Die Konstruktion der Durrerschen Sterbetafel

Autor(en): **Steiner-Stooss, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **4 (1909)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555024

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Konstruktion der Durrerschen Sterbetafel.

Von **H. Steiner-Stooss**, Bern.

Die schweizerische Absterbeordnung für die Jahre 1881 bis 1888 stützt sich auf die Kombination der Volkszählungsergebnisse mit den Resultaten der Natalitäts- und Mortalitätsstatistik. Dabei wurden die durch Geburt und Tod erfolgten Veränderungen der Zusammensetzung der Bevölkerung in ihrer zeitlich bestimmten Abgrenzung, dem Kalenderjahr, festgestellt und die Sterbetafel — für jedes Geschlecht getrennt — aus den „Elementarüberlebenswahrscheinlichkeiten“ [1]) abgeleitet, die Berechnung also im wesentlichen nach der *Methode Böckh* durchgeführt.

Der empirische Ausdruck der Sterbenswahrscheinlichkeit für eine Person vom Alter x ist definitionsgemäss

$$q_x = \frac{M_{x|x+1}}{V_x},$$

wo V_x als „erste Hauptgesamtheit von Lebenden“ oder als „Gesamtheit Gleichaltriger“ die Zahl der Personen darstellt, die das Alter von genau x Jahren, oder ihren $(x+1)^{\text{ten}}$ Geburtstag erlebt haben, und $M_{x|x+1}$, als „erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen“, diejenigen aus jener Gesamtheit Gleichaltriger stammenden Individuen umfasst, die innerhalb der Altersgrenzen x bis $x+1$ gestorben sind.

[1]) Blaschke, „Vorlesungen über mathematische Statistik“, S. 97 (Leipzig und Berlin 1906).

Weder die eine noch die andere dieser Gesamtheiten ist aber statistisch direkt erfassbar.

Die Volkszählungsergebnisse beziehen sich auf einen bestimmten Zeitpunkt, den „kritischen Moment der Zählung". Nun erreichen aber die V_x gleichaltrigen Personen die Altersgrenze x nicht zu genau gleicher Zeit, sondern erst nach und nach im Laufe eines Jahres. Eine gewisse Anzahl derselben stirbt sodann nach Überschreitung jener Altersgrenze *vor* dem Zähltermin und kommt daher bei der Zählung nicht zur Aufnahme. Aus den Resultaten einer Volkszählung ist somit nicht ersichtlich, wie viele Personen eines bestimmten Geburtsjahres das Alter von genau x Jahren erreichten. Die aus der Ermittlung des Bevölkerungsstandes nach einzelnen Geburtsjahren sich ergebenden „zweiten Hauptgesamtheiten von Lebenden" oder die „gleichzeitig Lebenden" weichen sowohl ihrer Zahl als auch dem Alter nach von den entsprechenden Gesamtheiten Gleichaltriger ab.

Wird der Bevölkerungsstand auf das Ende oder den Anfang eines Jahres festgestellt — sei es, dass man den kritischen Moment der Zählung auf die Grenze zweier Kalenderjahre (31. Dezember mitternachts/1. Januar 0 Uhr morgens) ansetzt, sei es durch Reduktion der Volkszählungsresultate auf diesen Zeitpunkt — so ergibt sich aus der Geburtszusammensetzung allerdings ohne weiteres auch der Altersaufbau der Bevölkerung, aber mit einem Altersspielraum, der bei Jahresgenerationen eben 1 Jahr umfasst. Jede um Mitternacht des 31. Dezember $(\tau-1)$ lebende Person vom Geburtsjahr $(t-1)$ hat im Laufe des Jahres $(\tau-1)$ ihren Geburtstag überschritten, steht somit am Ende dieses Kalenderjahres im Alter von

$$x = [(\tau-1)-(t-1)] \text{ bis } (x+1) = [(\tau-1)-(t-1)+1],$$

im nächsten Zeitmoment oder am Anfang des folgenden Kalenderjahres τ somit im Alter von

$$x = [\tau - (t-1) - 1] \text{ bis } (x+1) = [\tau - (t-1)]$$

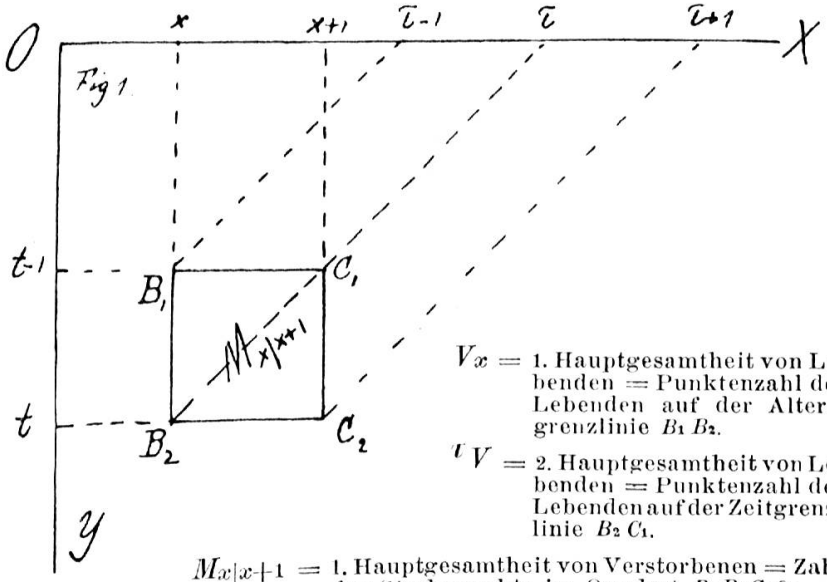
Jahren.

Ebensowenig als die erste Hauptgesamtheit von Lebenden statistisch direkt erfasst werden kann, lässt sich die erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen $M_{x|x+1}$ aus den Ergebnissen der Mortalitätsstatistik eines Kalenderjahres bestimmen; denn die Sterbefälle einer einjährigen Altersklasse verteilen sich, wie nachstehende Figur [1]) zeigt, auf zwei Beobachtungsjahre:

$$(\tau-1) = (x + (t-1)) \text{ bis } \tau = (x+t)$$

und

$$\tau = (x+t) \text{ bis } (\tau+1) = (x+t+1).$$



V_x = 1. Hauptgesamtheit von Lebenden = Punktenzahl der Lebenden auf der Altersgrenzlinie $B_1 B_2$.

