Über partielle Ausgleichung mittelst Orthogonalfunktionen

Autor(en): **Gram, J.P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **10 (1915)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967464

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über partielle Ausgleichung mittelst Orthogonalfunktionen.

Von Dr. **J. P. Gram** in Kopenhagen.

Der Zweck dieses kleinen Aufsatzes ist die Darstellung eines neuen Ausgleichungsverfahrens, welches ich mit dem Namen *partielle Ausgleichung* bezeichne. Das Prinzip derselben besteht darin, dass man

1. die vorgelegte Beobachtungsreihe in kleinere Stücke zerschneidet,
2. für jedes Stück eine besondere analytische Ausgleichung vornimmt, und
3. nachher die ausgeglichenen Kurven wieder verknüpft.

Der Vorteil dieser Methode beruht darauf, dass man bei der partiellen Ausgleichung auf die besonderen Eigentümlichkeiten der einzelnen Teile der Beobachtungsreihe in ebenso voller Weise wie bei der graphischen Methode Rücksicht nehmen kann, dass ferner — wie unten gezeigt werden soll — die rechnerische Arbeit ebenso einfach ist wie bei der mechanischen Ausgleichung, während jedoch die Kontinuität gesichert wird, nur mit Ausnahme der Punkte, wo die Verknüpfungen stattfinden müssen. In der Reduktion der Diskontinuitäten in diesen Punkten liegt die Hauptschwierigkeit der Methode.

I.

Es wird vorausgesetzt, dass für eine Reihe von äquidistanten Argumenten (x) entsprechende Beobachtungswerte o_x vorliegen, welche durch eine kontinuierliche Funktion ausgeglichen werden sollen. Ferner wird angenommen, dass diese Reihe in solche Stücke (z. B. in Teile von 10 bis 20) zerlegt worden ist, dass die betreffende Funktion in jedem Intervalle sich durch eine parabolische Formel

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad (1)$$

von wenigen Gliedern mit hinreichender Annäherung darstellen lässt. Und endlich nehmen wir an, um die Sache zu vereinfachen, dass in jedem Stück, für sich genommen, allen Beobachtungen dasselbe Gewicht beigelegt werden darf. Unter diesen Voraussetzungen wird die Ausgleichung jedes Partialteiles sich sehr leicht vornehmen lassen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, wenn diese in eine besondere Form gebracht wird.

Um gemäss dieser Methode die Beobachtungen (o_x) durch die Formel (1) darzustellen, muss man die Koëffizienten (a) so bestimmen, dass die Quadratsumme

$$Q = \Sigma (o_x - u_x)^2$$

ein Minimum wird. Dies gibt eine Anzahl von Gleichungen

$$\begin{gathered} \Sigma (o_x - u_x) = 0, \ \Sigma x (o_x - u_x) = 0, \\ \Sigma x^2 (o_x - u_x) = 0, \ \ldots \end{gathered} \qquad (2)$$

oder auch

$$\Sigma x^i o_x = \Sigma x^i u_x, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots \nu), \qquad (2')$$

d. h. die Momentensummen der ausgeglichenen Werte sollen denen der beobachteten Werte gleich sein für alle Potenzen von x, welche in der Ausgleichungsformel u_x mitgenommen werden. Offenbar kann man diese Bedingungen, welche zur linearen Bestimmung der Koëffizienten (a) hinreichen, auch durch die folgenden ersetzen:

$$\sum \Psi_i(x) o_x = \sum \Psi_i(x) u_x, \quad (i = 0, 1, 2 \ldots r), \qquad (3)$$

wenn man für $\Psi_i(x)$ eine Reihe von ganzen algebraischen Funktionen nimmt, deren Grad in x je durch ihren beigefügten Index angegeben wird, die übrigens ganz willkürlich gewählt werden können.

$\Psi_0(x)$ ist eine Konstante, welcher wir den Wert 1 beilegen können; die ferneren $\Psi_i(x)$ werden wir solcherweise bestimmen, dass ganz allgemein die Momentensumme

$$\sum x^\lambda \Psi_i(x) = 0, \text{ für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots i - 1, \qquad (4)$$

die Summe erstreckt über die Argumente der Beobachtungsreihen in (2).

Dadurch erhält man augenscheinlich hinreichende Gleichungen, um alle Koëffizienten in dem Ausdruck

$$\Psi_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_i x^i \qquad (5)$$

linear bis auf einen gemeinschaftlichen Faktor zu bestimmen. So erhält man z. B. für Ψ_1 (mit Gaussischer Summenbezeichnung)

$$a_0 [x^0] + a_1 [x] = 0,$$

für Ψ_2

$$a_0 [x^0] + a_1 [x] + a_2 [x^2] = 0$$

$$a_0 [x] + a_1 [x^2] + a_2 [x^3] = 0.$$

Die beigefügte Tafel I enthält die Werte von Ψ_2 und Ψ_3 einer ungeraden Anzahl n von Beobachtungen (von 7—19) entsprechend, indem die Argumente x so gewählt sind, dass der Nullpunkt in die Mitte fällt. Der arbiträre Faktor ist so gewählt, dass die Tafelwerte als kleinste mögliche ganze Zahlen ausgedrückt werden. Ψ_0 ist überall $= 1$, $\Psi_1(x) = x$.

