge in Kürze folgendes angedeutet werden:

Die Funktion $f(x, y)$ der Kurve $f(x, y) = 0$ ist Null für alle Punkte der Kurve. Für alle übrigen Punkte der Ebene ist die Funktion nicht gleich Null, sondern auf der einen Seite positiv und auf der andern negativ. Danach kann die Kurve signiert werden. — 1. Beispiel: Die Funktion $x^2+y^2-r^2$ des Kreises $x^2+y^2-r^2=0$ ist für den Mittelpunkt (0,0) gleich $-r^2$, d. h. negativ; also negativ für alle Punkte innerhalb, positiv für alle Punkte ausserhalb des Kreises. — 2. Beispiel: Die Funktion $x-1$ der Geraden $x-1=0$ ist für $x > 1$ positiv und für $x < 1$ negativ; also rechts von der Geraden positiv und links negativ.

Sind $f(x, y)=0$ und $g(x, y)=0$ oder kurz $f=0$ und $g=0$ zwei beliebige Kurven, so stellt die durch lineare Kombination beider Gleichungen zu erhaltende Kurve $f+\lambda g=0$ (λ beliebige Konstante) eine Kurve dar, welche geht durch die Schnittpunkte der Kurve $f=0$ mit der Kurve $g=0$. Ebenso bedeutet $fg+\lambda g\psi=0$ eine Kurve durch die Punkte

$$\left\{\begin{matrix} f=0 \\ g=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} f=0 \\ \psi=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} g=0 \\ g=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} g=0 \\ \psi=0 \end{matrix}\right\}.$$

In der Kurve $f + \lambda \varphi^2 = 0$ fallen zwei Werte $\varphi = 0$ zusammen; sie berührt die Kurve $f = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $\varphi = 0$.

II. Für die Diskussion der Differentialquotienten wählen wir die Näherungswerte von § 13. Der Quotient $\frac{dU}{di}$ soll mit y bezeichnet sein. Für die vorschüssige Zeitrente lautet die Gleichung sonach

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Dieselbe muss auf eine λ-Form gebracht werden:

$$ny - \frac{1}{2}(n-1)\omega = 0$$

Hierbei ist $\lambda = \frac{1}{2}$; ω die homogenisierende Veränderliche und $\omega = 0$ die unendlich ferne Gerade.

Ebenso verfährt man bei den übrigen Gleichungen von § 13. Dadurch erhält man die fünf Grundgleichungen für Kurvendiskussion.

$ny - \frac{1}{2}(n-1)\omega = 0$ vorschüssige Zeitrente (39)

$(n-1)y - \frac{1}{2}n\omega = 0$ nachschüssige Zeitrente (40)

$(n+1)y - \frac{2}{3}(n-1)\omega = 0$ vorschüssige Leibrente nach Moivre. (41)

$(n-1)y - \frac{2}{3}(n+1)\omega = 0$ nachschüssige Leibrente nach Moivre ohne Sterberente (42)

$(n+1)y - \frac{2}{3}(n+2)\omega = 0$ desgl. mit voller Rente im Sterbejahr (43)

III. Wir benützen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit n-Axe und y-Axe, und tragen die aus Gleichung (39) sich ergebenden drei Geraden $y = 0$; $n = 0$ und $n = 1$ (d. h. $n - 1 = 0$) auf. Die Funktionen n und $n - 1$ sind rechts von den Geraden $n = 0$ und $n - 1 = 0$ positiv und links von denselben negativ. Die Funktion y ist oberhalb der Geraden $y = 0$ positiv und unterhalb negativ. Durch die drei Geraden erhalten wir sechs Räume. Im Raume oben rechts ist die Signierung durchweg positiv. Es ist nun zu untersuchen, ob die Kurve (39) durch diesen Raum geht. Diese Untersuchung kann durch geeignete Rechnung oder auf mechanische Weise erfolgen. Setzen wir in Gleichung (39) für n, y und $n - 1$ positive Werte ein, so heisst die allgemeine Formel: Positiv minus Positiv gleich Null, was möglich ist. (Positiv plus Positiv gleich Null ginge nicht.) Die Kurve kann also in diesem Zwickel verlaufen, somit im benachbarten nicht, dagegen wieder im übernächsten u. s. w. Alle Zwickel, in denen die Kurve nicht verlaufen kann, werden schraffiert.