${}^{\tau}V$ = 2. Hauptgesamtheit von Lebenden = Punktenzahl der Lebenden auf der Zeitgrenzlinie $B_2 C_1$.

$M_{x|x+1}$ = 1. Hauptgesamtheit von Verstorbenen = Zahl der Sterbepunkte im Quadrat $B_1 B_2 C_2 C_1$.

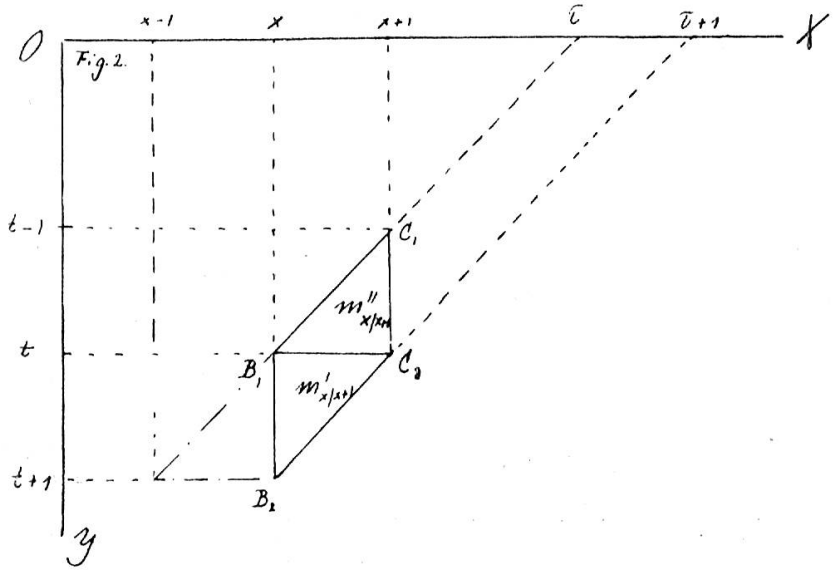
So sind beispielsweise die im 1. Lebensjahre verstorbenen Kinder vom Geburtsjahr 1880 innerhalb des

---

[1]) Nach Czuber: „Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung“, Leipzig 1903.

Zeitraumes vom 1. Januar 1880 bis 1. Januar 1882, also in den Jahren 1880 und 1881 dem Tode zum Opfer gefallen.

Nun ist es aber möglich, durch weitere Differenzierung der Sterbemassen nach Geburts- und *zugleich* nach Altersjahren, Gesamtheiten von Verstorbenen festzustellen, durch deren Verbindung unter sich und mit den gleichzeitig Lebenden sich erste Hauptgesamtheiten von Verstorbenen und erste Hauptgesamtheiten von Lebenden ergeben. Diese auf *ein* Geburtsjahr, *ein* Altersjahr und *ein* Beobachtungjahr sich beziehenden Sterbemassen bezeichnet man nach Lexis[1]) als „Elementargesamtheiten", nach Becker[2]) als „Grundgesamtheiten" von Verstorbenen. Es gibt deren zwei Arten, die sich, wie sie aus der jährlichen Mortalitätsstatistik hervorgehen, durch folgendes Diagramm veranschaulichen lassen:



[1]) Lexis, „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik" (Strassburg 1875).

[2]) Becker, „Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen" (Berlin 1874).

Die Elementargesamtheit von Verstorbenen $m'_{x|x+1}$ oder ${}^{\tau|\tau+1}_{t|t+1}m_{x|x+1}$, dargestellt durch das Dreieck $B_1B_2C_2$, umfasst diejenigen Personen aus dem Geburtsjahr t bis $t+1$, die innerhalb des Beobachtungsjahres τ bis $\tau+1$ *nach erfülltem Alter* x, also innerhalb der Altersgrenzen

$$x = \tau - t$$

bis

$$x+1 = \tau - t + 1$$

gestorben sind.

Die andere Grundgesamtheit von Verstorbenen $m''_{x|x+1}$ oder ${}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}m_{x|x+1}$, dargestellt durch das Dreieck $B_1C_1C_2$, umfasst diejenigen Personen aus dem *vorhergehenden* Geburtsjahr $(t-1)$ bis t, die im Laufe der Beobachtungszeit τ bis $\tau+1$ im Alter von

$$x = \tau - (t-1) - 1$$

bis

$$(x+1) = \tau - (t-1),$$

also *vor Erreichung der Altersgrenze* $(x+1)$ gestorben sind.

Die im Verlaufe des Jahres 1881 im ersten Lebensjahr oder im Alter 0 verstorbenen 8810 Kinder, beispielsweise, stammten aus den Geburtsjahren 1880 und 1881, und zwar 2218 aus dem Jahre 1880 und 6592 aus dem Jahre 1881.

Die Notwendigkeit dieser Unterscheidung der Sterbefälle nach „erfülltem“ und „nicht erfülltem“ Alter oder nach Geburts- und *zugleich* nach Altersjahren wurde schon im Jahre 1867 von G. Meyer[1]) hervorgehoben und im gleichen Jahre von Becker, der diese Trennung der Sterbemassen seit 1861 in der Statistik des Herzogtums Oldenburg praktisch

[1]) G. Meyer, „Die mittlere Lebensdauer“. Hildebrands Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 8, S. 19.

durchführte [1]), eingehend begründet [2]). Nachdem auch Knapp [3]) und Zeuner [4]) in ihren grundlegenden Werken die Bedeutung der verschiedenen Gesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen für die exakte Sterblichkeitsmessung nachgewiesen, fasste der Internationale statistische Kongress im Haag auf Antrag von Baumhauers die Resolution [5]): „Le Congrès se prononce sur la nécessité d'indiquer dans les listes mortuaires non seulement l'*âge*, mais l'*année de naissance* des décédés."