Aus (4) ergibt sich, dass auch

$$\sum \Psi_\lambda(x)\, \Psi_i(x) = 0, \text{ für alle } \lambda < i, \tag{6}$$

oder, was dasselbe ist, für λ von i verschieden. Diese Eigenschaft charakterisiert die Funktionen $\Psi_i(x)$ als sogenannte „Orthogonalfunktionen".

Man ersieht unmittelbar, dass, wie $\Psi_i(x)$ linear durch Potenzen von x darstellbar ist, sich auch jede Potenz von x linear durch Funktionen $\Psi_i(x)$ ausdrücken lässt, woraus folgt, dass man auch u_x folgendermassen darstellen kann:

$$u_x = A_0 + A_1\, \Psi_1(x) + A_2\, \Psi_2(x) + \ldots, \tag{7}$$

wo jetzt die Koëffizienten konstant sind. Und diese Darstellung ergibt sehr beträchtliche Vorteile.

Da nämlich aus (2′) folgt, dass

$$\sum \Psi_i(x)\, o_x = \sum \Psi_i(x)\, u_x, \tag{8}$$

so lassen sich die Koëffizienten (A) unmittelbar bestimmen. Denn ersetzt man in der rechten Seite dieser Gleichung u_x durch die Ausdrücke (7) und beachtet die Formel (6), so ergibt sich sofort die allgemeine Formel:

$$\sum \Psi_i(x)\, o_x = A_i \sum \Psi_i^2(x),$$

so dass für jeden Wert von i

$$A_i = \frac{\sum \Psi_i(x)\, o_x}{\sum \Psi_i^2(x)}. \tag{9}$$

Da die im Nenner auftretende Summe ein für allemal berechnet werden kann, reduziert sich die nötige Rechnungsarbeit hauptsächlich auf die Berechnung der Zähler, d. h. die Summe der Produkte von den Beobachtungswerten und den tabulierten ganzzahligen Werten der Funktionen $\Psi_i(x)$. Das Resultat der Ausgleichung wird sodann durch die Formel:

$$\begin{aligned} u_x = \Psi_0(x) \frac{\sum \Psi_0(x)\, o_x}{\sum \Psi_0^2(x)} + \Psi_1(x) \frac{\sum \Psi_1(x)\, o_x}{\sum \Psi_1^2(x)} \\ + \Psi_2(x) \frac{\sum \Psi_2(x)\, o_x}{\sum \Psi_2^2(x)} + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

dargestellt.

Dieselbe kann mit einem beliebigen Gliede abgebrochen werden.

Ist das letzte mitgenommene Glied dasjenige, welches $\Psi_i(x)$ enthält, so gibt der alsdann hervorgehende Ausdruck, welchen wir durch $u_x^{(i)}$ bezeichnen, das Resultat einer Ausgleichung nach einer algebraischen Formel des i^{ten} Grades gemäss der Methode der kleinsten Quadrate. Jedes neue Glied kann daher als eine Korrektur der schon vorgenommenen Ausgleichung betrachtet werden.

Es ist keine schwierige Sache, $u_x^{(i)}$ auf die Form (1) zu bringen. Dies wäre aber ganz ohne Interesse; wir

brauchen nur die numerischen Resultate, und diese ergeben sich am leichtesten unmittelbar aus der Formel (7) durch Benützung der Tafelwerte von $\Psi_i(x)$.

Noch muss bemerkt werden, dass man schon nach der Bestimmung der Koëffizienten (A) und vor der Ausrechnung der $u_x^{(i)}$ die Quadratsumme $Q^{(i)}$ der Abweichungen $(o_x - u_x^{(i)})$ sehr leicht berechnen kann.

