Das Zinsfussproblem bei der Leibrente

Autor(en): **Christen, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **25 (1930)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967496

Das Zinsfussproblem bei der Leibrente.

Von Dr. **Hans Christen**, Zürich.

I. Einleitung.

1. Darlegung des Problems.

Die Berechnung von Versicherungswerten, sofern Nettowerte in Betracht fallen, geschieht mittelst der Grundlagen: Überlebensordnung und Zinsfuss. Will man nun bei gleichbleibender Überlebensordnung die Versicherungswerte für einen neuen Zinsfuss berechnen, so besteht die gebräuchliche Methode darin, dass man das ganze System der Kommutationszahlen zum neuen Zinsfuss berechnet.

Wenn es sich indessen nur um die Kenntnis vereinzelter, für einen neuen Zinsfuss zu bestimmenden Versicherungswerte handelt, so ist die ganze Neuberechnung der Kommutationszahlen zu umständlich. Unter solchen Bedingungen stellt sich die Aufgabe, folgendes Problem zu untersuchen:

Wie kann man, wenn für eine bestimmte Überlebensordnung und für einen bestimmten Zinsfuss die Versicherungswerte schon vorliegen, diese für die gleiche Überlebensordnung, aber für einen neuen Zinsfuss möglichst einfach und zugleich möglichst genau bestimmen, ohne das ganze System der Kommutationszahlen neu zu berechnen?

Dieses Problem, das den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet, wird öfters als «Zinsfussproblem» bezeichnet. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Berechnung des Barwertes der Leibrente zu einem neuen Zinsfusse.

Wenn die Überlebensordnung eine analytische Funktion des Alters ist, so besteht die ideale Lösung des Zinsfussproblems darin, die Versicherungswerte in endlicher Form als einfache Funktion der Parameter des Sterbegesetzes und des Zinsfusses darzustellen. Dies wird bei einfacher Wahl des Sterbegesetzes möglich sein. Handelt es sich aber um ein Sterbegesetz, das den Beobachtungsresultaten möglichst gerecht wird, wie z. B. das Makehamsche Gesetz, so können die Funktionen so kompliziert gebaut sein, dass die Versicherungswerte nicht in einfache, endliche Form gebracht werden können.

Das Zinsfussproblem ist wegen seines wissenschaftlichen Interesses und wegen seiner Wichtigkeit für viele praktische Arbeiten des Versicherungsmathematikers in der Literatur schon vielfach behandelt worden; deshalb wird in dieser Arbeit auch ein Überblick der wichtigsten diesbezüglichen Abhandlungen gegeben.

2. Das Problem bei der Abzinsungsfunktion.

Wir gehen im folgenden stets aus von einem festen Zinsfuss i, für welchen die Versicherungswerte gegeben sind. Die Werte zu einem andern Zinsfuss i' bezeichnen wir jeweilen mit einem Akzent ($'$), und unsere Aufgabe besteht darin, die akzentierten Grössen aus den entsprechenden Grundwerten (zum Zinfuss i) zu berechnen.

Es sollen zukünftig bedeuten:

$v = \frac{1}{1+i}$ den Abzinsungsfaktor,

v^t die Abzinsungsfunktion,

die den Barwert der nach t Jahren zu zahlenden Einheit darstellt;

$\delta = ln\,(1 + i)$ den logarithmischen Diskont.

Dann lässt sich v^t wie folgt durch δ ausdrücken:

$$v^t = e^{-\delta \cdot t}$$

Für einen andern Zinsfuss i' gilt ebenfalls:

$$v'^t = e^{-\delta' \cdot t}$$

Es wird eine Zeitdauer t' geben, für die gilt:

$$e^{-\delta' \cdot t} = e^{-\delta t'}$$

oder

$$\delta \cdot t' = \delta' \cdot t$$

woraus sich für ein gegebenes t das zugehörige t' bestimmen lässt:

(1) $$t' = \frac{\delta'}{\delta} \cdot t$$

Angenommen, dass wir die Werte von v^t für alle t zu einem bestimmten Zinsfuss i besitzen, so lässt sich irgendein Wert von v'^t, anstatt direkt, grundsätzlich einfacher wie folgt berechnen:

Man bestimmt aus der Gleichung (1) das zugehörige t', verschiebt also an Stelle des Zinsfusses die Dauer und sucht in der Tabelle den Wert $v^{t'}$. Damit ist auch v'^t bestimmt.

Beispiel.

Man besitze bloss eine Tafel der Abzinsungsfaktoren v^t zum Zinsfuss 4 %. Es soll aus dieser Tafel allein, für eine bestimmte Dauer $t = 20$, der Abzinsungsfaktor zum Zinsfuss 5 % berechnet werden.

t	$1{,}04^{-t}$
1	0,9615
...	......
20	0,4564
...	......
24	0,3901
25	0,3751
...	......

$\delta\ (4\ \%) = 0{,}0392207$
$\delta'\ (5\ \%) = 0{,}0487902$

$$t = 20\ ;\ t' = \frac{0{,}04879}{0{,}03922} \cdot 20 = 24{,}88$$

und daraus durch lineare Interpolation:

$$1{,}05^{-20} = 1{,}04^{-24{,}88} = 0{,}3901 - 0{,}88\,(0{,}3901 - 0{,}3751)$$

$$1{,}05^{-20} = 0{,}3769$$

Der genaue Wert beträgt $= 0{,}3769$.

3. Das Problem bei der Zeitrente.

Die Formel für die vorschüssige, n Jahre dauernde Zeitrente lautet:

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{d}$$

Das Produkt

$$d \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|} = 1 - e^{-\delta \cdot n}$$

ist abhängig einerseits vom Zinsfuss δ, anderseits von der Zeitdauer n. Eine Änderung des Zinsfusses $(\delta \rightarrow \delta')$ kann durch eine entsprechende *Verschiebung der Dauer* $(n \rightarrow n')$ ausgeglichen werden, indem bloss gefordert werden muss, dass

(2) $$\delta' \cdot n = \delta \cdot n'$$

Dann ist sofort

$$d' \cdot \mathsf{a}'_{\overline{n}|} = d \cdot \mathsf{a}_{\overline{n'}|}$$

und es wird

(3) $$\mathsf{a}'_{\overline{n}|} = \frac{d}{d'} \cdot \mathsf{a}_{\overline{n'}|}$$

Es seien die Zeitrentenbarwerte bei einem bestimmten Zinsfuss i für alle Dauern n gegeben. Dann kann man für jeden beliebigen Zinsfuss i' den Zeitrentenbarwert mit Hilfe der Beziehungen (2) und (3) sofort berechnen.

Diese Berechnungsmethode ist wiederum grundsätzlich einfacher als der direkte Weg.

4. Das Zinsfussproblem bei der Leibrente. Lösung des Problems bei einfacher Wahl des Sterbegesetzes.

Sind die Leibrentenbarwerte a_x für alle Alter x zu einem bestimmten Zinsfuss in einer Tafel gegeben, so seien aus dieser Tafel die Barwerte zu einem neuen Zinsfuss i' zu berechnen.

Ist das Sterbegesetz sehr einfach, wie z. B. das Dormoysche Gesetz: $l_x = k \cdot s^x$, die Leibrente a_x also eine einfache Funktion des Zinsfusses:

$$\mathsf{a}_x = \frac{1}{1 - v \cdot s}$$

so ist die Lösung des Problems im wesentlichen die gleiche wie bei der Zeitrente. Es gibt aber Fälle, wo der Barwert der Leibrente nicht leicht in endlicher Form dargestellt werden kann, das Zinsfussproblem aber für die betreffende Überlebensordnung doch exakt lösbar ist.

Achard [3] hat für einen solchen Fall, nämlich für die Moivresche Hypothese und ihre Verallgemeinerung das Problem gelöst:

Es bedeute w das Schlussalter in dem Sinne, dass $lw = 0$; die Überlebensordnung ist dann dargestellt durch:

$$l_x = k\,(w - x)^m$$

Der Barwert der kontinuierlichen Leibrente ergibt sich beim Zinsfuss i zu:

$$\bar{a}_x = \int_0^{w-x} \frac{k\,(w - x - t)^m \cdot e^{\delta\,(w-x-t)} \cdot dt}{k\,(w - x)^m \cdot e^{\delta\,(w-x)}}$$

Setzt man: $w - x - t = y$, so wird der Leibrentenbarwert:

$$\bar{a}_x = \int_0^{w-x} \frac{y^m \cdot e^{\delta \cdot y} \cdot dy}{(w - x)^m\, e^{\delta\,(w-x)}}$$

Substituieren wir noch: $\delta \cdot y = t$, so erhält man:

$$\delta \cdot \bar{a}_x = \int_0^{(w-x)\,\delta} \frac{t^m \cdot e^t \cdot dt}{(w - x)^m \cdot \delta^m \cdot e^{(w-x)\,\delta}}$$

Zur Abkürzung sei: $(w - x) \cdot \delta = h$

Es wird damit schliesslich:

(4)
$$\delta \cdot \bar{a}_x = \int_0^h \frac{t^m \cdot e^t \cdot dt}{h^m \cdot e^h}$$

für den Zinsfuss i und das Alter x.

Aus (4) ergibt sich, dass das Produkt $\delta \cdot \bar{a}_x$ einzig abhängt vom Parameter h, der seinerseits ein Produkt aus zwei Faktoren ist, dem Zinsfuss δ und der Zeitstrecke $w - x$.

Wir können schreiben:

(5)
$$\delta \cdot \bar{a}_x = F(h)$$

Für ein bestimmtes Alter x und einen bestimmten Zinsfuss δ sei der Parameter h ermittelt zu

$$h = (w - x) \cdot \delta \quad \text{und} \quad \delta \cdot \bar{a}_x(\delta) = F(h)$$

Für das gleiche Alter x und einen neuen Zinsfuss δ' ergibt sich:

$$h_1 = (w - x) \cdot \delta' \quad \text{und} \quad \delta' \cdot \bar{a}_x(\delta') = F(h_1)$$

Zu diesem Resultat können wir auch gelangen durch eine Verschiebung des Alters x bei Beihaltung des Zinsfusses δ.

Sei nämlich: $\qquad h_2 = (w - x') \cdot \delta$

so wird dann und nur dann $h_1 = h_2$, wenn:

(6)
$$x' = \frac{\delta'}{\delta} \cdot x + w\left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right)$$

Es wird damit:

$$\delta' \cdot \overline{a}_x(\delta') = F(h_1) = F(h_2) = \delta \cdot \overline{a}_{x'}(\delta)$$

also schliesslich:

$$\overline{a}_x(\delta') = \frac{\delta}{\delta'} \cdot \overline{a}_{x'}(\delta) \tag{7}$$

Durch die in Formel (6) angegebene *Verschiebung des Alters* ist für diesen Fall das Zinsfussproblem sehr einfach gelöst.

Die Lösung ist unabhängig vom Grade m der Parabel; sie gilt also auch im Spezialfall $m = 1$, also für die Moivresche Hypothese:

$$l_x = k(w - x)$$

Wie aus unserer Darstellung ersichtlich ist, spielt die sogenannte Lebensergänzung $w - x$ bei der Lösung des Zinsfussproblems die ausschlaggebende Rolle.