Nach dem Prinzip der linearen Kombination könnte die Kurve durch 4 Punkte gehen, nämlich

$$(1)\ \begin{Bmatrix} y = 0 \\ n = 1 \end{Bmatrix};\ (2)\ \begin{Bmatrix} y = 0 \\ \omega = 0 \end{Bmatrix};\ (3)\ \begin{Bmatrix} n = 0 \\ n = 1 \end{Bmatrix};\ (4)\ \begin{Bmatrix} n = 0 \\ \omega = 0 \end{Bmatrix}.$$

Da die Gleichung (39) nur für kleine Werte von n Geltung hat, so scheidet Punkt (2) aus. Punkt (3) und (4) fallen zusammen. Die Kurve (39) geht im Endlichen durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $y = 0$ und $n = 1$ und berührt im Unendlichen die Gerade $n = 0$ im Schnittpunkte mit den zwei Geraden $n - 1 = 0$ (Parallele) und $\omega = 0$ (unendlich ferne Gerade).

In ähnlicher Weise erfolgt die Diskussion der übrigen Gleichungen.

IV. Die folgenden fünf Figuren (S. 176) bringen die Differentialquotientengleichungen (39) bis (43) zur Darstellung. Die zwei ersten beziehen sich auf Zeitrenten, die drei letzten auf Moivresche Leibrenten. Links stehen die zwei vorschüssigen, rechts und unten die drei nachschüssigen Renten. Als Axen gelten die Geraden $n=0$ (y-Axe) und $y=0$ (n-Axe). Die Kurve ist punktiert für negative und kleine Werte von n; für $n>1$ resp. $n>2$ ist sie vollständig gezeichnet. Die Lage der schraffierten Zwickel ist in sämtlichen fünf Figuren ähnlich. Unterschiede liegen in der Art, wie die Kurve von einem Zwickel in den andern übergeht. Jede Figur hat für kleine Werte von n (absolut genommen) einen Schnittpunkt und einen Berührungspunkt. Im Schnittpunkt ist die Funktion $y=0$ und im Berührungspunkt $y=\infty$.

Die Kurve geht durch den Schnittpunkt (1) folgender Geraden:

1. Fig.: $\begin{Bmatrix} y=0 \\ n=1 \end{Bmatrix}$; 2. Fig.: $\begin{Bmatrix} y=0 \\ n=0 \end{Bmatrix}$; 3. Fig.: $\begin{Bmatrix} y=0 \\ n=1 \end{Bmatrix}$;

4. Fig.: $\begin{Bmatrix} y=0 \\ n=-1 \end{Bmatrix}$; 5. Fig.: $\begin{Bmatrix} y=0 \\ n=-2 \end{Bmatrix}$.

Die Kurve berührt im Unendlichen die Geraden (Punkt [2]):

1. Fig.: $n=0$ im Schnitt mit $\begin{Bmatrix} n=1 \\ \omega=0 \end{Bmatrix}$

2. Fig.: $n=1$ „ „ „ $\begin{Bmatrix} n=0 \\ \omega=0 \end{Bmatrix}$

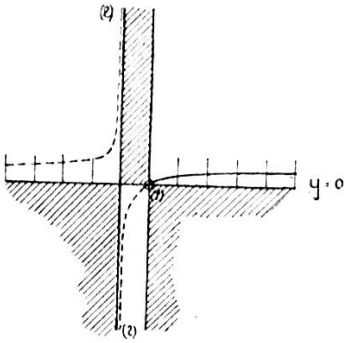
3. Fig.: $n=-1$ „ „ „ $\begin{Bmatrix} n=1 \\ \omega=0 \end{Bmatrix}$