In der Schweiz kam diese Forderung seit Beginn des Jahres 1876, d. h. seit der durch das eidgenössische Zivilstandsgesetz herbeigeführten Zentralisation der Statistik der Bevölkerungsbewegung zur Durchführung [6]).

Aus den Elementargesamtheiten von Verstorbenen zweier Beobachtungsjahre ($t-1|t$ und $t|t+1$), in Verbindung mit der zweiten Hauptgesamtheit von Lebenden ${}^{t}V$, lässt sich nun — von den Wanderungen abgesehen — der Sterbenswahrscheinlichkeitsquotient

$$q_x = \frac{{}_{t-1|t}M_{x|x+1}}{{}_{t-1|t}V_x}$$

leicht ermitteln.

[1]) Statistische Nachrichten über das Grossherzogtum Oldenburg, 9. Heft, I. Teil, Oldenburg 1867. Tabelle XXII, S. 130 ff.

[2]) Ebendaselbst, S. 250 ff.

[3]) Knapp, „Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik", Leipzig 1867.

[4]) Zeuner, „Abhandlungen zur math. Statistik", Leipzig 1869.

[5]) Congrès international de statistique, à la Haye, 7e session, du 6 au 11 septembre 1869. 1re partie: Programme, p. 38. 2e partie: Compte rendu, p. 534.

[6]) Es ist ein bleibendes Verdienst Dr. Kummers, des damaligen Chefs des statistischen Bureaus, den Forderungen der Statistik in jenem Gesetze, dessen Entwurf er auszuarbeiten hatte, in wirksamster Weise Geltung verschafft und die Zivilstandsstatistik in geradezu mustergültiger Weise organisiert zu haben.

Wie aus Figur 1 hervorgeht, ist die durch die Zahl der Sterbepunkte im Quadrat $B_1\,B_2\,C_2\,C_1$ dargestellte erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen gleich der Zahl der Sterbepunkte in den beiden Dreiecken $B_1\,B_2\,C_1$ und $B_2\,C_1\,C_2$ oder gleich der Summe der Elementargesamtheiten derselben Geburts- und Altersklasse:

$$_{t-1|t}M_{x|x+1} = {}^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}m_{x|x+1} + {}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}m_{x|x+1}\,.$$

Ebenso ist die durch die Punktenzahl der Lebenden auf der Altersgrenzlinie $B_1\,B_2$ dargestellte erste Hauptgesamtheit von Lebenden offenbar gleich der durch die Punktenzahl der Lebenden auf der Zeitgrenzlinie $B_2\,C_1$ bestimmten zweiten Hauptgesamtheit von Lebenden, erhöht um die Zahl der Sterbepunkte im Dreieck $B_2\,B_1\,C_1$

$$^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}V = {}^{\tau}_{t-1|t}V + {}^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}m_{x|x+1}$$

oder

$$_{t-1|t}V_x = {}^{\tau-1|\tau}V_x = {}^{\tau}V_{x|x+1} + {}^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}m_{x|x+1}\,,$$

Ganz gleich lassen sich die Beobachtungswerte für die Überlebenswahrscheinlichkeit bilden.

Es ist:

$$p_x = \frac{^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}V}{^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}V} = \frac{^{\tau}_{t-1|t}V - {}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}m_{x|x+1}}{^{\tau}_{t-1|t}V + {}^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}m_{x|x+1}}$$

oder

$$p_x = \frac{^{\tau|\tau+1}V_{x+1}}{^{\tau-1|\tau}V_x} = \frac{^{\tau}V_{x|x+1} - {}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}m_{x|x+1}}{^{\tau}V_{x|x+1} + {}^{\tau-1|\tau}_{t-1|t}m_{x|x+1}}\,.$$

Nach dieser von Becker und Zeuner begründeten Methode ist die Kummersche Sterbetafel [1]) — unter absichtlicher Vernachlässigung der Wanderungen [2]) — berechnet.

Während nun bei dieser Methode die Wahrscheinlichkeitswerte aus den ersten Hauptgesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen, also unter Berücksichtigung von Teilen der Sterblichkeit je *eines* Geburts- und *zweier* Beobachtungsjahre abgeleitet werden, bestimmt sie *Böckh* [3]) aus den Mortalitätsverhältnissen *eines und desselben* Kalenderjahres unter Beiziehung je eines Teiles der Sterbefälle *zweier* Geburtsjahre.

Da, wie Figur 2 zeigt, die Lebenden einer jeden Altersklasse $(x|x+1)$ zwei Geburtsjahren $(t|t+1$ und $t-1|t)$ angehören, so kann die Überlebenswahrscheinlichkeit p_x als *zusammengesetzte* Wahrscheinlichkeit oder als Produkt zweier Elementarwahrscheinlichkeiten betrachtet werden: der Wahrscheinlichkeit p'_x für eine dem Geburtsjahr $(t|t+1)$ angehörige Person vom Alter x, das Beobachtungsjahr $(\tau|\tau+1)$, in welchem sie in jenes Alter trat, zu überleben, und aus der Wahrscheinlichkeit p''_x für eine am Anfang des betreffenden Beobachtungsjahres (also im Zeitpunkt τ) lebende, aber aus dem *vorhergehenden* Geburtsjahr $(t-1|t)$ stammende Person vom Alter $(x|x+1)$, den *nächsten* Geburtstag und damit die Altersgrenze $(x+1)$ zu erreichen.

Die Grundlagen der nach dieser Methode abgeleiteten Durrerschen Sterbetafel sind folgende: Für

---

[1]) Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung, 1876/77 bis 1880/81. Eidg. Volkszählung vom 1. Dez. 1880, II. Bd., S. 192.

[2]) Ebendaselbst, S. IX und X.