Ferner sei erwähnt, dass sich die Ableitung ausdehnen lässt auf den Fall, dass die Überlebensordnung lautet:

$$l_x = k \cdot e^{-sx} \cdot (w - x)^m$$

indem ganz einfach der Zinsfuss δ durch den Zinsfuss:

$$\Delta = \delta + s$$

zu ersetzen ist. Diese Erweiterung des Achardschen Satzes verdankt man *Poterin du Motel* [5].

II. Historischer Überblick.

Die bisher im Druck erschienenen Arbeiten über das Zinsfussproblem lassen sich wohl am besten überblicken, wenn man sie nicht bloss chronologisch, sondern nach Grundsätzen und Methoden zusammenstellt. Eine derartige historische Zusammenfassung sei hier versucht.

Das Literaturverzeichnis möge ergänzend als kleiner chronologischer Überblick dienen.

1. Berechnung des Versicherungswertes durch Interpolation.

Wenn für 3 oder mehr verschiedene Zinsfüsse die Versicherungswerte schon vorliegen, so kann man, wie dies *L. Fontaine* [2] dargelegt hat, folgendermassen vorgehen.

Wir benützen für die Differenzenrechnung die folgende Bezeichnungsweise:

Die Funktionswerte seien:

$$f(i-nh), \ldots f(i), f(i+h), \ldots$$

Die ersten Differenzen sind dann wie folgt bezeichnet:

$$f(i+(n+1)h) - f(i+nh) = \Delta^1 f(i+nh)$$

und allgemein ist:

$$\Delta^{m-1} f(i+(n+1)h) - \Delta^{m-1} f(i+nh) = \Delta^m f(i+nh)$$

eine m te Differenz.

Es seien die Versicherungswerte für m verschiedene Zinsfüsse bekannt; dann lassen sich die Differenzen bis zu der einzigen $(m-1)$ter Ordnung berechnen. L. Fontaines interessanter Gedanke besteht nun darin, unter der angenähert zutreffenden Annahme, dass die m te Differenz konstant sei, diese mit Hilfe des für $i = 0$ leicht zu bestimmenden Versicherungswertes $f(i = 0)$ noch selbst zu berechnen. Die dazu am besten geeignete Interpolationsformel lautet:

$$(8) \qquad f(0) = f(i - nh) = f(i) - \binom{n}{1} \cdot \Delta^1 f(i) + \\ + \binom{n+1}{2} \cdot \Delta^2 f(i) + - + \ldots + (-1)^m \cdot \binom{n+m-1}{m} \cdot \Delta^m f(i)$$

In der obigen Gleichung (8) sind alle Grössen bis auf $\Delta^m f(i)$ bekannt, und daher lässt sich $\Delta^m f(i)$ aus (8) berechnen.

Indem man nun von $\Delta^m f(i)$ rückwärts aufsummiert und damit das Differenzenschema ergänzt, kennt man dann alle nötigen Differenzen, um jetzt mit der jeweilen geeignetsten Interpolationsformel den Versicherungswert für jeden beliebigen Zinsfuss ganz einfach berechnen zu können. In den meisten Fällen wird es möglich sein, den gesuchten Versicherungswert zum neuen Zinsfuss direkt aus dem ergänzten Differenzenschema abzulesen.

Aber aus den nachfolgenden Gründen wird die Bestimmung von $\Delta^m f(i)$ mittels der Gleichung (8) in der Regel einen *sehr ungenauen* Wert für $\Delta^m f(i)$ liefern.

Das Intervall von i bis $i - nh = 0$ ist bei der Extrapolation zur Bestimmung von $\Delta^m f(i)$ sehr gross; daher kann, wenn auch $\Delta^m f(i)$ für die Zinsfüsse, deren

Versicherungswerte gegeben sind, annähernd konstant ist, doch die Variation von $\Delta^m f\,(i + nh)$ bis zu $i = 0$ beträchtlich gross sein. Dieser Umstand wirkt sich schlimm aus, weil in der Regel die Versicherungswerte sich am stärksten ändern, wenn der Zinsfuss gegen Null strebt.

Beispiel: Es sei die beim Alter 65 lebenslängliche Leibrente für alle möglichen Zinsfüsse zu bestimmen, wenn sie bekannt ist für 4 verschiedene Zinsfüsse; Grundlage: Text-Book.

In der nachfolgenden Tabelle sind die fettgedruckten Werte als gegeben zu betrachten.

Wir dürfen die 2. Differenz als konstant annehmen und ergänzen dann das Schema. Wo überhaupt ungenaue Werte sich ergeben, sind die genauen Werte in Klammern beigefügt.

i	Funktionswert: a_{65}	1. Differenz: $\Delta^1 a_{65}$	2. Differenz: $\Delta^2 a_{65}$
0,0 %	$\overset{0}{e}_{65} - 0{,}5 = 10{,}479$		
...	......	......	......
3,0 %	8,391 (8,395)		
		— 0,277 (-0,281)	
3,5 %	**8,114**		0,013 (0,017)
		— 0,264	
4,0 %	**7,850**		**0,013**
		— 0,251	
4,5 %	**7,599**		**0,013**
		— 0,238	
5,0 %	**7,361**		0,013
		— 0,225	
5,5 %	7,136		0,013
		— 0,212	
6,0 %	6,924		

Der Wert von a_{65} für $i = 0$ ist: $\overset{0}{e}_{65} - 0{,}5$; wir berechnen nach der Methode von L. Fontaine die 3. Differenz aus dem Wert von a_{65} für $i = 0$ mittels der Gleichung (8):

$$(8a) \qquad f(0) = \overset{\circ}{e}_{65} - 0{,}5 = 10{,}479 = 8{,}114 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}264 + $$
$$+ \binom{8}{2} \cdot 0{,}013 - \binom{9}{3} \cdot \Delta^3 a_{65} \, (3\tfrac{1}{2}\ \%)$$

Es ergibt sich: $\Delta^3 a_{65} = -0{,}002$ (der richtige Wert ist $\Delta^3 a_{65} = 0{,}000$, wie dies unsere Tabelle beweist).

In unserem Beispiel erhalten wir für alle möglichen Zinsfüsse von 3,5 % bis 6 % den genauen Versicherungswert, während die aus $\overset{\circ}{e}_{65} - 0{,}5$ ermittelte Differenz uns bedeutend schlechtere Resultate liefern würde. Einzig, wenn wir den Versicherungswert für einen Zinsfuss zwischen Null und 3,5 % kennen wollen, empfiehlt es sich, mit der aus $\overset{\circ}{e}_{65} - 0{,}5$ ermittelten Differenz zu rechnen.

2. Das Zinsfussproblem bei der Erlebensfallversicherung und seine Erweiterung auf die Leibrente.

${}_tE_x(i) = \dfrac{D_{x+t}}{D_x}$ ist der Wert der Versicherung eines x-jährigen, der sich für den Erlebensfall nach t Jahren die Einheit zu sichern wünscht.
Für einen neuen Zinsfuss i' wird:

$${}_tE'_x = \frac{D'_{x+t}}{D'_x} = \frac{l_{x+t} \cdot v'^t}{l_x} = \frac{l_{x+t} \cdot v^t}{l_x} \cdot \frac{v'^t}{v^t}$$

$$(9) \qquad {}_tE'_x = {}_tE_x \cdot \left(\frac{v'}{v}\right)^t$$

Die Leibrente kann man als Summe von Erlebensfallversicherungen ansehen:

$$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}} = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_{n-1}E_x$$

Die temporäre Leibrente zum neuen Zinsfuss i' kann man damit wie folgt darstellen:

$$(10) \quad \mathrm{a}'_{x:\overline{n|}} = {}_0E_x + {}_1E_x \cdot \frac{v'}{v} + {}_2E_x \cdot \left(\frac{v'}{v}\right)^2 + \ldots + {}_{n-1}E_x \cdot \left(\frac{v'}{v}\right)^{n-1}$$

E. Sos [21] hat diese Darstellung gegeben, die *E. Meyer* [21] noch wie folgt ergänzt hat:

$$(11) \quad \mathrm{a}'_{x:\overline{n|}} = \left(\frac{v'}{v}\right)^{n-1} \cdot \mathrm{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{i'-i}{1+i} \cdot \sum_{m=1}^{m=n-1} \mathrm{a}_{x:\overline{m|}} \cdot \left(\frac{v'}{v}\right)^m$$

Die Methode von Sos und Meyer besteht also in der Verwendung der Hilfsfaktoren $\left(\frac{v'}{v}\right)^t$. Sie ist nicht viel einfacher als die direkte Berechnung des Versicherungswertes mit Hilfe der Kommutationszahlen zum Zinsfuss i'.

Eine ähnliche Betrachtung hat *Vaz Dias* [9] angestellt. Der Leibrentenwert zum neuen Zinsfuss i' kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$a'_x = \frac{\frac{v'}{v} \cdot D_{x+1} + \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \cdot D_{x+2} + \ldots + \left(\frac{v'}{v}\right)^{w-x} \cdot D_w}{D_x}$$

Es sei $i' > i$; dann kann man a'_x als Summe einer konstanten und einer veränderlichen Leibrente zum Zinsfuss i wie folgt deuten: An die Rentnergesamtheit wird ausbezahlt:

$$l_{x+1} : \frac{v'}{v}$$

$$l_{x+2}: \frac{v'}{v} - \left[\frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right]$$

$$l_{x+3}: \frac{v'}{v} - \left[\frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] - \frac{v'}{v}\left[\frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] \text{usw.};$$

setzt man nun, mit Ausnahme der ersten Summanden, in den einzelnen Gliedern den Faktor $\frac{v'}{v} = 1$, eine ziemlich grobe Annäherung, die vermutlich nicht ganz gerechtfertigt ist, so kann man den Barwert wie folgt darstellen:

$$a'_x = \frac{\frac{v'}{v} N_{x+1} - \left[\frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] \cdot S_{x+2}}{D_x}$$

Wird im Zähler noch $\left[\frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] \cdot N_{x+1}$ addiert und subtrahiert, so erhält man:

(12a)
$$a'_x = \frac{\left[\frac{2v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] \cdot N_{x+1} - \left[\frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right] \cdot S_{x+1}}{D_x}$$

oder:

(12b) $$a'_x = \alpha \cdot a_x - \beta \cdot (I\,a)_x$$

Dabei sind: $$\alpha = \frac{2v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

$$\beta = \frac{v'}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

Eine analoge Formel ergibt sich, wenn $i' < i$ ist. Dieser Gesichtspunkt zur Behandlung des Problems hat von andern Bearbeitern (J. Meikle bis Poukka) eine viel durchsichtigere und elegantere Behandlung gefunden.

Über die Güte der Diatzschen Formel orientiert das folgende Beispiel:

Berechnung der Barwerte a_x, RF für $i = 3^1/_4\,\%$ aus den Barwerten a_x, RF $3\frac{1}{2}\,\%$ bzw. $3\,\%$.

Alter x	Berechnet aus a_x zu $3{,}5\,\%$	genauer Wert a_x ; $3{,}25\,\%$	Berechnet aus a_x zu $3\,\%$
20	21,083	21,109	21,080
30	19,079	19,097	19,077
40	16,412	16,422	16,411
60	9,695	9,697	9,695
70	6,313	6,314	6,313

3. Zurückführung des Zinsfussproblems der Leibrente auf das der Zeitrente, mit Korrektionen.

Die folgenden Untersuchungen stützen sich im Grunde auf den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Wir halten uns dabei an den Gedankengang von *Louis Weber* [16].