4. Fig.: $n=1$ „ „ „ $\begin{Bmatrix} n=-1 \\ \omega=0 \end{Bmatrix}$

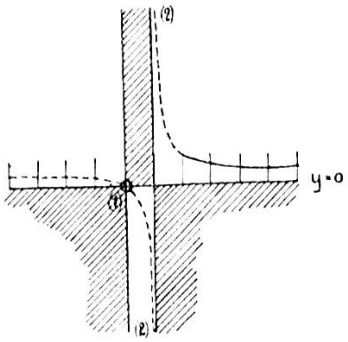
5. Fig.: $n=-1$ „ „ „ $\begin{Bmatrix} n=-2 \\ \omega=0 \end{Bmatrix}$.

V. Wenn das Argument n aus dem Negativen ins Positive übergeht, so nimmt die Funktion $y = f(n)$ einmal den Wert Null und einmal den Wert Unendlich an. Dabei ist ein bemerkenswerter Unterschied zwischen vor- und nachschüssigen Renten. Die Funktion wird bei der vorschüssigen Rente zuerst Unendlich und dann Null; bei der nachschüssigen liegt die Sache umgekehrt. Beim Eintritt ins Positive ist demgemäss die Differentialquotientenreihe im ersten Falle klein anfangend und wachsend, im letzteren gross anfangend und abnehmend.

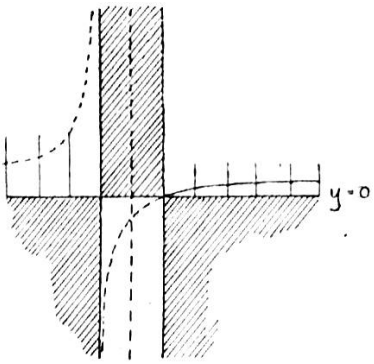
Die vorstehende Abhandlung gehört in das Gebiet der angewandten Mathematik. Wir haben bei verschiedenen Zinsfüssen die zu runden Einlagebeträgen gehörigen Renten nebst zugehörigen Differenzen untersucht. Diese Differenzen sind je nach der Dauer des Rentenlaufs n verschieden und bilden für die aufeinander folgenden Werte von n eine Reihe. Hierbei bedeutet n eine gewisse Anzahl von Jahren und ist somit in diesem Zusammenhang stets positiv. Im letzten Paragraphen nun haben wir die Reihe ersetzt durch eine Gleichung. Wir sind in das Gebiet der reinen Mathematik übergegangen und haben eine stetige Kurve erhalten, die sich auch für kleine und negative Werte von n ermitteln lässt. Damit hat sich uns gewissermassen ein Ausblick hinter die Kulissen eröffnet. Wir haben gesehen, welchen Zwangsverhältnissen die Reihen unterworfen sind, ehe sie in die Erscheinung treten. Diese Betrachtungsweise bietet den Schlüssel zum vollen Verständnis der Kurven und Reihen.



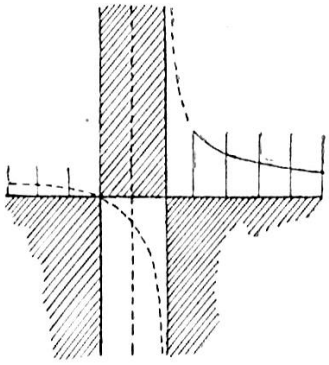
n = 0 n = 1



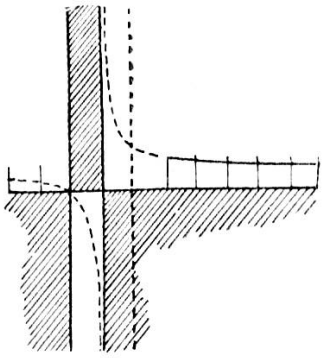
n = 0 n = 1



n = -1 n = 0 n = 1



n = -1 n = 0 n = 1



n = -2 n = -1 n = 0