[3]) Die Bewegung der Bevölkerung der Stadt Berlin in den Jahren 1869 bis 1878 (Berlin 1884), S. 47 ff.

die Bestimmung der Zahl der vor 1880 geborenen Lebenden (die 90 und mehr Jahre alten Personen ausgenommen) einer bestimmten Generation auf Anfang des Jahres 1881 wurden die Volkszählungsergebnisse vom 1. Dezember 1880 benützt. Die Basis für die Feststellung der Zahl der Lebenden der Geburtsjahre 1880 bis 1888 dagegen, für welche die Zählung nur unsichere oder gar keine Grundlagen bot, ergaben die Resultate der Natalitätsstatistik. Als Zahl der Lebenden vom Geburtsjahre 1880 auf Anfang der Beobachtungsperiode wurde der um eine bestimmte Wanderungsquote reduzierte Geburtenüberschuss dieser Generation eingesetzt. Die Ergebnisse der Volkszählung vom 1. Dezember 1888 wurden ausschliesslich zur Berechnung des Wanderungsüberschusses und (unter Benützung der entsprechenden Sterblichkeitszahlen) zur Bestimmung der 90 und mehr Jahre alten Personen auf den Anfang der einzelnen Beobachtungsjahre beigezogen. Da die im Dezember 1880 und im Dezember 1888 vorgekommenen Sterbefälle für jedes Geschlecht nach den einzelnen Geburtsjahren ausgeschieden worden waren, so konnte die Anfangs- und Endbevölkerung der ganzen Beobachtungsperiode mit völlig genügender Sicherheit festgestellt werden. Die notwendigen Beobachtungswerte der folgenden Kalenderjahre ergaben sich, da die Elementargesamtheiten jedes Jahres festgestellt worden waren — von den Wanderungen abgesehen — durch blosse Fortschreibung.

Aus Figur 2 ist ersichtlich, dass

$$ {}^{t}_{t|t+1}V - {}^{t|t+1}_{t|t+1}m_{x-1|x} = {}^{t|t+1}_{t|t+1}V $$

oder

$$ {}^{t}V_{x-1|x} - {}^{t|t+1}_{t|t+1}m_{x-1|x} = {}^{t|t+1}V_{x}\,, $$

ferner

$$ {}^{\tau|\tau+1}_{t|t+1}V - {}^{\tau|\tau+1}_{t|t+1}m_{x|x+1} = {}^{\tau+1}_{t|t+1}V $$

oder

$$ {}^{\tau|\tau+1}V_x - {}^{\tau|\tau+1}_{t|t+1}m_{x|x+1} = {}^{\tau+1}V_{x|x+1}\,. $$

Ebenso ist

$$ {}^{\tau}_{t-1|t}V - {}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}m_{x|x+1} = {}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}V $$

oder

$$ {}^{\tau}V_{x|x+1} - {}^{\tau|\tau+1}_{t-1|t}m_{x|x+1} = {}^{\tau|\tau+1}V_{x+1}\,. $$

Für $(\tau|\tau+1) = (t|t+1)$ werden selbstverständlich die Grössen

$$ {}^{\tau}_{t|t+1}V \quad \text{und} \quad {}^{\tau|\tau+1}_{t|t+1}m_{x-1|x} $$

zu Null und die Ausgangszahl bildet die erste Gesamtheit von Lebenden

$$ {}^{\tau|\tau+1}_{t|t+1}V, $$

die in diesem Falle gleich ist der Zahl der Lebendgeburten.

Unter Berücksichtigung einer bestimmten positiven oder negativen Wanderungsquote ΘW werden die einzelnen Beobachtungsgrössen, wenn man den Anfang eines Kalenderjahres $(\tau|\tau+1)$ mit τ_α, das Ende mit τ_ω und analog den Anfang eines Geburtsjahres $(t|t+1)$ mit t_α, das Ende mit t_ω bezeichnet, wie folgt modifiziert:

$$ {}^{(\tau-1)_\omega}_{t_{\alpha|\omega}}V - {}_{t_{\alpha|\omega}}\Theta W = {}^{\tau_\alpha}_{t_{\alpha|\omega}}V = {}^{\tau_\alpha}V_{x-1|x}\,, $$

ferner

$$ {}^{\tau\alpha}_{t\alpha|\omega}V - {}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}m_{x-1|x} = {}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}V $$

und

$$ {}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}V - {}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}m_{x|x+1} = {}^{\tau\omega}_{t\alpha|\omega}V $$

oder

$$ {}^{\tau\alpha}V_{x-1|x} - {}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}m_{x-1|x} = {}^{\tau\alpha|\omega}V_x $$

und

$$ {}^{\tau\alpha|\omega}V_x - {}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}m_{x|x+1} = {}^{\tau\omega}V_{x|x+1}\,. $$

Ebenso wird

$$ {}^{(\tau-1)\omega}_{(t-1)\alpha|\omega}V - {}^{(t-1)}_{\alpha|\omega}\Theta W = {}^{\tau\alpha}_{(t-1)\alpha|\omega}V = {}^{\tau\alpha}V_{x|x+1} $$

und

$$ {}^{\tau\alpha}_{(t-1)\alpha|\omega}V - {}^{\tau\alpha|\omega}_{(t-1)\alpha|\omega}m_{x|x+1} = {}^{\tau\alpha|\omega}_{(t-1)\alpha|\omega}V $$

oder

$$ {}^{\tau\alpha}V_{x|x+1} - {}^{\tau\alpha|\omega}_{(t-1)\alpha|\omega}m_{x|x+1} = {}^{\tau\alpha|\omega}V_{x+1}\,. $$

Aus diesen Grössen lassen sich die Elementarwahrscheinlichkeiten p'_x und p''_x ohne weiteres bestimmen. Für das Kalenderjahr ${}^{\tau}_{\alpha|\omega}$ wird:

$$ p'_x = \frac{{}^{\tau\omega}_{t\alpha|\omega}V}{{}^{\tau\alpha|\omega}_{t\alpha|\omega}V} = \frac{{}^{\tau\omega}V_{x|x+1}}{{}^{\tau\alpha|\omega}V_x}\,, $$

$$p''_x = \frac{{}^{\tau}_{\alpha|\omega}V}{{}^{(t-1)}_{\alpha|\omega}V} = \frac{{}^{\tau}_{\alpha|\omega}V_{x+1}}{{}^{\tau}_{\alpha}V_{x|x+1}}.$$