Denn man findet

$$Q^{(i)} = \Sigma\,(o_x - u_x^{(i)})^2 = \Sigma\, o_x (o_x - u_x^{(i)}) - \Sigma\, u_x^{(i)} (o_x - u_x^{(i)}).$$

Das letzte Glied verschwindet wegen (3), und man erhält demnach

$$Q^{(i)} = \Sigma\, o_x^2 - \Sigma\, o_x (A_0\, \Psi_0(x) + A_1\, \Psi_1(x) + A_2\, \Psi_2(x) + \ldots A_i\, \Psi_i(x))$$

oder

$$Q^{(i)} = \Sigma\, o_x^{\,2} - A_0\, \Sigma\, o_x\, \Psi_0(x) - A_1\, \Sigma\, o_x\, \Psi_1(x) \ldots - A_i\, \Sigma\, o_x\, \Psi_i(x). \qquad (11)$$

Das Mitnehmen eines neuen Gliedes $A_{i+1}\, \Psi_{i+1}(x)$ vermindert die schon erhaltene Quadratsumme $Q^{(i)}$ um

$$\Delta_{i+1} = A_{i+1}\, \Sigma\, o_x\, \Psi_{i+1}(x) = A_{i+1}^2\, \Sigma\, \Psi_{i+1}^2(x). \qquad (12)$$

Nicht allein erhält man durch Vergleich der vorausberechneten Quadratsumme mit der nach vollendeter Ausgleichung gefundenen eine Kontrolle der ganzen Rechnung, sondern man bekommt auch durch Vergleichung der allmählich gefundenen $Q^{(i)}$ ein Mittel, um zu entscheiden, wie viele Glieder man in der Entwicklung (10) mitnehmen darf. Nichts hindert, dass

man fortsetze, bis die Anzahl der Glieder derjenigen der Beobachtungen gleich werde. Dann wird aber u_x genau o_x darstellen, und die Quadratsumme wird gleich Null. Auf diese Weise kann man z. B. durch die „Ausgleichung“ von $o_x = x^i$ ein Mittel erhalten, um $\Psi_i(x)$ mittelst x^i und den $\Psi(x)$ von niedrigerem Index auszudrücken. Um eine wirkliche Ausgleichung zu haben, muss jedoch die Anzahl der Beobachtungen grösser als die der Formelglieder sein; meistens kann man sich damit begnügen, für letztere höchstens 3 bis 4 zu nehmen.

Um ein Maximum oder Minimum von u_x zu gestatten, muss man notwendig $\Psi_2(x)$ mitnehmen; um einen Wendepunkt in der ausgeglichenen Kurve zu ermöglichen, muss ferner $\Psi_3(x)$ mitgenommen werden. — Wir begnügen uns vorläufig hier mit diesen Andeutungen; weiteres ergibt sich aus dem folgenden Rechnungsbeispiel, wodurch das ganze Verfahren in deutlicheres Licht gestellt wird.

Taf. I. **Numerische Werte der Entwicklungsfunktionen.**

$n =$	7		9		11		13		15		17		19		21		
x	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	φ_2	φ_3	x
—10															—190	570	—10
— 9													—51	204	—133	228	— 9
— 8											—40	28	—34	68	— 82	— 24	— 8
— 7									—91	91	—25	7	—19	— 28	— 37	—196	— 7
— 6							—22	11	—52	13	—12	— 7	— 6	— 89	2	—298	— 6
— 5					—15	30	—11	0	—19	—35	— 1	—15	5	—120	35	—340	— 5
— 4			—28	14	— 6	— 6	— 2	— 6	8	—58	8	—18	14	—126	62	—332	— 4
— 3	—5	1	— 7	— 7	1	—22	5	— 8	29	—61	15	—17	21	—112	83	—284	— 3
— 2	0	—1	8	—13	6	—23	10	— 7	44	—49	20	—13	26	— 83	98	—206	— 2
— 1	3	—1	17	— 9	9	—14	13	— 4	53	—27	23	— 7	29	— 44	107	—108	— 1
0	4	0	20	0	10	0	14	0	56	0	24	0	30	0	110	0	0
1	3	1	17	9	9	14	13	4	53	27	23	7	29	44	107	108	1
2	0	1	8	13	6	23	10	7	44	49	20	13	26	83	98	206	2
3	—5	—1	— 7	7	1	22	5	8	29	61	15	17	21	112	83	284	3
4			—28	—14	— 6	6	— 2	6	8	58	8	18	14	126	62	332	4
5					—15	—30	—11	0	—19	35	— 1	15	5	120	35	340	5
6							—22	—11	—52	—13	—12	7	— 6	89	2	298	6
7									—91	—91	—25	— 7	—19	28	— 37	196	7
8											—40	—28	—34	— 68	— 82	24	8
9													—51	—204	—133	—228	9
10															—190	—570	10
$\sum \varphi_0^2$	7		9		11		13		15		17		19		21		
$\sum \varphi_1^2$	28		60		110		182		280		408		570		770		
$\sum \varphi_2^2$	84		2772		858		2002		37,128		7752		13,566		201,894		
$\sum \varphi_3^2$	6		990		4290		572		39,780		3876		213,180		1,730,520		

Taf. II.