Die kontinuierliche temporäre Zeitrente wird dargestellt durch:

$$(i) \qquad \bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot dt = v^\xi \cdot n \,;\, 0 < \xi < n$$

$$(i') \qquad \bar{a}'_{\overline{n}|} = \int_0^n v'^t \cdot dt = v'^\eta \cdot n \,;\, 0 < \eta < n$$

$$\xi = \eta = \nu$$

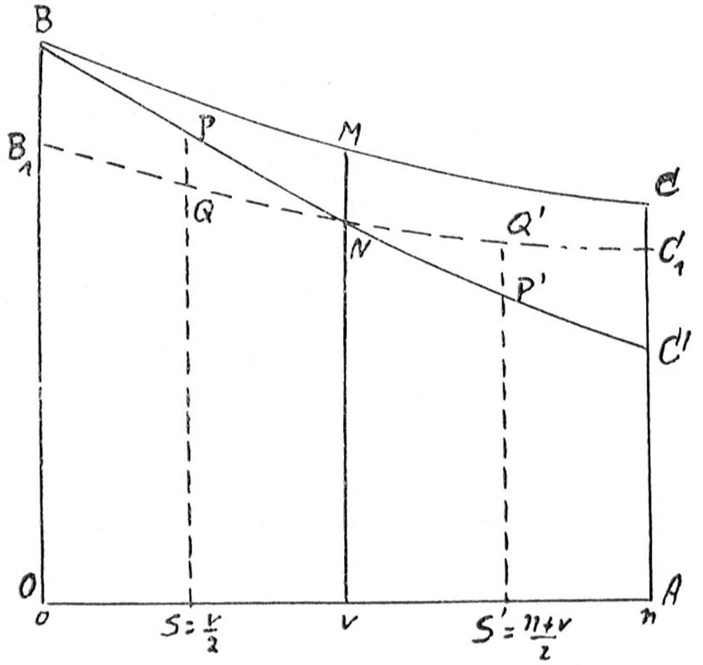

B
B1
P
M
C
Q
Q'
N
C1
P'
C'
O
A
o
S = v/2
v
S' = n+v/2
n

Fig. 1.

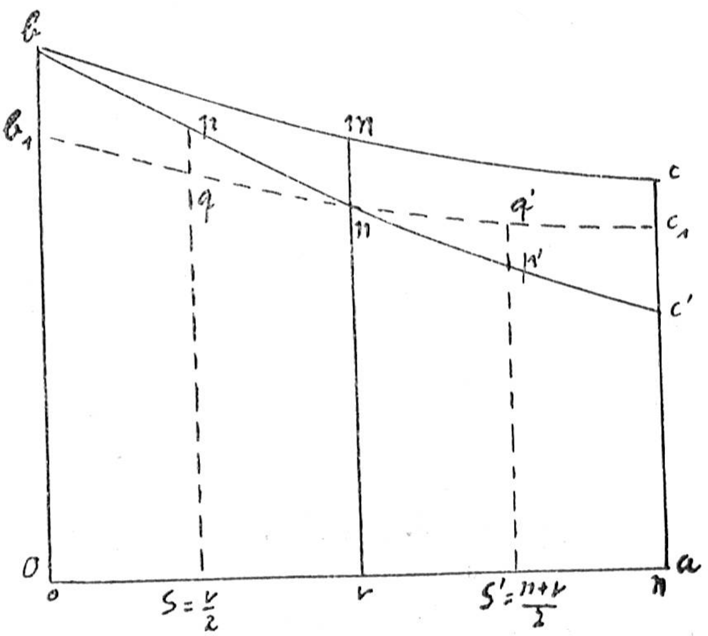

b
b1
p
m
c
q
q'
n
c1
p'
c'
O
a
o
S = v/2
v
S' = n+v/2
n

Fig. 2.

Bedeuten in der Figur 1 · mit $i' > i$:

der Bogen BC $\quad y = v^t$

die Kurve BC′ $\quad y = v'^t$

die Kurve B_1C_1 $\quad y = k \cdot v^t$

In der Figur 2:

die Kurve bc $\quad y = {}_tp_x \cdot v^t \qquad {}_tp_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$

die Kurve bc′ $\quad y = {}_tp_x \cdot v'^t$

die Kurve b_1c_1 $\quad y = k \cdot {}_tp_x \cdot v^t$

Für ein bestimmtes ν wird die Gleichung gelten:

$$\frac{\bar{a}'_{\overline{n}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}} = \frac{v'^\nu}{v^\nu} = k$$

Wäre der Einfluss des Zinsfusses auf die Leibrente genau der gleiche wie auf die Zeitrente, so würde:

$$\bar{a}'_{x:\overline{n}|} = k \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

Diese Berechnung von $\bar{a}'_{x:\overline{n}|}$ ist zu ungenau; sie kann aber wie folgt durch ein Korrektionsglied verbessert werden:

In Figur 1 ist ν mittels des Mittelwertsatzes so bestimmt, dass die Flächeninhalte der beiden Dreiecke (BB_1N), $(NC'C_1)$ einander gleich sind. Für die entsprechenden Flächen der Leibrenten in Fig. 2 gilt aber:

$$(bb_1n) > (nc'c_1)$$

Es gelten mit den Bezeichnungen der Fig. 1, 2 die folgenden Gleichungen:

$$\overline{pq} = \overline{PQ} \cdot {}_{\frac{\nu}{2}}p_x \quad ; \quad \overline{q'p'} = \overline{Q'P'} \cdot {}_{\frac{n+\nu}{2}}p_x$$

Näherungsweise lassen sich die Dreiecksflächen wie folgt berechnen:

$$(B B_1 N) = \nu \cdot \overline{PQ} = (n - \nu) \cdot \overline{Q'P'} = (N C' C_1)$$

und $$(bb_1 n) = \nu \cdot \overline{pq}$$

$$(n c' c_1) = (n - \nu) \cdot \overline{q'p'}$$

und da

$$\frac{\overline{pq}}{\overline{q'p'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{Q'P'}} \cdot \frac{l_{x+\frac{\nu}{2}}}{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}} = \frac{n-\nu}{\nu} \cdot \frac{l_{x+\frac{\nu}{2}}}{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}}$$

so wird

$$\frac{(bb_1 n)}{(n c' c_1)} = \frac{l_{x+\frac{\nu}{2}}}{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}}$$

Die letzte Gleichung lässt sich umformen zu:

$$(b b_1 n) - (n c' c_1) = (b b_1 n) \cdot \left(1 - \frac{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}}{l_{x+\frac{\nu}{2}}}\right)$$

und stellt die Differenz der beiden Dreiecksflächen dar und ist somit das Korrektionsglied zum ersten Näherungswert $k \cdot \overline{a}_{x:\overline{n}|}$.

Es ist näherungsweise: $(b b_1 n) = \frac{b b_1}{2} \cdot \nu = (1 - k) \cdot \frac{\nu}{2}$

so dass das Korrektionsglied lautet:

$$\frac{\nu}{2} \cdot (1-k) \cdot \left(1 - \frac{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}}{l_{x+\frac{\nu}{2}}}\right)$$

Damit erhalten wir als endgültige Näherungsformel für $\overline{a}'_{x:\overline{n}|}$:

$$\text{(13)} \qquad \overline{a}'_{x:\overline{n}|} = k \cdot \overline{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{\nu}{2}(1-k) \cdot \left(1 - \frac{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}}{l_{x+\frac{\nu}{2}}}\right)$$

Darin lassen sich die Grössen ν und k mittels der folgenden Gleichungen berechnen:

$$\text{(13 a)} \quad \nu = \frac{\log \overline{a}'_{\overline{n}|} - \log \overline{a}_{\overline{n}|}}{\log (1+i) - \log (1+i')} \; ; \; k = \frac{\overline{a}'_{\overline{n}|}}{\overline{a}_{\overline{n}|}}$$

Analoge Formeln gelten für $i' < i$ und für Verbindungsrenten. Obschon die Formel für kontinuierliche Renten abgeleitet ist, kann man sie, ohne einen grossen Fehler zu begehen, auch auf die gewöhnlichen Renten anwenden. Für sehr junge und sehr hohe Alter stimmt die Formel nicht mehr gut; es müssten schon etwas gekünstelte Korrekturen an ihr angebracht werden.

Beispiel:

Übergang von RF 4 % zu RF 4,25 % für $a_{20:\overline{40}|}$

Berechneter Wert:	$a'_{20:\overline{40}|} = 17{,}079$
genauer Wert:	$a_{20:\overline{40}|}\,(4^1/_4\,\%) = 17{,}077$
Fehler:	$\Delta = -0{,}002$

4. Verwendung des Gedankens, dass die lebenslängliche Leibrente annähernd gleich einer Zeitrente von der Dauer der mittleren Lebensdauer ist.

Es ist bekannt, dass man versucht hat, die lebenslängliche Leibrente gleichzusetzen einer Zeitrente von der Dauer der mittleren künftigen Lebenserwartung eines Mitgliedes der betrachteten Personengesamtheit. Wäre dies angängig, so würde damit auch das Zinsfussproblem für die Leibrente gelöst sein.

In *Landrés* mathematisch-technischen Kapiteln [25] sind für die nachschüssige Leibrente und die unvollständige mittlere Lebensdauer e_x folgende Sätze begründet:

1. Der Wert einer Leibrente ist kleiner als der Wert der während der mittleren Lebensdauer zahlbaren Zeitrente.
2. Die Einmalprämie für ein versichertes Kapital im Ablebensfalle ist grösser als der Barwert desselben Kapitals, welches am Ende der mittleren Lebensdauer ausbezahlt werden soll.

Für kontinuierliche Werte kann man dies leicht beweisen mit Hilfe einer Ungleichung, welche *Steffensen* [14] abgeleitet hat. Die Ungleichung lautet:

$$(14) \qquad \int_{b-k}^{b} f(t) \cdot dt \leqq \int_{a}^{b} f(t) \cdot \varphi(t) \cdot dt \leqq \int_{a}^{a+k} f(t) \cdot dt$$

mit den Bedingungen, dass für $a \leqq t \leqq b$ die Funktion $f(t)$ in diesem Intervalle nie zunimmt und $0 \leqq \varphi(t) \leqq 1$ bleibt; dabei ist:

$$k = \int_{a}^{b} \varphi(t) \cdot dt$$

In guter Annäherung gilt:

$$\overset{0}{e}_x = \bar{e}_x$$

Setzt man in der Ungleichung (14):

$$k = \int_0^\infty {}_tp_x \cdot dt = \bar{e}_x$$

ferner

$$f(t) = v^t \quad \text{und} \quad \varphi(t) = {}_tp_x$$

so folgt:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt < \int_0^{\bar{e}_x} v^t \cdot dt \tag{15 a}$$

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{\bar{e}_x}|} \tag{15 b}$$

Dieses Resultat lässt sich auf die gewöhnlichen Leibrentenbarwerte übertragen; aus der Gleichung:

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \cdot \bar{a}_x$$

folgt auch sofort der 2. oben erwähnte Satz;

denn es ist

$$\bar{A}_x > 1 - \delta \cdot \bar{a}_{\overline{\bar{e}_x}|} = 1 - \delta \cdot \frac{1 - v^{\bar{e}_x}}{\delta} = v^{\bar{e}_x}$$

Der eben behandelte Gesichtspunkt kann, als erste Annäherung betrachtet, den Weg zu verbesserten Resultaten weisen. Im folgenden wird die oben erwähnte, schöne Arbeit von *Steffensen* [14] noch kurz durchgangen:

I. Der Wert der nachschüssigen Leibrente ist gleich dem Wert einer Zeitrente von einer gewissen Dauer m:

$$a_x = \frac{1 - v^m}{i} \tag{16}$$

woraus

$$m = -\frac{\log(1 - i \cdot a_x)}{\log(1 + i)}$$

Der Parameter m wird wenig von e_x abweichen, und m wird eine Funktion des Zinsfusses i sein. Entwickelt man $m(i)$ nach Potenzen von i, so erhält man:

$$m = e_x - i \cdot \varepsilon_x + \ldots \tag{17}$$

Die weiteren Potenzen von i vernachlässigen wir; dabei bedeutet:

$$\varepsilon_x = \sum_{t=1}^{t=\infty} t \cdot {}_t p_x - \frac{e_x}{2}(e_x + 1) \tag{17 a}$$

Beispiel:

Die a_x sind mit den Formeln (16), (17), (17 a) berechnet nach den verwendeten Grundlagen im Text-Book. In der nachfolgenden Tabelle sind die Fehler zusammengestellt, die sich zwischen den genauen Werten und den Näherungswerten der Steffensenschen Formel (16) ergeben.

x	3% Δa_x	4% Δa_x	5% Δa_x	6% Δa_x
20	— 0,10	— 0,11	— 0,11	— 0,10
40	0,01	0,01	0,01	0,02
60	0,02	0,04	0,06	0,08
80	0,01	0,02	0,02	0,04

Man erkennt, dass die Fehler noch recht beträchtlich sind.