Die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x dagegen kann aus den Beobachtungswerten nicht direkt ermittelt werden; sie ergibt sich aber als Komplement der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p_x = p'_x \cdot p''_x$$

aus der Relation

$$q_x = 1 - p_x .$$

Für das männliche Geschlecht ergibt sich beispielsweise, wenn $\tau = 1881$, $x = 5$ und $t = \tau - x = 1876$ gesetzt wird:

$$p'_5 = \frac{{}^{81}_{\omega}V}{{}^{76}_{\alpha|\omega}V} = \frac{{}^{81}_{\omega}V_{5|6}}{{}^{81}_{\alpha|\omega}V_5} = \frac{32{,}685}{32{,}841} = 0._{99525},$$

$$p''_5 = \frac{{}^{81}_{\alpha|\omega}V}{{}^{75}_{\alpha|\omega}V} = \frac{{}^{81}_{\alpha|\omega}V_6}{{}^{81}_{\alpha}V_{5|6}} = \frac{32{,}143}{32{,}312} = 0._{99477},$$

$$p_5 = 0._{99525} \cdot 0._{99477} = 0._{99004},$$

$$q_5 = 1 - 0._{99004} = 0._{00996}.$$

Auf diese Weise wurde zur vergleichenden Darstellung der Mortalitätsverhältnisse die Sterbenswahrscheinlichkeit eines jeden Alters für die einzelnen Beobachtungsjahre 1881 bis 1888[1]) berechnet.

---

[1]) „Ehe, Geburt und Tod", III. Teil, 1. Hälfte (Schweiz. Statistik, 128. Lieferung), Tab. 10*a*, S. 62.

Während aber Böckh die Überlebens- bezw. Sterbenswahrscheinlichkeiten einer mehrjährigen Periode einfach aus dem arithmetischen Mittel der entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerte der einzelnen Beobachtungsjahre bildet [1]), wurde die schweizerische Absterbeordnung (Tab. 10*a*, Spalte 10) aus den Summen der entsprechenden Beobachtungsgrössen der einzelnen Kalenderjahre direkt abgeleitet. Bezeichnet man mit P'_x die Wahrscheinlichkeit für eine im Laufe der Jahre 1881 bis 1888 ins Alter x getretene Person, das Kalenderjahr, in welchem sie dieses Alter erreichte, zu überleben, und mit P''_x die Wahrscheinlichkeit für eine am Anfang eines der Beobachtungsjahre lebende Person vom Alter $x|x+1$, die Altersgrenze $x+1$ zu erreichen, so ist:

$$P'_x = \frac{\sum\limits_{\tau_\omega=81_\omega}^{\tau_\omega=88_\omega} \tau_\omega V_{x|x+1}}{\sum\limits_{\tau_{\alpha|\omega}=81_{\alpha|\omega}}^{\tau_{\alpha|\omega}=88_{\alpha|\omega}} \tau_{\alpha|\omega} V_x}$$

und

$$P''_x = \frac{\sum\limits_{\tau_{\alpha|\omega}=81_{\alpha|\omega}}^{\tau_{\alpha|\omega}=88_{\alpha|\omega}} \tau_{\alpha|\omega} V_{x+1}}{\sum\limits_{\tau_\alpha=81_\alpha}^{\tau_\alpha=88_\alpha} \tau_\alpha V_{x|x+1}}.$$

[1]) „Die Bewegung der Bevölkerung der Stadt Berlin in den Jahren 1869 bis 1878“, S. X ff.

Das Produkt dieser beiden Grössen P'_x und P''_x stellt die auf den Beobachtungsgrössen der ganzen Periode beruhende Überlebenswahrscheinlichkeit P_x dar, so dass

$$P_x = P'_x \cdot P''_x.$$

Die erhaltenen Werte von P_x wurden dann nach der bekannten abgekürzten Formel von Woolhouse [1])

$$[P_x] = \frac{1}{3}\left\{P_x + \frac{1}{9}\left[8(P_{x-1}+P_{x+1}) + 2(P_{x-2}+P_{x+2}) - (P_{x-4}+P_{x+4})\right]\right\}$$

ausgeglichen [2]).

Das Komplement zu $[P_x]$:

$$[Q_x] = 1 - [P_x]$$

ergibt den ausgeglichenen Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit Q_x [3]).

Über die *Ein-* und *Auswanderung* in den einzelnen Beobachtungsjahren ist nichts bekannt. Nur der Effekt der Wanderungen jeder Generation für die ganze Beobachtungsperiode lässt sich ermitteln. Für die gesamte Bevölkerung ergeben sich folgende Zahlen:

---

[1]) Ableitung derselben s. Schärtlin, „Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung für die Jahre 1876/77—1880/81 und 1880/81. „Zeitschrift für schweiz. Statistik", 1887, S. 332 ff.

[2]) Die Anmerkung (S. 61 der Tafel), nach welcher die Zahlen der Überlebenden der Ausgleichung unterworfen worden wären, ist, wie aus dem Textteil der Publikation („Ehe, Geburt und Tod", III. Teil, 1. Hälfte, S. 31*) hervorgeht, unrichtig.

[3]) Ebendaselbst, S. 60 ff., Spalte 11, und S. 68 ff., Spalte 3.

Volkszählung vom	Ortsanwesende oder faktische Bevölkerung	Zunahme im ganzen	Zu- oder Abnahme durch Überschuss der		Durchschnittl. jährliche Zu- oder Abnahme auf 1000 Einwohner		
			Geburten	Wanderungen	im ganzen	durch Überschuss der	
						Geburten	Wanderungen
1. Dezember 1888 . . .	2,933,334	87,232	173,110	— 85,878	3.8	7.5	— 3.7
1. Dezember 1880 . . .	2,846,102						

Werden die Sterbefälle eines Geburtsjahres $(t|t+1)$ mit ${}_{t|t+1}M$ bezeichnet, so beläuft sich der gesamte Wanderungsüberschuss ${}_{t|t+1}W$ der betreffenden Generation, wenn dieselbe aus der Zeit vor 1880 stammt, auf

$$ {}_{t|t+1}W = {}^{1.\,XII.\,88}_{t|t+1}V + \sum_{1.\,XII.\,80}^{1.\,XII.\,88} {}_{t|t+1}M - {}^{1.\,XII.\,80}_{t|t+1}V. $$