Alter (1)	x (2)	o_x^2 (3)	o_x (4)	$\Psi_1 o_x$ (5)	$\Psi_2 o_x$ (6)	$\Psi_3 o_x$ (7)	$u_x^{(0)}$ (8)	$A_2 \Psi_2$ (9)	$u_x^{(2)}$ (10)	$o_x - u_x^{(2)}$ (11)	$(o_x - u_x^{(2)})^2$ (12)
20	—5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.56	—1.14	1.42	—1.42	2.02
21	—4	33.87	5.82	—23.28	—34.92	— 34.92	2.56	—0.46	2.10	3.72	13.84
22	—3	0.00	0.00	0.00	0 00	0.00	2.56	0.08	2.64	—2.64	6.97
23	—2	5.95	2.44	— 4.88	14.64	— 56.12	2.56	0.46	3.02	—0.58	0.34
24	—1	25.40	5.04	— 5.04	45.36	— 70.56	2.56	0.68	3.24	1.80	3.24
25	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.56	0.76	3.32	—3.32	11.02
26	1	60.84	7.80	7.80	70.20	109.20	2 56	0.68	3.24	4.56	20.79
27	2	1.54	1.24	2.48	7.44	28.52	2.56	0.46	3.02	—1.78	3.17
28	3	4.49	2.12	6.36	2.12	46.64	2.56	0.08	2.64	—0.52	0.27
29	4	3.20	1.79	7.16	—10.74	10.74	2.56	—0.46	2.10	—0.31	0.10
30	5	3.76	1.94	9.70	—29.10	— 58.20	2.56	—1.14	1.42	0.52	0.27
Summe		139.05	28.19	0.30	65.00	— 24.70	28.16	0.00	28.16	0.03	62.03
Divisor		.	11	110	858	4290					
A		.	2.56	0.003	0.076	—0.0057					
Δ		.	72.17	0.00	4.94	0.14					
Q		139.05	66.88	66.88	61.94	61.80					62.03

II.

Als Beispiel nehme ich eine Reihe von 11 Werten von $\log \frac{1}{p_x}$ entsprechend den Altersjahren 20 bis 30, beide inklusive, den Anfang eines Beobachtungsmaterials, aus welchem Dr. Steffensen eine Tafel $D^{m(5)}$ für dänische Männer abgeleitet hat, die in den Verhandlungen des im Jahre 1912 in Cambridge abgehaltenen Mathematiker-Kongresses veröffentlicht worden ist.

Die hier angeführten Beobachtungen bilden, weil auf nur 37 Todesfälle gegründet, natürlich den schlechtesten Teil des ganzen Materials, und der Einfluss desselben auf die von Dr. Steffensen mit grosser Sorgfalt vorgenommene und im ganzen sehr befriedigende Ausgleichung nach der Makeham'schen Formel ist daher auch sehr gering. Eben deshalb lohnt es sich, das Ergebnis dieser Beobachtungen besonders zu untersuchen.

Die ganze Berechnung findet sich in der beigefügten Tafel II. Die erste Kolonne gibt das Alter an, die zweite die Argumente x, so dass $x = 0$ dem Alter 25 entspricht. Dann folgen sub (3) die Quadrate der Beobachtungen, sub (4) die Beobachtungsgrössen in Promille ausgedrückt. Diese Kolonne ergibt dann ebenfalls die Grösse $\Psi_0 \cdot o_x$. Ferner folgen bzw. $\Psi_1 \cdot o_x$, $\Psi_2 \cdot o_x$ und $\Psi_3 \cdot o_x$, berechnet durch direkte Multiplikation der Kolonne (4) mit den entsprechenden Werten von $\Psi_1(x) = x$ nebst Ψ_2 und Ψ_3, entnommen aus der Tafel I für $n = 11$. Nach Ausrechnung jeder dieser Kolonnen bildet man sofort ihre Summe. Unter derselben trägt man den entsprechenden Divisor $\sum \Psi^2$ aus der Tafel I ein und bildet teils den Koëffizienten A_i, teils das Dekrement Δ_i der Quadratsumme und dann endlich die Quadratsumme $Q^{(i)}$, welche in der letzten Zeile angeführt wird.

Man ersieht hieraus, dass für $u^{(0)}$, d. h. $u_x = A_0$, die Quadratsumme der resultierenden Abweichungen bis auf $139.05 - 72.17 = 66.88$ herabgeht. Diese ändert sich aber nicht durch Mitnahme des Gliedes $A_1 \Psi_1(x)$. Dagegen sinkt sie für $u^{(2)}$ herab bis 61,94, welche für $u^{(3)}$ nur wenig reduziert wird. Hieraus ersieht man, dass die Glieder $A_1 \Psi_1(x)$ und $A_3 \Psi_3(x)$ schlechthin weggelassen werden können, so dass wir das Resultat der Ausgleichung in der folgenden Gestalt

$$u_x = 2.56 + 0.076\, \Psi_2(x) \tag{13}$$

darstellen können.