Eine bessere Näherungsformel erhält man auf analoge Weise folgendermassen:

Es gilt die Gleichung:

$$(1 + i')^{-t} = (1 + hv)^{-t} \cdot v^t; \quad h = i' - i$$

Setzt man in der Ungleichung (14):

$$f(t) = (1 + hv)^{-t}; \quad \varphi(t) = v^t \cdot {}_tp_x,$$

so wird:

$$k = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt = \overline{a}_x$$

und die Ungleichung liefert nun:

$$(18\,a) \quad \overline{a}'_x = \int_0^\infty (1 + hv)^{-t} \cdot v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt \leqq \int_0^{\overline{a}_x} (1 + hv)^{-t} \cdot dt$$

Früher hatten wir die folgende entsprechende Ungleichung:

$$(15\,a) \qquad \overline{a}_x \leqq \int_0^{\overline{e}_x} v^t \cdot dt$$

und daraus geschlossen, dass $\overline{a}_x$ *gleich* einer Zeitrente ist, deren Dauer m wenig von der obern Grenze $\overline{e}_x$ des Integrals in (15 a) abweicht. Wir dürfen nun in der Gleichung (18 a) den entsprechenden Abzinsungsfaktor: $(1 + hv)^{-1}$ näherungsweise durch $(1 + h)^{-1}$ ersetzen und können in gleicher Weise wie oben die Leibrente $\overline{a}'_x$ zum Zinsfuss i' gleichsetzen einer Zeitrente mit dem Zinsfuss h, deren Dauer n dann wieder wenig von der obern Grenze $\overline{a}_x$ des Integrals in der Gleichung (18 b) abweicht:

$$(19\,a) \qquad \overline{a}'_x = \frac{1 - (1+h)^{-n}}{ln\,(1+h)}$$

oder, wenn man in der Gleichung (19 a) nach n auflöst:

$$(19\,b) \qquad n = - \frac{\log\,(1 - ln\,(1+h) \cdot \overline{a}_x)}{\log\,(1+h)}$$

Es ergeben sich die genau gleichen Resultate, wenn man von den Summenungleichungen ausgeht; wir schreiben die folgenden Formeln daher für die gewöhnlichen Leibrenten.

Dann lautet die modifizierte Gleichung (19 b):

$$(19\,c) \qquad n = - \frac{\log\,(1 - h \cdot a_x)}{\log\,(1+h)}$$

Die Dauer n wird wenig von a_x abweichen und ist eine Funktion von h. Wenn wir wiederum n nach Potenzen von h entwickeln und die zweite und höhere Potenzen von h vernachlässigen, so erhalten wir:

$$(20\,a) \qquad n = a_x - h \cdot \alpha_x + \dots$$

Dabei ist:

$$(20\,b) \qquad \alpha_x = \frac{v \cdot S_{x+1}}{D_x} + 0{,}125 - \frac{1}{2}\left(a_x + \frac{1}{2}\right)^2$$

In α_x ist das erste Glied: $\frac{v \cdot S_{x+1}}{D_x}$ gegenüber den zwei folgenden sehr gross und darf in einer Annäherungsformel allein berücksichtigt werden. Setzt man nun das entsprechende

$$n = a_x - \frac{h\, v \cdot S_{x+1}}{D_x}$$

in die Gleichung (19 a) ein und entwickelt nach Potenzen von h, so ergibt sich die folgende weitere Annäherungsformel für a_x':

$$a_x' = a_x - \frac{h \cdot v \cdot S_{x+1}}{D_x} \tag{21}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind auf Grundlage von H^M, wenn die Versicherungswerte für 3,5 % gegeben sind, die a_x' für 3 % und 4 % berechnet; einerseits nach den Formeln (19 a) und (20 a), anderseits nach Formel (21). Dabei ergaben sich folgende Fehler:

x	mit (19a) und (20a)		(mit 21)	
	Δa_x 3 %	Δa_x 4 %	Δa_x 3 %	Δa_x 4 %
20	0,02	0,01	0,12	0,11
30	0,02	0,01	0,09	0,08
40	0,01	0,01	0,06	0,05
50	0,01	0,00	0,03	0,03
60	0,00	0,00	0,01	0,01
70	0,00	0,00	0,01	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00

Die Fehler sind, wie man sieht, gegenüber den Ergebnissen der Formeln (16), (17), (17 a) wesentlich zurückgegangen; die durch die Formeln (19 a) und (20 a) dargestellte Methode ist schon recht befriedigend.

5. Verwendung von Ungleichungen für das Zinsfussproblem.

Schon in der vorhin beschriebenen Arbeit hat Steffensen allgemeine Ungleichungen benutzt, die bei gewisser Wahl der Funktionen, und wenn das Intervall der Variablen nicht zu gross ist, annähernd in Gleichungen übergehen; in einem solchen Fall ist es dann manchmal möglich, eine Näherungsformel für das Zinsfussproblem aufzustellen.

Dieser Weg schlägt *Birger Meidell* [15] ein. Er beweist zuerst die Gültigkeit der folgenden Ungleichung:

$$(22)\quad \int_a^b \chi(t)\cdot\psi\left[\alpha(t)\right]\cdot dt \geqq \int_a^b \chi(t)\cdot dt\cdot\psi\left\{\frac{\int_a^b \chi(t)\cdot\alpha(t)\cdot dt}{\int_a^b \chi(t)\cdot dt}\right\}$$

mit den Bedingungen, dass im Intervall (a, b) die Funktion $\chi(t)$ stets positiv ist, $\psi(t)$ stets konvex, d. h. ihre 2. Ableitung stets positiv ist.

$\alpha(t)$ ist eine ganz beliebige Funktion. Wenn $\psi''(t)$ stets negativ ist, gilt das Zeichen $\leqq$ anstatt $\geqq$.

Für $\psi(t) = m\cdot t$ gilt das Gleichheitszeichen; daraus folgt, dass für eine Funktion $\psi(t)$, die annähernd linear ist, oder wenn das Intervall (a, b) klein ist, (22) annähernd eine Gleichung ist.

Die Ungleichung (22) kann in diejenige von Steffensen (14) übergeführt werden; für beide gelten auch analoge Summen-Ungleichungen, was dann zu den Beziehungen zwischen den gewöhnlichen Rentenbarwerten führt.

Wir können setzen:

$$v' = v^{1+\varepsilon}$$

also

$$1 + \varepsilon = \frac{ln\, v'}{ln\, v} = \frac{\delta'}{\delta}$$

ε ist eine kleine Grösse und mit $\delta' \lesseqqgtr \delta$ gilt $\varepsilon \lesseqqgtr 0$.

In der Ungleichung (22) setzen wir

$$\alpha\,(t) = v^t;\ \psi\,(t) = t^{1+\varepsilon};\ \chi\,(t) = {}_tp_x$$

Dann wird $\qquad \psi\,(\alpha\,(t)) = (v^t)^{1+\varepsilon} = v'^t$

$\chi\,(t) = {}_tp_x$ ist stets positiv;

$\dfrac{d^2\,\psi\,(t)}{dt^2} = \varepsilon\,(1+\varepsilon)\cdot t^{\varepsilon-1}$ ist stets $\lesseqqgtr 0$, je nachdem $\delta' \lesseqqgtr \delta$ ist. Die für die Ungleichung (22) zu fordernden Bedingungen sind also erfüllt.

Die Ungleichung (22) lautet nun entsprechend den Fällen $\delta' \lesseqqgtr \delta$:

$$\overline{a}'_x = \int_0^\infty v'^t\cdot {}_tp_x\cdot dt \lesseqqgtr \int_0^\infty {}_tp_x\cdot dt\cdot \left\{\frac{\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_x\cdot dt}{\int_0^\infty {}_tp_x\cdot dt}\right\}^{\frac{\delta'}{\delta}}$$

Die analoge Summen-Ungleichung lautet wie folgt:

$$a'_x = \sum_{t=1}^{t=\infty} v'^t \cdot {}_tp_x \lesseqgtr \sum_{t=1}^{t=\infty} {}_tp_x \cdot \left\{ \frac{\sum\limits_{t=1}^{t=\infty} v^t \cdot {}_tp_x}{\sum\limits_{t=1}^{t=\infty} {}_tp_x} \right\}^{\frac{\delta'}{\delta}}$$

oder:

$$\text{(23 } a\text{)} \qquad a'_x \lesseqgtr e_x \cdot \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\frac{\delta'}{\delta}}$$

$\frac{\delta'}{\delta}$ ist annähernd gleich 1, $\psi(t)$ ist also annähernd eine lineare Funktion von t; man darf damit in (23 a) das Gleichheitszeichen setzen und erhält die folgende Annäherungsformel:

$$\text{(23 } b\text{)} \qquad a'_x = e_x \cdot \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\frac{\delta'}{\delta}}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die a'_x nach dieser Formel aus den als bekannt vorausgesetzten Versicherungswerten zu 4 % berechnet; dabei ergaben sich folgende Fehler (Grundlagen: H^M 4 %):

x	3 %		3,5 %		5 %	
	a'_x	Δ	a'_x	Δ	a'_x	Δ
20	22,73	— 0,66	20,58	— 0,34	15,34	0,73
40	17,44	— 0,26	16,28	— 0,18	13,16	0,31
60	10,28	— 0,06	9,85	— 0,03	8,69	0,08

Dies sind verhältnismässig grosse Abweichungen.