Für spätere Generationen dagegen, für welche die Zahl der Lebendgeburten ${}_{t|t+1}L$ die Ausgangszahl bildet, ergibt sich der Wanderungsüberschuss aus der Gleichung:

$$ {}_{t|t+1}W = {}^{1.\,XII.\,88}_{t|t+1}V + \sum_{1.\,I.\,t}^{1.\,XII.\,88} {}_{t|t+1}M - {}_{t|t+1}L. $$

Ein positiver Wert von ${}_{t|t+1}W$ stellt einen Einwanderungs-, ein negativer Wert von ${}_{t|t+1}W$ dagegen einen Auswanderungsüberschuss dar. Nach diesen Gleichungen wurden die Wanderungsüberschüsse jedes einzelnen Geburtsjahres — die beiden jüngsten und die ältesten Jahrgänge ausgenommen — berechnet. Für die im Jahre 1888 Geborenen und für die Lebenden von 90 und mehr Jahren wurde ein Wanderungsüberschuss überhaupt nicht angenommen und als Wanderungsüberschuss der Gebürtigen vom Jahre 1887 der Durchschnitt des Überschusses der Geburtsklassen 1881/1886 eingesetzt.

Der Gesamtüberschuss jeder Jahresgeneration wurde sodann arithmetisch-proportional zur Zeitdauer, während welcher die betreffende Geburtsklasse unter Beobachtung stand, auf die einzelnen Kalenderjahre verteilt. Diese Verteilung stützt sich auf die doppelte

Annahme, dass die Sterblichkeit der Zu- und Weggezogenen der allgemeinen Mortalität der betreffenden Geburtsklasse entspreche und dass die Wanderungen sich gleichmässig über die ganze Beobachtungsperiode erstrecken. Für irgend eine Geburtsklasse $(t|t+1)$ aus der Zeit *vor* 1881 entfällt demnach auf ein einzelnes Beobachtungsjahr $^1/_8$ des Gesamtwanderungsüberschusses dieser Generation. Diese jährliche Wanderungsquote sei ${}_{t|t+1}^{\tau|\tau+1}w$. Bei gleichmässiger Verteilung der Wanderungen ${}_{t|t+1}^{\tau|\tau+1}w$ über die ganze Jahresstrecke stand jede einzelne ein- oder ausgewanderte Person durchschnittlich die Hälfte des Jahres unter Beobachtung, im Mittel war somit die Hälfte der Eingewanderten ${}_{t|t+1}E$ und die Hälfte der Ausgewanderten ${}_{t|t+1}A$ ein volles Jahr der Sterbensgefahr ausgesetzt. Die Zahl der Lebenden am Anfang des betreffenden Beobachtungsjahres reduziert sich somit unter Berücksichtigung der Wanderungen auf

$$ {}_{t|t+1}^{\tau}V + \frac{1}{2}\left({}_{t|t+1}^{\tau|\tau+1}E\right) - \frac{1}{2}\left({}_{t|t+1}^{\tau|\tau+1}A\right) = {}_{t|t+1}^{\tau}V + \frac{1}{2}\left({}_{t|t+1}^{\tau|\tau+1}w\right). $$

Demgemäss wurde die eine Hälfte der jährlichen Wanderungsquote auf den Anfang des betreffenden, die andere Hälfte dagegen auf den Beginn des folgenden Beobachtungsjahres angesetzt. Auf Anfang der Kalenderjahre 1881 und 1889 wurde somit je $^1/_{16}$, auf den Anfang der Jahre 1882 bis 1888 dagegen je $^1/_8$ des Gesamtwanderungsüberschusses ${}_{t|t+1}W$ in Anrechnung gebracht.

Etwas anders gestaltet sich die Verteilung der Wanderungsüberschüsse der Geburtsklassen 1881 bis

1888. Für diese Jahrgänge musste den Berechnungen, wie schon bemerkt, die Zahl der Lebendgebornen zu Grunde gelegt werden. Unter der Voraussetzung, dass sich die Lebendgeburten gleichmässig über das ganze Jahr verteilen, beläuft sich — von der Sterblichkeit ganz abgesehen — das Durchschnittsalter eines lebendgeborenen Kindes am Ende des Geburtsjahres auf $^1/_2$ Jahr. Dasselbe Durchschnittsalter ergibt sich aber auch, wenn alle Lebendgeburten auf *Jahresmitte* erfolgen würden. Vom durchschnittlichen jährlichen Wanderungsüberschuss einer dieser Geburtsklassen entfällt somit auf das Geburtsjahr selbst nur die Hälfte. Diese verteilt sich gleichmässig von der Jahresmitte, auf welche sämtliche Geburten reduziert wurden, bis zum Jahresende. Auf den Anfang dieses halben Jahres war demnach nur $^1/_4$ in Anrechnung zu bringen. Der zweite Viertel wurde mit der halben Wanderungsquote des folgenden Jahres vereinigt, so dass auf den Anfang des zweiten Beobachtungsjahres $^3/_4$ des jährlichen Überschusses entfallen. Für den Anfang des dritten und der folgenden Kalenderjahre ergibt sich wieder ein voller Jahresüberschuss, während auf Ende der ganzen Periode, resp. auf Anfang 1889, noch die halbe Jahresquote aus der zweiten Hälfte des Kalenderjahres 1888 zu berücksichtigen bleibt.