Man muss sich hier noch die Frage stellen, ob die Mitnahme des letzten Gliedes in der Tat das zunächst gefundene Resultat $u_x^0 = 2.56$ verbessert oder nicht. Um diese Frage zu entscheiden, dividieren wir erstens $Q^{(0)}$ durch die Anzahl der Beobachtungen vermindert um die Anzahl der Formelkonstanten für $u^{(0)}$, also durch $11 - 1 = 10$. Der Quotient 6.69 wird annäherungsweise das Quadrat m_0^2 des mittleren Fehlers (nach der Ausgleichung) darstellen, unter der Annahme, dass wir bei $u_x = u^{(0)}$ stehen bleiben. Nehmen wir zunächst $u_x = u^{(2)}$ als durch obige Formel (13) dargestellt, so enthält diese Formel wenigstens zwei Konstanten A_0 und A_2 (sogar drei, wenn man sie als Spezialfall von (1) betrachtet). Der hieraus sich ergebende mittlere Fehler m_2 hat daher das Quadrat $61.94 : 9 = 6.88$. Da folglich m_2 jedenfalls grösser ist als m_0, wird $u^{(2)}$ keine theoretisch bessere Darstellung als $u^{(0)}$ gewähren, insofern man nur den hier betrachteten Teil der Beobachtungsreihe vor Augen hält. Anders verhält sich die Sache, wenn man auch auf die folgenden Beobachtungen Rücksicht nimmt. Dann zeigt sich nämlich unzweifelhaft,

dass nach Alter 30 o_x kleinere Werte annehmen kann und muss als 2.56; u_x muss daher ein Minimum ungefähr beim Alter 30 haben können, und folglich muss vorher ein Maximum vorkommen, so dass ein Ausdruck wie $u^{(2)}$ für unsere Beobachtungsreihe notwendig wird.

Wir müssen deshalb die obige Formel (13) akzeptieren. Und schon die Natur der Beobachtungen macht eine Fortsetzung durch Hinzufügen mehrerer Glieder zwecklos.

Noch steht nur zurück, die numerischen Werte von u_x zu berechnen, wie in den letzten Kolonnen der Tafel II gezeigt ist. In die Kolonne (8) ist hier $u_x^{(0)} = A_0$ eingetragen, — falls nicht $A_1 = 0$ ist, kann man hier sogleich $u_x^{(1)}$ einführen —, dann folgt sub (9) der Wert von $A_2 \Psi_2(x)$, und durch Addition von (8) und (9) ergibt sich $u_x^{(2)}$. Durch Fortsetzung erhält man auf ähnliche Weise $u_x^{(3)}$ usw. Als Kontrolle bildet man die Summe von $u_x^{(2)}$, welche mit der entsprechenden Summe $\Sigma\, o_x$ übereinstimmen soll (hier 28.16 statt 28.19). Endlich bildet man sub (10) $o_x - u_x$, deren Summe theoretisch Null, hier 0.03 wird, und sub (11) die Quadrate der Abweichungen. Die Summe derselben, 62.03, stimmt hinreichend gut mit dem vorausberechneten Werte $Q^{(2)} = 61.94$, um die Richtigkeit der ganzen Berechnung zu konstatieren.

Wie man sieht, ist dieselbe sehr einfach und lässt sich durch Anwendung geeigneter Hülfsmittel (Produkttafeln oder Rechenmaschine) erleichtern. Trotzdem die Beobachtungen sehr unregelmässig ausfallen, ist doch das Resultat der Ausgleichung recht plausibel, wovon man sich durch eine sorgfältige graphische Ausgleichung leicht überzeugen kann. Sogar die in der Tat unzulässige Annahme der gleichen Gewichte verursacht

nur geringen Nachteil, wenn nur nicht einzelne Beobachtungen mit bedeutend grösseren Gewichten als ihre benachbarten auftreten.

Ein Blick auf die Tafel I zeigt, dass die äussersten Werte der $\Psi(x)$ durchgängig verhältnismässig gross ausfallen. Daraus folgt, dass die Schwankungen, welche u_x durch Hinzufügen von neuen Gliedern erleidet, am grössten sind für die äussersten Argumente (x). Daraus schliesst man, dass man für diese die ausgeglichenen Werte etwas unsicherer ansehen muss als diejenigen, welche dem mittleren Teile der Beobachtungsreihe entsprechen.

III.