Eine weitere Formel erhält Meidell [15] in gleicher Weise wie folgt:

Es ist:

$$\overline{a}'_x = \int_0^\infty v^t \cdot (1 + hv)^{-t} \cdot {}_tp_x \cdot dt \; ; \; h = i' - i$$

Man setzt in der Ungleichung (22):

$$\alpha(t) = t; \; \psi(t) = (1 + hv)^{-t}; \; \chi(t) = v^t \cdot {}_tp_x;$$

$$\chi(t) = v^t \cdot {}_tp_x \text{ ist stets positiv und}$$

$\psi''(t) = (1 + hv)^{-t} \left[ln\,(1 + hv)\right]^2$ ist stets positiv; die für die Ungleichung (22) zu fordernden Bedingungen sind erfüllt. (22) nimmt nun die Form an:

$$\overline{a}'_x = \int_0^\infty (1 + hv)^{-t} \cdot v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt \geqq \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt \cdot \left(1 + hv\right)^{-\frac{\int_0^\infty t \cdot {}_tp_x \cdot v^t \cdot dt}{\int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot dt}}$$

$$\overline{a}'_x \geqq \overline{a}_x \cdot \left(1 + hv\right)^{-\frac{\int_0^\infty t \cdot D_{x+t} \cdot dt}{\int_0^\infty D_{x+t} \cdot dt}}$$

Analog lautet die entsprechende Summen-Ungleichung:

$$a'_x \geqq a_x \cdot \left(1 + hv\right)^{-\frac{\sum_{t=1}^{t=\infty} t \cdot D_{x+t}}{\sum_{t=1}^{t=\infty} D_{x+t}}}$$

so dass Meidell die folgende Annäherungsformel erhält:

(24) $$a'_x = a_x \cdot \left(1 + hv\right)^{-\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}$$

Entwickelt man a'_x nach h bis und mit zur ersten Potenz von h, so erhält man genau die Formel (21) von Steffensen:

$$a'_x = a_x - \frac{h \cdot v \cdot S_{x+1}}{D_x}$$

Beispiel:

Die Versicherungswerte seien für $i = 3{,}5\ \%$ bekannt; berechnet sind die a'_x für 3 % und 4 % nach der Formel (24). (Grundlagen: H^M).

x	3 %		4 %	
	a'_x	Δ	a'_x	Δ
20	22,06	0,04	18,63	0,03
40	17,16	0,02	15,12	0,02
60	10,22	0,00	9,45	0,00
80	3,70	0,00	3,57	0,00

Die Formel lässt sich auch auf die temporären Leibrenten und die Ablebensfallversicherung anwenden; für die temporäre vorschüssige Leibrente z. B. hat man den Exponenten $\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$ der Formel (24) durch

$$\frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

zu ersetzen.

Die folgende Tabelle zeigt, wie gering die Fehler für die temporäre Rente ausfallen.

Die Versicherungswerte für 3,5 % seien als bekannt vorausgesetzt; Grundlagen: H^M; berechnet sind die $a'_{x:\overline{20}|}$ nach der Formel:

(25)
$$a'_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} \cdot (1 + hv) - \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

x	3%		4%	
	$a'_{x:\overline{20}|}$	Δ	$a'_{x:\overline{20}|}$	Δ
20	14,439	0,005	13,351	0,003
40	13,727	0,005	12,722	0,003
60	10,601	0,003	9,951	0,002

Die hier zur Verwendung kommende Methode liefert schon eine gute Genauigkeit und erfordert zugleich verhältnismässig wenig Rechnung.

6. Das Zinsfussproblem, wenn die Überlebensordnung das Makehamsche Gesetz befolgt.

Hochart [13] hat folgende theoretisch sehr schöne Abhandlung geschrieben.

Die Anzahl der Lebenden ist nach dem Makehamschen Gesetz:

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Person, nach t Jahren noch zu leben, ist:

$$ {}_t p_x = s^t \cdot g^{c^x (c^t - 1)} $$

und die Wahrscheinlichkeit für N gleichaltrige Personen derselben Überlebensordnung, nach t Jahren noch alle zu leben, beträgt:

$$ {}_t p_x^{(N)} = s^{N \cdot t} \, g^{N c^x (c^t - 1)} $$

Die Formel für die Erlebensfallversicherung lautet:

$$ {}_t E_x = v^t \cdot s^t \cdot g^{c^x (c^t - 1)} \text{ zum Zinsfuss } i $$

$$ {}_t E'_x = v'^t \cdot s^t \cdot g^{c^x (c^t - 1)} \text{ zum Zinsfuss } i' $$

oder anders geschrieben:

$$ {}_t E'_x = v^t \cdot \left(\frac{v' s}{v}\right)^t \cdot g^{c^x (c^t - 1)} $$

Man kann nun den Wert ${}_t E'_x$ gleichsetzen einer Erlebensfallversicherung ${}_t E_z^{(N)}$ von N Personen mit dem Eintrittsalter z zum alten Zinsfuss i und für die gleiche Versicherungsdauer t.

$$ {}_t E'_x = v^t \cdot \left(\frac{v' s}{v}\right)^t \cdot g^{c^x (c^t - 1)} = {}_t E_z^{(N)} = v^t \cdot s^{N \cdot t} \cdot g^{N c^z (c^t - 1)} $$

Dann müssen N, z so bestimmt werden, dass:

$$ \left(\frac{v' s}{v}\right) \cdot g^{c^x (c^t - 1)} = s^{N \cdot t} \cdot g^{N \cdot c^z (c^t - 1)} \; ; $$

dies ist *für beliebiges t* immer dann und nur dann der Fall, wenn:

$$\frac{v' s}{v} = s^N$$

oder

(27 *a*) $$N = 1 + \frac{\delta - \delta'}{ln\, s}$$

und zugleich

$$c^x = N \cdot c^z$$

oder

(27 *b*) $$z = x - \frac{ln\, N}{ln\, c}$$

Aus der Darstellung der Leibrente als Summe von Erlebensfallversicherungen:

$$\mathrm{a}'_{x:\overline{n}|} = {}_0E'_x + {}_1E'_x + {}_2E'_x + \dots + {}_{n-1}E'_x = \sum_{t=0}^{t=n-1} {}_tE'_x$$

ergibt sich sofort auch das folgende *Resultat:*

Man kann die Leibrente $\mathrm{a}'_{x:\overline{n}|}\ (i')$ berechnen als Verbindungsrente von N Personen mit dem Eintrittsalter z zum alten Zinsfuss i und mit der gleichen Versicherungsdauer. N, z lassen sich mit den Gleichungen (27 *a*) und (27 *b*) berechnen.

(28) $$\mathrm{a}'_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}^{(N)}_{zzz\dots\,:\,\overline{n}|}$$

Im allgemeinen werden N und z irrationale Zahlen sein; man muss sie durch doppelte Interpolation bestimmen, was ziemlich viel zu rechnen gibt. Ausserdem setzt diese Methode eine vollständige Tafel der Rentenbarwerte für mehrere Personen voraus.

Beispiel:

Gegeben sind die Versicherungswerte für 4 % A F. Zu berechnen ist a'_{35} zu 3,5 %.

Aus (27 *a*) und (27 *b*) bestimmen sich:
N zu 1,96 Personen; z zu 27,328 Jahre
daraus findet man $a^{(1,96)}_{27,328\ldots}$ (4 %) $= 16{,}125$
der genaue Wert ist: a_{35} (3,5 %) $= 16{,}124$
Der Fehler beträgt: $\Delta = -0{,}001$

7. Die Lösung des Zinsfussproblems mittelst eines vollständigen Leibrentensystems einer Standardtafel, wenn die Überlebensordnungen das Makehamsche Gesetz befolgen.

Blaschke [10] und unabhängig von ihm *Gram* [11] haben die Beziehungen untersucht, die zwischen den Leibrenten zweier verschiedener Überlebensordnungen, die aber beide dem Makehamschen Gesetze folgen, bestehen.

Die kontinuierliche Leibrente ist dargestellt durch:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau} + \delta) \cdot d\tau} \cdot dt$$

Die Sterblichkeitsintensität für das Makehamsche Gesetz:

$$l_x = k' \, s^x \cdot g^{c^x}$$

lautet:

$$\mu_x = -(ln\, s + c^x \cdot ln\, g \cdot ln\, c)$$

Mit den folgenden Substitutionen:

$$\zeta = g^{-c^x} ; \quad \sigma = v \cdot s ; \quad k = \frac{\log \sigma}{\log c}$$

kann die kontinuierliche Leibrente wie folgt dargestellt werden:

$$\overline{a}_x = \frac{e^{\zeta}}{\zeta^k \cdot ln\, c} \cdot \int_{\zeta}^{\infty} y^{k-1} \cdot e^{-y} \cdot dy \tag{29}$$

Die Leibrente hängt also schliesslich nur von den 3 Parametern c, k, ζ ab.

Für ein anderes Makehamsches Gesetz gilt für ein bestimmtes Alter x_1 und für einen bestimmten Zinsfuss i_1 ebenfalls die Gleichung:

$$\overline{a}_{x_1} = \frac{e^{\zeta_1}}{\zeta_1^{k_1} \cdot ln\, c_1} \cdot \int_{\zeta_1}^{\infty} y^{k_1-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

Vergleichen wir nur solche Leibrentenwerte, für die $\zeta = \zeta_1$, $k = k_1$, so bestehen folgende 3 Gleichungen:

$$\overline{a}_{x_1} \cdot ln\, c_1 = \overline{a}_x \cdot ln\, c$$

$$g_1^{-c_1^{x_1}} = g^{-c^x}$$

$$\frac{\log \sigma_1}{\log c_1} = \frac{\log \sigma}{\log c}$$

Führt man noch folgende Bezeichnungen ein:

$$m = \frac{\log c}{\log c_1},$$

$$n = \frac{\log \log \frac{1}{g} - \log \log \frac{1}{g_1}}{\log\ c_1},$$

$$r = \frac{\log c_1}{\log c} \cdot \log s - \log s_1,$$

so gelten die folgenden 3 Gleichungen:

$$\bar{a}_{x_1} = m \cdot \bar{a}_x \tag{30 a}$$

$$\delta_1 = \frac{\delta}{m} - r \tag{30 b}$$

$$x_1 = m\,x + n \tag{30 c}$$

Für eine bestimmte Überlebensordnung seien ein für allemal für sämtliche Zinsfüsse die Leibrentenbarwerte berechnet. Sucht man nun für irgendeine Überlebensordnung (Makeham) für das Alter x und den Zinsfuss i' den Wert der Leibrente, so kann man m, n, r berechnen und mit den 3 Gleichungen zuerst das der Standardtafel entsprechende i_1, x_1; dann findet man in der Standardtafel den Wert $\bar{a}_{x1}\,(i_1)$. Die gesuchte Leibrente berechnet sich nun aus:

$$\bar{a}'_x = \frac{\bar{a}_{x_1}}{m} \tag{31}$$

Die auftretende Altersverschiebung ist linear und hängt nur von den Parametern der beiden Überlebensordnungen ab.