In schematischer Darstellung gestaltet sich somit die Verteilung wie folgt:

Geburtsjahr t	Beobachtungsdauer in Jahren	Jährliche Wanderungsquote	Verteilung des Gesamtwanderungsüberschusses ${}_{t\|t+1}W$ auf die Ausgangszahl der einzelnen Beobachtungsjahre								
			1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889
1888	$^1/_2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1887	$1^1/_2$	$^2/_3({}_{87}W)$ [1] $= {}_{87}w$	—	—	—	—	—	—	$^1/_4({}_{87}w)$	$^3/_4({}_{87}w)$	$^1/_2({}_{87}w)$
1886	$2^1/_2$	$^2/_5({}_{86}W) = {}_{86}w$	—	—	—	—	—	$^1/_4({}_{86}w)$	$^3/_4({}_{86}w)$	$1({}_{86}w)$	$^1/_2({}_{86}w)$
1885	$3^1/_2$	$^2/_7({}_{85}W) = {}_{85}w$	—	—	—	—	$^1/_4({}_{85}w)$	$^3/_4({}_{85}w)$	$1({}_{85}w)$	$1({}_{85}w)$	$^1/_2({}_{85}w)$
1884	$4^1/_2$	$^2/_9({}_{84}W) = {}_{84}w$	—	—	—	$^1/_4({}_{84}w)$	$^3/_4({}_{84}w)$	$1({}_{84}w)$	$1({}_{84}w)$	$1({}_{84}w)$	$^1/_2({}_{84}w)$
1883	$5^1/_2$	$^2/_{11}({}_{83}W) = {}_{83}w$	—	—	$^1/_4({}_{83}w)$	$^3/_4({}_{83}w)$	$1({}_{83}w)$	$1({}_{83}w)$	$1({}_{83}w)$	$1({}_{83}w)$	$^1/_2({}_{83}w)$
1882	$6^1/_2$	$^2/_{13}({}_{82}W) = {}_{82}w$	—	$^1/_4({}_{82}w)$	$^3/_4({}_{82}w)$	$1({}_{82}w)$	$1({}_{82}w)$	$1({}_{82}w)$	$1({}_{82}w)$	$1({}_{82}w)$	$^1/_2({}_{82}w)$
1881	$7^1/_2$	$^2/_{15}({}_{81}W) = {}_{81}w$	$^1/_4({}_{81}w)$	$^3/_4({}_{81}w)$	$1({}_{81}w)$	$1({}_{81}w)$	$1({}_{81}w)$	$1({}_{81}w)$	$1({}_{81}w)$	$1({}_{81}w)$	$^1/_2({}_{81}w)$
1880	8	$^1/_8({}_{80}W) = {}_{80}w$	$^1/_2({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$1({}_{80}w)$	$^1/_2({}_{80}w)$
1879	8	$^1/_8({}_{79}W) = {}_{79}w$	$^1/_2({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$1({}_{79}w)$	$^1/_2({}_{79}w)$
. .	. .	. . . . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

[1] $${}_{87}W = \frac{{}_{81}W + {}_{82}W + {}_{83}W + {}_{84}W + {}_{85}W + {}_{86}W}{6}$$

Gegen die Durrersche Absterbeordnung können (wenn man von der Ausgleichung absieht, für deren Durchführung aus praktischen Gründen vielleicht die Makehamsche Formel den Vorzug verdient hätte), zwei Einwendungen erhoben werden: die Verteilung der Wanderungsüberschüsse ist eine willkürliche und sodann erscheint es fraglich, ob es zweckmässig war, die komplizierte Methode Böckh für die Bestimmung der Sterblichkeit der *ganzen* Periode anzuwenden [1]).

Was die Wanderungsstörungen anbetrifft, so ist man eben gezwungen, sich mit Annahmen zu behelfen, da die Grundlagen zu einer fortlaufenden statistischen Aufnahme der Wanderungen fehlen. Die Verteilung der Wanderungsüberschüsse lässt sich allerdings umgehen, wenn die notwendigen Beobachtungswerte aus dem arithmetischen Mittel der durch „Vorwärts- und Rückwärtsschreibung" erzielten Grundzahlen gebildet werden [2]). Für die vergleichende jährliche Mortalitätsstatistik (Tab. 10 *a*) können aber die derart bestimmten Bevölkerungszahlen nicht wohl verwertet werden, weil die Anfangs- und Schlussresultate naturgemäss zu sehr von den Volkszählungsergebnissen abweichen. Da sodann gerade für die Darstellung der Sterblichkeitsverhältnisse der einzelnen Jahre die Böckhsche Methode unbedingt den Vorzug verdient [3]), so liegt es nahe, sie

---

[1]) S. von Bortkewitsch, „Sterblichkeit und Sterblichkeitstafeln". Handwörterbuch für Staatswissenschaften, VI. Bd., S. 78 und ff., und 1. Supplementband, S. 736 (Jena 1894, resp. 1895).

[2]) Nach dieser Methode, auf welche mich aufmerksam zu machen Herr Präsident Dr. Blenck die Güte hatte, wurden die Grundzahlen für die neuen preussischen Sterbetafeln festgestellt.

[3]) Vergl. Lexis, „Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik", S. 33 (Jena 1903), und (Kummer) „Die Bewegung der Bevölkerung in der Schweiz im Jahre 1885", S. VIII.

auch der Berechnung der eigentlichen Sterbetafel zu Grunde zu legen. Es könnte dies nur dann beanstandet werden, wenn die so erzielten Wahrscheinlichkeitswerte wesentlich von denjenigen abweichen würden, welche sich bei Anwendung der „theoretisch unanfechtbaren“ [1]) Becker-Zeunerschen Methode ergeben.

Um beurteilen zu können, in welchem Masse die Verteilung der Wanderungsüberschüsse einerseits und die Berechnungsmethode anderseits die Ergebnisse beeinflussen, habe ich die Umrechnung der Tafel für das männliche Geschlecht nach der Becker-Zeunerschen Methode, unter Bestimmung der mittleren Bevölkerungszahlen nach der Methode Blenck, durchgeführt. Wie aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich ist, sind die Abweichungen von der Durrerschen Tafel unerhebliche; ihr Maximum erreicht nicht einmal dasjenige der Differenzen, die durch die Ausgleichung (vergl. Tab. 10*a*, Sp. 10 und 11) bewirkt wurden. Vom praktischen Standpunkte aus ist es daher nebensächlich, ob die eine oder die andere Rechnungsmethode zur Anwendung gelange.

[1]) v. Bortkewitsch, l. c., VI. Bd., S. 77.