Unmittelbar lässt sich das oben entwickelte Verfahren anwenden, um zu untersuchen, wieweit eine vorgelegte, durch Beobachtungen bestimmte Funktion an irgend einer Stelle ein Maximum, Minimum oder einen Wendepunkt besitzt, und dient auf diese Weise zum genaueren Studium über den Verlauf der Funktion. Will man es aber auf die stückweise Ausgleichung einer ausgedehnten Reihe von Beobachtungen anwenden, dann kommt in Betracht, wie man diese Reihe am zweckmässigsten zerschneidet und wie man die Stücke wieder vereinigt.

Über den ersten Punkt ist nur wenig Allgemeines zu sagen. Man darf die Stücke nicht gar zu klein machen, jedoch auch nicht grösser, als dass eine kurze Formel zutreffen werde. Da unsere Tafel I nur für ungerades n bestimmt ist, muss man sich auf solches beschränken, falls man nicht die entsprechenden Tafeln für gerade Werte von n (dann am besten mit Argumenten ± 1, ± 3 usw.) berechnen will. Von einiger Bedeutung ist es, dass man am besten die Teilpunkte so legt,

dass sie wo möglich nicht in die unmittelbare Nähe solcher Punkte fallen, wo die Beobachtungen grosse Schwankungen aufweisen.

Die nachherige Verknüpfung kann auf verschiedene Weise vorgenommen werden. Am einfachsten geht es, wenn man die Teile übereinander hinausgreifen lässt, so dass man z. B. für die Altersjahre $z - r$ bis $z + r$ zwei verschiedene ausgeglichene Wertereihen bzw. u_z^{I} und u_z^{II} erhält. Aus diesen bildet man zunächst eine lineare Kombination

$$U_z = \lambda_z u_z^{\mathrm{I}} + (1 - \lambda_z) u_z^{\mathrm{II}}, \tag{14}$$

indem man für die Koëffizienten λ_z passend gewählte echte Brüche nimmt.

Diese werden so bestimmt, dass sie allein von der Grösse r abhängen, für $r = 0$ den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen und für grössere positive oder negative Werte von r sich allmählich den Grenzwerten bzw. 1 oder 0 annähern. Am einfachsten bildet man solche, indem man in der Entwicklung von $(1 + 1)^m$ die Glieder allmählich addiert und durch 2^m dividiert. Z. B. aus $(1 + 1)^3$ ergibt sich die Reihe

$$8\lambda = 0,\ 1,\ 4,\ 7,\ 8$$
$$8(1 - \lambda) = 8,\ 7,\ 4,\ 1,\ 0.$$

Verwendet man diese Koëffizienten bei der Verknüpfung der beiden Reihen, so ergibt sich aus

$$\begin{array}{lll}
(u_z^{\mathrm{I}}) = \ldots u_{z-2}^{\mathrm{I}}, & u_{z-1}^{\mathrm{I}},\ u_z^{\mathrm{I}},\ u_{z+1}^{\mathrm{I}} & \\
(u_z^{\mathrm{II}}) = & \quad | \ u_{z-1}^{\mathrm{II}},\ u_z^{\mathrm{II}},\ u_{z+1}^{\mathrm{II}},\ u_{z+2}^{\mathrm{II}} \ldots \\
(U_z) = \ldots u_{z-2}^{\mathrm{I}}, & \dfrac{7\,u_{z-1}^{\mathrm{I}} + u_{z-1}^{\mathrm{II}}}{8}, & \dfrac{4\,u_z^{\mathrm{I}} + 4\,u_z^{\mathrm{II}}}{8}, \\
 & \dfrac{u_{z+1}^{\mathrm{I}} + 7\,u_{z+1}^{\mathrm{II}}}{8}, & u_{z+2}^{\mathrm{II}} \ldots
\end{array}$$

Hier sind nur 3 überschiebende Funktionswerte; es hat aber keine Schwierigkeit, das nämliche Verfahren zu verallgemeinern, und je mehr überschiebende Werte man benutzt, um so glatter wird der Übergang verlaufen. Vollständige Kontinuität erhält man jedoch in der Tat nicht, und falls u_z^{I} und u_z^{II} beide zu gross oder zu klein sind, wird ein solcher Fehler auch in U_z verbleiben. Dazu kommt, dass, während für jedes Stück u^{I} und u^{II} für sich genommen die Summen der ersten Momente für die beobachteten und die ausgeglichenen Funktionswerte einander gleich sind, diese Übereinstimmung nicht mehr notwendig auch für die kombinierte Reihe U_x bestehen bleibt, so dass möglicherweise eine Verschlechterung der Ausgleichung stattfinden kann.