8. Der Versicherungswert als Funktion vom Zinsfuss allein betrachtet und seine Taylorsche Entwicklung nach v, i.

Der direkteste Weg zur Lösung des Zinsfussproblems ist die Darstellung des Versicherungswertes als einfache

Funktion von i, und wenn dies nicht gelingt, seine Entwicklung nach i. Diesen Gedanken hat schon *James Meikle* [1] ausgeführt; nach Taylor ist:

$$F(v') = F(v) + \frac{\Delta v}{1!} \cdot F'(v) + \frac{(\Delta v)^2}{2!} \cdot F''(v) + \dots$$

$$\Delta v = v' - v$$

Für die meisten Versicherungsfunktionen ist es nun möglich, die Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung zu bestimmen. James Meikle hat für die Leibrente folgende Entwicklung gefunden:

Es sollen bedeuten:

$$\begin{aligned} S_x &= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots N_w \\ S_x^{(2)} &= S_x + S_{x+1} + S_{x+2} + \dots S_w \\ S_x^{(3)} &= S_x^{(2)} + S_{x+1}^{(2)} + S_{x+2}^{(2)} + \dots S_w^{(2)} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Taylorsche Entwicklung für die Leibrente lautet dann nach Meikle:

$$a_x' = a_x + \frac{\Delta v \cdot S_{x+1}}{v \cdot D_x} + \frac{(\Delta v)^2 \cdot S_{x+2}^{(2)}}{v^2 \cdot D_x} + \frac{(\Delta v)^3 \cdot S_{x+3}^{(3)}}{v^3 \cdot D_x} + \dots \tag{32}$$

Wären die «höhern» Summen der diskontierten Zahlen: $S_x^{(K)}$ bekannt, so könnte man die Versicherungswerte für i' ebenso genau berechnen wie die gegebenen Versicherungswerte für i; gewöhnlich sind aber nur die einfachen Summen in den Tafeln angegeben; deshalb konnte man vorerst diese Reihenentwicklung nur bis und mit zum ersten Gliede mit der entsprechenden Genauigkeit benützen.

Für die Entwicklung der Leibrente a_x' nach i, $(h = i' - i)$, erhält man:

$$(33) \qquad a_x' = a_x - \frac{S_{x+1} \cdot vh}{D_x} + \frac{S_{x+1}^{(2)} \cdot (vh)^2}{D_x} - \frac{S_{x+1}^{(3)} \cdot (vh)^3}{D_x} + - \ldots$$

Van Dorsten [6] hat diese Reihe auch abgeleitet; ebenso hat er für andere Versicherungswerte die entsprechenden Entwicklungen gegeben. Für die numerische Berechnung konnten die Entwicklungen nur bis und mit dem Glied von h^1 ausgenützt werden. [Formel (21) von Steffensen].

In neuerer Zeit hat *R. Palmqvist* [18] folgenden Gedanken entwickelt: Die Funktion

$$a_x' = a_x - \frac{S_{x+1} \cdot vh}{D_x} + - \ldots \qquad = \varphi\,(y)$$

setzt man gleich einer Funktion $\varphi\,(y)$ und entwickelt $y\,(h)$ nach h bis und mit dem Gliede von h^1; dann setzt man diesen Wert für y in $\varphi\,(y)$ ein und erhält damit eine bessere Annäherung für a_x'. Palmqvist leitet die Bedingungen ab, die $\varphi\,(y)$ erfüllen muss; es genügt schon, wenn die erste Ableitung von $\varphi\,(y)$ stets positiv oder stets negativ ist.

Für die folgenden einfachen Funktionen erhält man als Näherungsformeln:

1. $$\varphi\,(y) = \frac{1}{y^2} = a_x'$$

$$y\,(h) = \left(a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot vh + - \ldots \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a_x^{-\frac{1}{2}} - \binom{-\frac{1}{2}}{1} \cdot a_x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot vh + \ldots$$

$$y(h) = a_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{S_{x+1}}{2\,N_{x+1}} \cdot vh\right)$$

Setzt man nun wieder $y(h)$ in $\varphi(y) = \dfrac{1}{y^2}$ ein, so erhält man:

$$\varphi(y) = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a_x^{-1} \cdot \left(1 + \dfrac{S_{x+1}}{2\,N_{x+1}} \cdot vh\right)^2}$$

$$a_x' = a_x \cdot \left(1 + \frac{S_{x+1}}{2\,N_{x+1}} \cdot vh\right)^{-2}$$

Analog erhält man für:

2. $\varphi(y) = \dfrac{1}{y} = a_x'$

$$a_x' = a_x \cdot \left(1 + \frac{S_{x+1} \cdot vh}{N_{x+1}}\right)^{-1}$$

Rein numerisch hat Palmqvist gefunden, dass folgende Formel die genaueste ist:

$$a_x' = a_x \left(1 + \frac{hv \cdot S_{x+1}}{1{,}5 \cdot N_{x+1}}\right)^{-1{,}5} \tag{34}$$

Die Fehler, die sich bei dieser Formel ergeben, sind sehr klein, wie die folgende Tabelle zeigt:

Beispiel:

Als bekannt sind die Versicherungswerte für 4 %, H^M, anzusehen; nach der Formel (34) wurden berechnet:

x	3,5 %		4,5 %		5 %	
	a'_x	Δ	a'_x	Δ	a'_x	Δ
20	20,223	0,002	17,260	0,002	16,039	0,008
30	18,416	0,000	15,989	0,000	14,968	0,003
40	16,103	0,000	14,260	0,000	13,466	0,000
50	13,188	— 0,001	11,936	0,000	11,383	0,000
60	9,835	0,000	9,107	0,000	8,776	0,000

Eine Fortsetzung des Gedankens von Palmqvist hat *K. A. Poukka* [19] ausgeführt und in der folgenden durchsichtigen und schönen Weise eine Lösung für das Zinsfussproblem abgeleitet: Die Entwicklung (33) ist eine analytische Funktion von h mit dem Konvergenzradius $|h| < R$; man bildet diese analytische Funktion $F(h)$ mittelst einer geeigneten Funktion $h = h(z)$ konform auf die z-Ebene ab, und dann ersetzt man in $F(h(z))$, z durch $z = z(h)$ und erhält für a'_x eine stärker konvergierende Reihe, worin man die Glieder mit der 3. und höhern Potenzen von h vernachlässigen darf (als analoges Beispiel siehe auch Kapitel III, Abschnitt 8, Seite 311). Poukka wählt als Abbildungsfunktion:

$$z = \frac{h}{h + \alpha}$$

wo $\alpha > 0$ eine beliebige Konstante ist.

Man setzt also

$$h = \frac{\alpha z}{1 - z} = \alpha z + \alpha z^2 + \alpha z^3 + \ldots$$

in (33) ein und erhält:

$$(35\,a) \quad a'_x = a_x - \frac{S_{x+1} \cdot v \alpha z}{D_x} + \left(- \frac{S_{x+1} \cdot v \alpha}{D_x} + \frac{S^{(2)}_{x+1} \cdot (v \alpha)^2}{D_x} \right) \cdot z^2 + \ldots$$

Man kann α so wählen, dass der Koeffizient von z^2 gleich Null wird; man setzt:

$$(35\,b) \qquad \alpha = \frac{S_{x+1}}{v \cdot S^{(2)}_{x+1}}$$

Ersetzt man in dem Ausdruck (35 a) z wieder durch $\frac{h}{\alpha + h}$, so erhält man die folgende Annäherungsformel:

$$(35\,c) \qquad a'_x = a_x - \frac{\frac{S_{x+1} \cdot vh}{D_x}}{1 + \frac{S^{(2)}_{x+1} \cdot vh}{S_{x+1}}}$$

Nun hat Poukka die interessante Beobachtung gemacht, dass das folgende Verhältnis für alle Alter und alle Zinsfüsse nahezu konstant ist:

$$(36) \qquad k = \frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} : \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$$

In der folgenden Tabelle ist k für die Grundlagen des Text-Books berechnet:

x	3%	4%	5%
10	0,83	0,86	0,89
30	0,81	0,84	0,86
60	0,83	0,84	0,85

Wir nehmen als Mittelwert an: $k = 0{,}84$.

Indem man annäherungsweise setzt

$$\frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} = 0{,}84 \cdot \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$$

und für $\dfrac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}}$ in der Formel (35 c) $0{,}84 \cdot \dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$ einsetzt, so erhält man eine weitergehende Annäherung, als bis dahin möglich war.

Die nun so abgeänderte Formel (34) von Poukka lautet:

$$a'_x = a_x - \frac{\dfrac{S_{x+1} \cdot hv}{D_x}}{1 + 0{,}84\,\dfrac{S_{x+1} \cdot hv}{N_{x+1}}} \tag{37}$$

Sie ergibt, wie das nachfolgende Beispiel zeigt, dieselbe schöne Genauigkeit wie die Formel von Palmqvist.

Grundlagen: Text-Book; Tabelle der $\Delta a'_x$ bei einem Übergange von:

x	$3\% \to 3{,}5\%$ $\Delta a'_x$	$3\% \to 5\%$ $\Delta a'_x$	$5\% \to 4\%$ $\Delta a'_x$
10	— 0,001	0,049	0,019
20	— 0,001	0,020	0,002
30	— 0,002	0,001	0,003
40	— 0,002	— 0,002	— 0,001
50	0,000	— 0,003	0,000
60	0,000	0,000	0,000

Mit der Abbildungsfunktion

$$z = 1 - (1 + \alpha h)^{-\beta}$$

erhält man durch eine analoge Betrachtungsweise die Formel von Palmqvist:

$$(39)\qquad a'_x = a_x \left(1 + \frac{hv \cdot S_{x+1}}{\beta \cdot N_{x+1}}\right)^{-\beta} = a_x \left(1 + \frac{hv \cdot S_{x+1}}{1{,}471 \cdot N_{x+1}}\right)^{-1{,}471}$$

wobei sich erklärt, warum gerade der Exponent 1,5 die genauesten Resultate lieferte.

III. Eigene Beiträge zum Zinsfussproblem.

1. Lösung des Zinsfussproblems, wenn die diskontierte Zahl der Lebenden D_{x+t} eine Parabel $m$ten Grades in t ist.

Die Überlebensordnung habe einen solchen funktionellen Charakter, dass $D_{x+t} = v^{x+t} \cdot l_{x+t}$ der folgenden Gleichung genügt:

$$(40)\qquad D_{x+t} = \frac{D_x \cdot (w - x - t)^m}{(w - x)^m}$$

Dabei bedeutet w das Schlussalter: $lw = 0$.

Die obige Annahme trifft in der Wirklichkeit angenähert zu.

Die Überlebensordnung befolgt dann das Gesetz:

$$l_x = l_0 \cdot w^{-m} \cdot v^{-x} (w - x)^m$$

m, v sind Parameter.

Der Barwert der lebenslänglichen kontinuierlichen Leibrente ist:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{D_x} \int_0^{w-x} D_{x+t} \cdot dt = \frac{1}{D_x} \int_0^{w-x} \frac{D_x (w - x - t)^m \cdot dt}{(w - x)^m}$$

$$\bar{a}_x = \frac{(w - x)^{m+1} - 0}{(m + 1)\,(w - x)^m}$$

m ist eine Funktion vom Zinsfuss i.

$$\bar{a}_x = \frac{w - x}{m_{(i)} + 1} \quad \text{zum Zinsfuss } i. \tag{41}$$

m bestimmt sich aus der Gleichung (40) zu:

$$m_{(i)} = \frac{ln\, D_{x+t} - ln\, D_x}{ln\,(w - x - t) - ln\,(w - x)} = \frac{ln\, {}_tp_x - t \cdot \delta}{ln\,(w - x - t) - ln\,(w - x)}$$

Für t kann man irgendeinen Wert zwischen 0 und $w - x$ wählen; er sei t_0.