Tafel der Sterbenswahrscheinlichkeiten für das männliche Geschlecht nach den Beobachtungen von 1881—1888.

x	Q'_x berechnet nach der Methode Böckh-Durrer[1] (Unausgeglichene Werte)	Q''_x berechnet nach der Methode Becker-Blenck (Unausgeglichene Werte)	$Q'_x - Q''_x$ Absolut	$Q'_x - Q''_x$ In % von Q'_x	x	Q'_x berechnet nach der Methode Böckh-Durrer (Unausgeglichene Werte)	Q''_x berechnet nach der Methode Becker-Blenck (Unausgeglichene Werte)	$Q'_x - Q''_x$ Absolut	$Q'_x - Q''_x$ In % von Q'_x
0	0.18201	0.18347	— 0.00146	— 0.80	30	0.00871	0.00866	0.00005	0.57
1	0.03340	0.03329	0.00011	0.33	31	0.00868	0.00862	0.00006	0.69
2	0.01643	0.01646	— 0.00003	— 0.18	32	0.00946	0.00938	0.00008	0.85
3	0.01255	0.01254	0.00001	0.08	33	0.00952	0.00939	0.00013	1.37
4	0.00968	0.00961	0.00007	0.72	34	0.00995	0.01002	— 0.00007	— 0.70
5	0.00744	0.00729	0.00015	2.02	35	0.01086	0.01079	0.00007	0.64
6	0.00588	0.00592	— 0.00004	— 0.68	36	0.01102	0.01093	0.00009	0.82
7	0.00491	0.00477	0.00014	2.85	37	0.01058	0.01046	0.00012	1.13
8	0.00429	0.00426	0.00003	0.70	38	0.01154	0.01153	0.00001	0.09
9	0.00374	0.00369	0.00005	1.34	39	0.01169	0.01165	0.00004	0.34

10	0.00321	0.00309	0.00012	3.74	40	0.01246	0.01248	— 0.00002	— 0.16
11	0.00313	0.00312	0.00001	0.32	41	0.01348	0.01356	— 0.00008	— 0.59
12	0.00286	0.00287	— 0.00001	— 0.35	42	0.01389	0.01415	— 0.00026	— 1.87
13	0.00293	0.00303	— 0.00010	— 3.41	43	0.01449	0.01434	0.00015	1.04
14	0.00310	0.00314	— 0.00004	— 1.29	44	0.01444	0.01459	— 0.00015	— 1.04
15	0.00338	0.00340	— 0.00002	— 0.59	45	0.01549	0.01562	— 0.00013	— 0.84
16	0.00388	0.00386	0.00002	0.52	46	0.01595	0.01556	0.00039	2.45
17	0.00461	0.00457	0.00004	0.87	47	0.01620	0.01605	0.00015	0.93
18	0.00547	0.00546	0.00001	0.18	48	0.01729	0.01744	— 0.00015	— 0.87
19	0.00601	0.00604	— 0.00003	— 0.50	49	0.01884	0.01897	— 0.00013	— 0.69
20	0.00606	0.00607	— 0.00001	— 0.17	50	0.01961	0.01970	— 0.00009	— 0.46
21	0.00693	0.00691	0.00002	0.29	51	0.02124	0.02109	0.00015	0.71
22	0.00668	0.00658	0.00010	1.50	52	0.02197	0.02191	0.00006	0.27
23	0.00711	0.00696	0.00015	2.11	53	0.02252	0.02250	0.00002	0.09
24	0.00699	0.00688	0.00011	1.57	54	0.02406	0.02409	— 0.00003	— 0.12
25	0.00772	0.00756	0.00016	2.07	55	0.02609	0.02604	0.00005	0.19
26	0.00755	0.00747	0.00008	1.06	56	0.02744	0.02731	0.00013	0.47
27	0.00772	0.00770	0.00002	0.26	57	0.02977	0.02984	— 0.00007	— 0.24
28	0.00821	0.00826	— 0.00005	— 0.61	58	0.03144	0.03125	0.00019	0.60
29	0.00824	0.00823	0.00001	0.12	59	0.03506	0.03476	0.00030	0.86

[1]) „Ehe, Geburt und Tod“, III., 1, Tab. 10*a*, S. 60, Sp. 10.

x	Q'_x berechnet nach der Methode Böckh-Durrer (Unausgeglichene Werte)	Q''_x berechnet nach der Methode Becker-Blenck (Unausgeglichene Werte)	$Q'_x - Q''_x$ Absolut	$Q'_x - Q''_x$ In % von Q'_x	x	Q_x berechnet nach der Methode Böckh-Durrer (Unausgeglichene Werte)	Q''_x berechnet nach der Methode Becker-Blenck (Unausgeglichene Werte)	$Q'_x - Q'_x$ Absolut	$Q'_x - Q'_x$ In % von Q'_x
60	0.03796	0.03816	— 0.00020	— 0.53	75	0.11836	0.11842	— 0.00006	— 0.05
61	0.03836	0.03838	— 0.00002	— 0.05	76	0.13031	0.13112	— 0.00081	— 0.62
62	0.04184	0.04194	— 0.00010	— 0.24	77	0.14086	0.14219	— 0.00133	— 0.94
63	0.04373	0.04411	— 0.00038	— 0.87	78	0.15030	0.14982	0.00048	0.32
64	0.04891	0.04890	0.00001	0.02	79	0.16178	0.16431	— 0.00253	— 1.56
65	0.05267	0.05266	0.00001	0.02	80	0.17621	0.17731	— 0.00110	— 0.62
66	0.05672	0.05666	0.00006	0.11	81	0.18576	0.18609	— 0.00033	— 0.18
67	0.06129	0.06086	0.00043	0.70	82	0.19321	0.19450	— 0.00129	— 0.67
68	0.06603	0.06615	— 0.00012	— 0.18	83	0.20328	0.20565	— 0.00237	— 1.17
69	0.06954	0.06936	0.00018	0.26	84	0.22600	0.22567	0.00033	0.15
70	0.07993	0.08048	— 0.00055	— 0.69	85	0.22729	0.23073	— 0.00344	— 1.51
71	0.08544	0.08537	0.00007	0.08	86	0.24584	0.24035	0.00549	2.23
72	0.09217	0.09225	— 0.00008	— 0.09	87	0.27437	0.27273	0.00164	0.60
73	0.10224	0.10281	— 0.00057	— 0.56	88	0.28310	0.29167	— 0.00857	— 3.03
74	0.10913	0.10914	— 0.00001	— 0.01	89	0.31039	0.30938	0.00101	0.33