Dies kann vermieden werden, wenn man keine überschiebenden Werte anwendet, sondern unmittelbar die Stücke anpasst. Dann führt man aber meistens eine sehr fühlbare Diskontinuität ein, und man muss deshalb eine nachherige Verbesserung der dem Diskontinuitätspunkte benachbarten Werte vornehmen, und wir stellen an diese Verbesserung die Forderung, *dass sie nicht die totalen Momentensummen verändern darf.*

Unter Beachtung einer wohlbekannten Eigenschaft der Binomialkoëffizienten kann man durch ein besonderes Korrektionsverfahren diese Forderung erfüllen. Da nämlich (indem wir uns auf die einfachsten Fälle beschränken)

$$x^\lambda - 3\,(x+1)^\lambda + 3\,(x+2)^\lambda - (x+3)^\lambda = 0 \text{ für } \lambda < 3$$

und

$$x^\lambda - 4\,(x+1)^\lambda + 6\,(x+2)^\lambda - 4\,(x+3)^\lambda + (x+4)^\lambda = 0$$
$$\text{für } \lambda < 4,$$

so ersieht man, dass für die Reihen

$$\begin{array}{lcccc} & u_x & u_{x+1} & u_{x+2} & u_{x+3} \\ \text{und} & u_x + \varepsilon & u_{x+1} - 3\,\varepsilon & u_{x+2} + 3\,\varepsilon & u_{x+3} - \varepsilon \end{array}$$

die drei ersten Momente übereinstimmen werden ohne Rücksicht auf den Wert der Korrektur ε. Und ebenfalls werden die vier ersten Momente unverändert durch Hinzufügen der bezüglichen Korrekturen ε, $-4\,\varepsilon$, $6\,\varepsilon$, $-4\,\varepsilon$, ε an den Reihenwerten u_x bis u_{x+4}.

Diese Bemerkung kann oft von Nutzen werden, um eine unregelmässige Beobachtungsreihe in eine andere, gleichwertige, aber regelmässigere zu verwandeln. So lassen sich die im obigen Beispiel angeführten o_x durch allmähliche Korrekturen k_x nach und nach in die in der Tafel unten beigefügten $o_x^{(1)}$, $o_x^{(2)}$, $o_x^{(3)}$ umändern, ohne dass die drei ersten Momente irgend welche Veränderungen erleiden, und in der Tat ergibt daher auch die letzte Reihe ganz dieselben ausgeglichenen $u_x^{(2)}$ wie die oben erhaltenen. Nur wird natürlich der mittlere Fehler nach der Ausgleichung ein anderer.

Alter	o_x	$k_x^{(i)}$	$o_x^{(1)}$	$k_x^{(2)}$	$o_x^{(2)}$	$k_x^{(3)}$	$o_x^{(3)}$
20	0.00	+0.50	0.50		—		0.50
21	5.82	—2.00	3.82		—		3.82
22	0.00	+3.00	3.00	—0.50	2.50		2.50
23	2.44	—2.00	0.44	+2.00	2.44		2.44
24	5.04	+0.50	5.54	—3.00	2.54	—0.50	2.04
25	0.00		0.00	+2.00	2.00	+2.00	4.00
26	7.80		—	—0.50	7.30	—3.00	4.30
27	1.24		—		—	+2.00	3.24
28	2.12		—		—	—0.50	1.62
29	1.79		—		—		1.79
30	1.94		—		—		1.94

Dass wir durch grössere Sorgfalt in der Wahl der Korrekturen ein noch besseres Resultat erhalten können, ist leicht zu ersehen und ebenfalls, dass dieses Verfahren ein vortreffliches Hülfsmittel darbietet, um die Unsicherheit des graphischen Ausgleichungsverfahrens zu vermindern.

Wendet man dasselbe Verfahren bei der Verknüpfung von ausgeglichenen Partialteilen u_x an, so wird man im allgemeinen nach einigen Versuchen genügend glatten Verlauf des Überganges erhalten; jedoch gelingt dies leichter durch einen kleinen Kunstgriff, welcher darin besteht, dass man bei der Ausgleichung jedes Partialteiles unter den o_x einige der anstossenden Werte u_x aus dem schon ausgeglichenen Stück mitnimmt. Dadurch wird gewöhnlich schon eine bessere Anschliessung der einzelnen Stücke erzielt, so dass die nachträgliche Verbesserung reduziert wird und die Momentensummen nicht beeinträchtigt werden.