Für einen andern Zinsfuss i' wird der Leibrentenbarwert:

$$\bar{a}'_x = \frac{w - x}{m_{(i')} + 1}; \quad m_{(i')} = \frac{ln\, {}_{t_0}p_x - t_0 \cdot \delta'}{ln\,(w - x - t_0) - ln\,(w - x)}$$

Das Verhältnis zweier Leibrentenbarwerte von gleichem Alter, aber von verschiedenem Zinsfusse wird:

$$\frac{\overline{a}'_x}{\overline{a}_x} = \frac{m_{(i)} + 1}{m'_{(i)} + 1} = \frac{ln\, {}_{t_0}p_x \cdot \dfrac{w - x - t_0}{w - x} - t_0 \cdot \delta}{ln\, {}_{t_0}p_x \cdot \dfrac{w - x - t_0}{w - x} - t_0 \cdot \delta'}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$c\,(x, t_0) = ln\, {}_{t_0}p_x \cdot \frac{w - x - t_0}{w - x},$$

so kann der Leibrentenbarwert zum Zinsfuss i' aus dem gegebenen zum Zinsfuss i nach der folgenden Gleichung berechnet werden:

$$\overline{a}'_x = \overline{a}_x \cdot \frac{c\,(x, t_0) - t_0 \cdot \delta}{c\,(x, t_0) - t_0 \cdot \delta'} \tag{42}$$

Die Anpassung der Dx an eine Parabel ist in der Wirklichkeit doch nicht so gut, dass sich diese Methode in der Praxis anwenden liesse, wie das folgende Beispiel zeigt:

Gegeben sei $\overline{a}_{30}$ zu 4 %; man berechne $\overline{a}'_{30}$ zu 5 %. Grundlagen: Text-Book. t_0 ist $= 15$ gewählt.

$\overline{a}_{30}$ (4 %) $= 17{,}651$.

$$(5\ \%)\ \overline{a}'_{30} = 17{,}651 \cdot \frac{-0{,}37427 - 0{,}96258}{-0{,}37427 - 1{,}10612} = 15{,}360$$

Der genaue Wert von $\overline{a}_{30}$ (5 %) ist $= 15{,}487$; der Fehler ist $\varDelta = 0{,}127$ oder zirka 0,8 %.

2. Einschliessen des gesuchten Wertes zwischen zwei bekannte, enge Grenzen.

Wir setzen in der Ungleichung von Steffensen (14):

$$f(t) = e^{-\int\limits_0^t (\delta + \mu_{x+t})\, dt} \quad ; \quad a = 0$$

$$\varphi(t) = e^{-(\delta' - \delta)\cdot t} \quad ; \quad b = n$$

$$k = \int\limits_0^n e^{-(\delta' - \delta)\cdot t} \cdot dt = \frac{1 - e^{-(\delta' - \delta)\, n}}{\delta' - \delta}$$

Die Ungleichung (14) wird jetzt lauten:

$$\int\limits_{n-k}^{n} e^{-\int\limits_0^t (\delta + \mu_{x+t})\, dt} \cdot dt < \int\limits_0^n e^{-(\delta' - \delta)\cdot t - \int\limits_0^t (\delta + \mu_{x+t})\, dt} \cdot dt < \int\limits_0^k e^{-\int\limits_0^t (\delta + \mu_{x+t})\, dt} \cdot dt$$

oder

$$\underset{n-k|k}{\bar{a}_x} < \underset{|n}{\bar{a}'_x} < \underset{|k}{\bar{a}_x}$$

Wenn wir k entwickeln, so erhalten wir:

$$k = \frac{1}{\delta' - \delta} \cdot \left\{ \frac{n\,(\delta' - \delta)}{1!} - \frac{n^2\,(\delta' - \delta)^2}{2!} + \frac{n^3\,(\delta' - \delta)^3}{3!} - + \dots \right\}$$

$$k = n - \left\{ \frac{n^2\,(\delta' - \delta)}{2!} - \frac{n^3\,(\delta' - \delta)^2}{3!} + \frac{n^4\,(\delta' - \delta)^3}{4!} - + \dots \right\}$$

oder $$k = n - \varepsilon$$

ε ist eine kleine Altersdifferenz; die Ungleichung lautet nun:

$$(43) \qquad \underset{\varepsilon|n-\varepsilon}{\overline{a}_x} < \underset{|n}{\overline{a}'_x} < \underset{|n-\varepsilon}{\overline{a}_x}$$

Die temporäre Leibrente, n Jahre dauernd, zum neuen Zinsfuss i' ist kleiner als die nur $n - \varepsilon$ Jahre dauernde, aber grösser als die um ε Jahre aufgeschobene, ebenfalls $n - \varepsilon$ Jahre dauernde temporäre Leibrente gleichen Alters zum alten Zinsfuss i.

3. Ableitung einer Formel für das Zinsfussproblem, wenn die Überlebensordnung das Makehamsche Gesetz befolgt.

Die Ungleichung (22) von Birger Meidell lautet:

$$(22) \quad \int_a^b \chi(t) \cdot \psi\left[\alpha(t)\right] \cdot dt \gtreqless \int_a^b \chi(t) \cdot dt \cdot \psi \left\{ \frac{\int_a^b \chi(t) \cdot \alpha(t) \cdot dt}{\int_a^b \chi(t) \cdot dt} \right\}$$

mit den früher mitgeteilten Bedingungen, auf die wir verweisen.

Für das Makehamsche Gesetz kann die Sterblichkeitsintensität dargestellt werden durch:

$$\mu_{x+t} = \alpha + \beta \cdot e^{\gamma(x+t)}$$

wobei

$$\alpha = -\ln s\,; \quad \gamma = \ln c\,; \quad \beta = -\ln g \cdot \ln c$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet der Wert der temporären Leibrente zum Zinsfuss i':

$$\overline{a}'_{x\,|n} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\delta' + \mu_{x+t})\,dt} \cdot dt = \int_0^n e^{-(\delta'+\alpha)\cdot t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x}(e^{\gamma t}-1)} \cdot dt$$

Setzt man $k = \dfrac{\delta' + \alpha}{\delta + \alpha}$, so erhält man:

$$\overline{a}'_{x\,|n} = \int_0^n e^{-(\delta+\alpha)k\cdot t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma x - \frac{\gamma \ln k}{\gamma}} \cdot (e^{\gamma t}-1)} \cdot dt$$

$z = x - \dfrac{1}{\gamma} \ln k$ kann als das neue Eintrittsalter betrachtet werden.

$$\overline{a}'_{x\,|n} = \int_0^n e^{k\left[-(\delta+\alpha)t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma z}(e^{\gamma t}-1)\right]} \cdot dt$$

Man substituiert nun in der Ungleichung (22):

$$\chi(t) = 1 \qquad a = o;\; b = n$$

$$\psi(t) = t^k$$

$$\psi\{\alpha(t)\} = \{\alpha(t)\}^k$$

$$\alpha(t) = e^{-(\delta+\alpha)t - \frac{\beta}{\gamma} e^{\gamma z}(e^{\gamma t}-1)},$$

und (22) erhält die folgende Form:

$$\int_0^n e^{k\left[-(\delta+\alpha)\cdot t-\frac{\beta}{\gamma}e^{\gamma z}\left(e^{\gamma t}-1\right)\right]}\cdot dt \gtreqless \int_0^n dt \cdot \left\{\frac{\int_0^n e^{-(\delta+\alpha)t-\frac{\beta}{\gamma}e^{\gamma z}\left(e^{\gamma t}-1\right)}\cdot dt}{\int_0^n dt}\right\}^k$$

oder:

$$\bar{a}'_{x\,\overline{|n}} \gtreqless n\cdot\left(\frac{\bar{a}_{z\,\overline{|n}}}{n}\right)^k$$

Da k annähernd gleich der Einheit wird, ist in diesem Falle $\psi(t)$ annähernd eine lineare Funktion, und man darf das Gleichheitszeichen setzen.

(44) $$\bar{a}'_{x\,\overline{|n}} = n\cdot\left(\frac{\bar{a}_{z\,\overline{|n}}}{n}\right)^k;\; z = x - \frac{ln(\delta'+\alpha)-ln(\delta+\alpha)}{\gamma} = x - \frac{\log k}{\log c}$$

Die Berechnung der temporären Leibrente zum Zinsfuss i' geschieht hier also mittels einer temporären Leibrente von der gleichen Dauer, aber verschobenem Alter, zum alten Zinsfusse i.

Beispiel: Für die Tafel A F führt die Formel (44) zu folgenden Resultaten:

1. Übergang von 3¼ % nach 3½ %

   $a'_{30:\overline{20|}} = 13{,}095$; Fehler $\Delta = 0{,}029$.

2. Übergang von 3½ % nach 4 %

   $a'_{30:\overline{20|}} = 12{,}514$; Fehler $\Delta = 0{,}055$.

4. Ableitung einer Reihenentwicklung für die temporäre Leibrente nach $h = i' - i$.

Wir betrachten den Barwert der temporären Leibrente, $a_{x\,\overline{|n}}$, als Funktion des Zinsfusses allein und wenden auf ihn den Taylorschen Satz an; zu diesem Zwecke setzen wir:

$f(i') = \underset{|n}{a'_x}$; $h = i' - i$; dann ist $f(i) = \underset{|n}{a_x}$, und die Taylorsche Entwicklung für die temporäre Leibrente lautet somit:

$$\underset{|n}{a'_x} = \underset{|n}{a_x} + \frac{h}{1!}\frac{d\,\underset{|n}{a_x}}{di} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{d^2\,\underset{|n}{a_x}}{di^2} + \frac{h^3}{3!}\cdot\frac{d^3\,\underset{|n}{a_x}}{di^3} + \ldots \tag{45}$$

In der Reihenentwicklung (45) sind die Koeffizienten $\frac{d^\lambda\,\underset{|n}{a_x}}{di^\lambda}$, also die Ableitungen des Leibrentenbarwertes nach dem Zinsfusse i, zu bestimmen.

Die nachfolgende Beweisführung folgt im wesentlichen dem Wege, den *Poukka* [19] eingeschlagen hat, und für ausführliche Einzelheiten sei auf seine Arbeit [19] hingewiesen; neu ist hier nur die Erweiterung; auf die temporären Barwerte. Die $p$te Ableitung des Barwertes der temporären Leibrente nach dem Zinsfuss i hat die Gestalt:

$$\frac{d^p\,\underset{|n}{a_x}}{di^p} = \frac{(-1)^p \cdot v^p}{D_x} \cdot \sum_{m=1}^{m=n} \frac{m \cdot (m+1) \ldots (m+p-1) \cdot D_{x+m}}{p!} \tag{46}$$

Wir führen die Abkürzung ein:

$$ {}_nB^{(p)}_{x+1} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{m\,(m+1) \ldots (m+p-1) \cdot D_{x+m}}{p!} \tag{47}$$

Es ist unschwer, die folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten ${}_nB^{(p)}_{x+1}$ herzuleiten:

$$(49)\quad {}_nB^{(p)}_{x+1} = {}_1B^{(p-1)}_{x+n} + {}_2B^{(p-1)}_{x+n-1} + {}_3B^{(p-1)}_{x+n-2} + \dots {}_nB^{(p-1)}_{x+1}$$

Damit erhalten wir für den $p$ten Koeffizienten in der Taylorschen Entwicklung (45):

$$(48)\qquad \frac{1}{p!}\cdot\frac{d^p\, a_{x\,\overline{|n}}}{di^p} = \frac{(-1)^p\cdot v^p}{D_x}\cdot {}_nB^{(p)}_{x+1}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} {}_nB^{(1)}_{x+1} &= \sum_{m=1}^{m=n} m\cdot D_{x+m} \\ &= D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + 3\,D_{x+3} + \dots + n\cdot D_{x+n} \end{aligned}$$

$$(50\,a)\qquad {}_nB^{(1)}_{x+1} = S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\cdot N_{x+n+1}$$

und weiter ergibt sich:

$${}_nB^{(2)}_{x+1} = {}_nB^{(1)}_{x+1} + {}_{n-1}B^{(1)}_{x+2} + \dots + {}_2B^{(1)}_{x+n-1} + {}_1B^{(1)}_{x+n}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} S_{x+1} + S_{x+2} + \dots + S_{x+n-1} + S_{x+n} \\ -n\cdot N_{x+n+1} - (n-1)\cdot N_{x+n+1} - \dots - 2\,N_{x+n+1} - N_{x+n+1} \\ \qquad\qquad\qquad -n\cdot S_{x+n+1} \end{array} \right\}$$

$$(50\,b)\quad {}_nB^{(2)}_{x+1} = S^{(2)}_{x+1} - S^{(2)}_{x+n+1} - n\cdot S_{x+n+1} - \frac{n\,(n+1)}{2!}\cdot N_{x+n+1}$$

Analog findet man weiter:

$$(50\,c)\quad {}_nB^{(3)}_{x+1} = S^{(3)}_{x+1} - S^{(3)}_{x+n+1} - n\cdot S^{(2)}_{x+n+1} - \frac{n\,(n+1)}{2!}\,S_{x+n+1} - $$
$$- \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3!}\,N_{x+n+1}$$

usw.