Nimmt man nämlich an, der erste ausgeglichene Teil u_x^{I} beruhe auf den Werten o_x, entsprechend den Argumenten $x = \alpha$ bis $x = \gamma$, ferner dass u_x^{II} gegründet wird auf o_x von $x = \gamma + 1$ bis $x = \delta$ und ausserdem auf u_x^{I} von $x = \beta$ bis $x = \gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma < \delta)$, und dass endlich die Schlussreihe U_x aus u_x^{I} für $x = \alpha$ bis $x = \beta - 1$, und aus u_x^{II} für $x = \beta$ bis $x = \delta$ gebildet wird, so berechnen sich die resultierenden Momentensummen auf die folgende Weise:

$$\sum_{\alpha}^{\gamma} x^{\lambda}\, o_x = \sum_{\alpha}^{\beta-1} x^{\lambda}\, u_x^{\mathrm{I}} + \sum_{\beta}^{\gamma} x^{\lambda}\, u_x^{\mathrm{I}}$$

$$\sum_{\beta}^{\gamma} x^{\lambda}\, u_x^{\mathrm{I}} + \sum_{\gamma+1}^{\delta} x^{\lambda}\, o_x = \sum_{\beta}^{\delta} x^{\lambda}\, u_x^{\mathrm{II}},$$

woraus durch Addition

$$\sum_{\alpha}^{\delta} x^{\lambda}\, o_x = \sum_{\alpha}^{\beta-1} x^{\lambda}\, u_x^{\mathrm{I}} + \sum_{\beta}^{\delta} x^{\lambda}\, u_x^{\mathrm{II}} = \sum_{\alpha}^{\delta} x^{\lambda}\, U_x,$$

so dass die Gleichheit der Momentensummen bestehend bleibt.

Um das oben Gesagte besser zu erläutern, haben wir die Fortsetzung der in Tafel II angeführten Beobachtungen behandelt in der Weise, dass wir im zweiten Stück u^{II} die Altersklassen 28 bis 46 genommen haben und für diese mittelst einer Formel zweiten Grades eine sehr befriedigende Ausgleichung erhalten, aus welcher sich für die angeführten Altersjahre folgende Werte ergeben:

Alter:	27	28	29	30	31	32	33	
$u_x^{\mathrm{II}} =$	|	2.05	1.99	1.94	1.91	1.89	1.90	usw.

Da wir oben fanden

$$u_x^{\mathrm{I}} = 3.02 \quad 2.64 \quad 2.10 \quad 1.42 \;|,$$

so haben die beiden Reihen die Alter 28, 29, 30 gemeinsam, und durch Benutzung der für die überschiebenden Werte angegebenen λ-Werte finden wir hieraus die resultierenden U_x an der Übergangsstelle:

$$u_{27}^{\mathrm{I}} = 3.02, \quad U_{28} = 2.57, \quad U_{29} = 2.05,$$

$$U_{30} = 1.88, \quad u_{31}^{\mathrm{II}} = 1.91,$$

wobei wir jedoch auf die Gleichheit der Momente verzichten.

Wenn wir dagegen die in Tafel II enthaltene Rechnung wiederholen, indem wir anstatt der ursprünglichen o_{28}, o_{29}, o_{30}, bezw. $u_{28}^{II} = 2.05$, $u_{29}^{II} = 1.99$, $u_{30}^{II} = 1.94$ als beobachtete Werte benützen, finden wir durch Mitnahme von Ψ_3 die unten für die Alter 26—30 angeführten u_x. Hier muss aber für Alter 30 korrigiert werden; wie dies gemacht wird, ist in der folgenden kleinen Tafel gezeigt.

Alter	U_x	Korr.	U_x^{I}	Korr.	U_x^{II}
26	3.17		3.17		3.17
27	2.90		2.90	+2	2.92
28	2.55	+ 6	2.61	—6	2.55
29	2.13	—18	1.95	+6	2.01
30	1.68	+18	1.86	—2	1.84
31	1.91	— 6	1.85		1.85
32	1.89		1.89		1.89
33	1.90		1.90		1.90
34	1.92		1.92		1.92

Hierdurch gewinnen wir an der Übergangsstelle die sub U_x^{II} angeführten Zahlen, und wir führen schliesslich das Resultat der ganzen Ausgleichung für die Altersklassen 20 bis 46 hier an.

Alter	u_x	$o_x - u_x$	Alter	u_x	$o_x - u_x$
20	1.25	—1.25	33	1.90	—0.01
21	2.13	+3.69	34	1.92	+0.52
22	2.75	—2.75	35	1.97	—0.05
23	3.14	—0.70	36	2.04	—0.05
24	3.32	+1.72	37	2.12	+0.46
25	3.32	—3.32	38	2.22	+0.53
26	3.17	+4.63	39	2.34	—0.61
27	2.92	—1.68	40	2.48	—0.63
28	2.55	—0.43	41	2.64	—0.27
29	2.01	—0.22	42	2.82	+0.41
30	1.84	+0.10	43	3.01	—0.07
31	1.85	—0.17	44	3.23	—0.32
32	1.89	+0.03	45	3.46	+0.15
			46	3.71	+0.25

Die Fehlersumme wird wegen der Abrundungen —0.04 statt 0, und mit entsprechender Annäherung werden jetzt auch die beiden Momentensummen $\Sigma x(o_x - u_x)$ und $\Sigma x^2(o_x - u_x)$ verschwinden.