Die Reihenentwicklung (45) für $a'_{\overline{x}|n}$ lautet nun:

$$(51)\quad a'_{\underset{|n}{x}} = a_{\underset{|n}{x}} - \frac{{}_nB^{(1)}_{x+1} \cdot vh}{D_x} + \frac{{}_nB^{(2)}_{x+1} \cdot (vh)^2}{D_x} - \frac{{}_nB^{(3)}_{x+1} \cdot (vh)^3}{D_x} + \ldots$$

In dieser Entwicklung (51) sind also die Grössen ${}_nB^{(p)}_{x+1}$ mittels der Formeln (50 a, b, c ...) berechenbar.

Für den Spezialfall, dass $n = w - x$ ist, wird:

$$a'_{\underset{|n}{x}} = a'_x; \quad N_{x+n+1} = S_{x+n+1} = S^{(K)}_{x+n+1} = 0.$$

$${}_nB^{(1)}_{x+1} = S_{x+1}; \quad {}_nB^{(2)}_{x+1} = S^{(2)}_{x+1} \quad \text{usw.},$$

und man erhält aus (51) die bekannte Darstellung für die lebenslängliche Leibrente a'_x:

$$(33)\quad a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot vh + \frac{S^{(2)}_{x+1}}{D_x} (vh)^2 - \frac{S^{(3)}_{x+1}}{D_x} (vh)^3 + - \ldots$$

Für die Todesfallversicherung gilt eine ganz analoge Reihenentwicklung:

Der Barwert der temporären Todesfallversicherung ist dargestellt durch:

$$A_{\underset{|n}{x}} = \frac{1}{l_x}\left[\frac{d_x}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \frac{d_{x+2}}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n}\right]$$

Diese Funktion ist in bezug auf den Zinsfuss i als Variable ganz gleich gebaut wie die temporäre Leibrente $a_{\underset{|n}{x}}$. Die Taylorsche Entwicklung nach i ist analog; an Stelle von D_{x+t+1} hat man C_{x+t} zu setzen. Diese lautet wie folgt, wenn man wiederum setzt:

$$Mx = \sum Cx; \quad R_x = \sum M_x; \quad R^{(2)}_x = \sum R_x \text{ usw.}$$

$$(52)\qquad A'_{x\,|n} = A_{x\,|n} - \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} \cdot (vh) +$$

$$+ \frac{R_x^{(2)} - R_{x+n}^{(2)} - n \cdot R_{x+n} - \dfrac{n\,(n+1)}{2!} \cdot M_{x+n}}{D_x} \cdot (vh)^2 +$$

$$- \frac{R_x^{(3)} - R_{x+n}^{(3)} - n \cdot R_{x+n}^{(2)} - \dfrac{n\,(n+1)}{2!} \cdot R_{x+n} - \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2) \cdot M_{x+n}}{3!}}{D_x} \cdot (vh)^3 + - \ldots$$

Für $n = w - x$ erhalten wir die entsprechende Entwicklung für die lebenslängliche Todesfallversicherung:

$$(52\,a)\qquad A'_x = A_x - \frac{R_x^{(1)}}{D_x}\, vh + \frac{R_x^{(2)}}{D_x} \cdot (vh)^2 - \frac{R_x^{(3)}}{D_x} \cdot (vh)^3 + - \ldots$$

Ähnliche Entwicklungen kann man auch für die aufgeschobenen temporären Leibrenten und Todesfallversicherungen ableiten, aber die Formeln werden noch viel komplizierter.

Da $h = i' - i$ eine kleine Zahl ist, eignen sich diese Reihenentwicklungen gut für das Zinsfussproblem; aber von den «höhern» Summen der diskontierten Zahlen: $S_x^{(k)}$, $R_x^{(k)}$, sind in den Tafeln gewöhnlich nur die ersten: S_x, R_x, gegeben. Immerhin ist bekanntlich diese Summenbildung mit Hilfe der modernen Rechenmaschine eine sehr einfache Arbeit, die sich rasch bewältigen lässt.

5. Annähernde Berechnung der «höhern» Summen der diskontierten Zahlen durch Annäherungsparabeln.

Wenn man die höhern diskontierten Zahlen: N_x, S_x, $\ldots$ $S_x^{(k)}$; M_x, R_x, $\ldots$ $R_x^{(k)}$ graphisch darstellt, so bemerkt man, dass man Parabeln $m$ten Grades wählen kann, die sich den wirklichen Kurven sehr gut anpassen. Die relative Anpassung ist bei den Nx, Mx relativ am wenigsten gut und wird immer besser mit grösser werdendem k, was sich durch die fortgesetzte Addition erklären lässt.

Es bedeute $f(x)$ die «höchste» Summe der diskontierten Zahlen, die in den Tafeln noch angegeben sind; dann treffen wir die Annahme, es lasse sich $f(x+t)$ als Funktion der Zeit wie folgt darstellen:

$$f(x_0 + t) = f(x_0) \cdot \left(1 - \frac{t}{w - x_0}\right)^m \tag{53}$$

w = Schlussalter.

Da die diskontierten Zahlen als Funktion des Alters infolge der grossen Kindersterblichkeit bis ungefähr zum Alter 15 einen von der einfachen Parabelform stark abweichenden Verlauf zeigen, erhält man bessere Resultate, wenn man für die folgenden Betrachtungen erst etwa von diesem Alter ausgeht. Aus der Gleichung (53) erhält man den Wert für m:

$$m = \frac{\log f(x_0 + t_0) - \log f(x_0)}{\log(w - x_0 - t_0) - \log(w - x_0)} \tag{54}$$

Dabei kann für t_0 irgendein Wert zwischen 0 und $w - x_0$ gewählt werden. Die durch (53) dargestellte Parabel stimmt dann in 3 Punkten genau mit den Beobachtungswerten überein, nämlich in den Punkten: $f(x_0)$, $f(x_0 + t_0)$, $f(w) = 0$. Die Variation von m für verschiedenes t_0 ist ein Mass für die Güte der Anpassung der Parabel an die Beobachtungskurve. Wie das folgende, beliebig ausgewählte Beispiel zeigt, ändert sich m wenig, wenn man t_0 verschiedene Werte annehmen lässt.

Grundlagen: Text-Book 4 %; $x_0 = 20$; $w = 102$.

Änderung des m mit t_0 für die:

S_x

$x_0 + t_0$	m
20 + 15	4,996
20 + 25	4,992
20 + 35	5,032
20 + 45	5,136

R_x

$x_0 + t_0$	m
20 + 10	2,868
20 + 25	2,873
20 + 35	2,875
20 + 45	3,06

Nach der Erfahrung ist gewöhnlich $m > 2$; dann folgt aus (53), dass die erste Ableitung: $f'(w) = 0$ wird; die Annäherungsparabel tangiert also die Zeitaxe im Schlussalter w.

Über die Güte der Anpassung der Parabeln an die Summen der diskontierten Zahlen orientieren die Tabellen I—III im Anhange dieser Arbeit.

Da $f(x)$ in guter Annäherung durch die einfache Funktion (53) ersetzt werden kann, so ist es nun möglich, die noch höhern Summen der diskontierten Zahlen durch fortgesetzte Integration annähernd zu berechnen; am besten geschieht dies mittelst der Eulerschen Summationsformel:

$$(55) \quad \sum_{t=a}^{t=x-1} f(t) = \int_a^x f(t) \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot \left[f(x) - f(a)\right] + \frac{1}{12}\left[f'(x) - f'(a)\right] + \ldots,$$

Der besseren Anschaulichkeit wegen ist die nun folgende Entwicklung speziell für die S_x durchgeführt; sie gilt aber auch für alle andern Summen von diskontierten Zahlen.

Wendet man die Gleichungen:

$$S_{x+t} = \frac{S_x \cdot (w - x - t)^m}{(w - x)^m}$$

$$\frac{d\,S_{x+t}}{dt} = -\frac{m \cdot S_x \cdot (w - x - t)^{m-1}}{(w - x)^m}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

auf die Gleichung (55) an, so erhält man:

$$\sum_{t=0}^{t=w-x-1} S_{x+t} = S_x^{(2)} = \int_0^{w-x} \frac{S_x \cdot (w - x - t)^m}{(w - x)^m} \cdot dt -$$

$$- \frac{1}{2}(0 - S_x) + \frac{1}{12}\left(0 + \frac{m \cdot S_x}{(w - x)}\right) + \ldots$$

$$S_x^{(2)} = \frac{S_x (w - x)}{m + 1} + \frac{S_x}{2} + \frac{m \cdot S_x}{12\,(w - x)}$$

Das 2. Korrektionsglied $\frac{m \cdot S_x}{12\,(w - x)}$ ist klein im Verhältnis zum Fehler, der durch die mangelhafte Anpassung der Parabel an die wirkliche Kurve entsteht, und es kann, wie numerische Beispiele zeigen, weggelassen werden. Damit erhalten wir die Näherungsformel:

$$\text{(56 a)} \qquad S_x^{(2)} = S_x \cdot \left(\frac{w - x}{m + 1} + \frac{1}{2}\right)$$

Analog erhält man weiter als Näherungsformel für $S_x^{(3)}$:

$$S_x^{(3)} = \frac{S_x (w - x)}{m + 1} \cdot \left(\frac{w - x}{m + 2} + 1\right)$$

Allgemein findet man:

$$(56\,b)\quad S_x^{(k)} = \frac{S_x \cdot (w - x)^{k-2}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k-2)} \cdot \left[\frac{w-x}{m+k-1} + \frac{k-1}{2}\right],$$

gültig für $k \geqq 2$.

Ganz gleich lautet die Formel für die $R_{(k)}^x$, indem einfach S_x durch R_x zu ersetzen ist.

Wenn selbst die Zahlen S_x, R_x in der Tafel nicht vorhanden sind, kann man die höhern Summen mittels der N_x, M_x, aber mit entsprechend grösserer Ungenauigkeit mit den folgenden Formeln berechnen:

$$S^{(k)} = \frac{N_x \cdot (w - x)^{k-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)} \cdot \left[\frac{w-x}{m+k} + \frac{k}{2}\right]$$

$$(56\,c)\qquad R_x^{(k)} = \frac{M_x \cdot (w - x)^{k-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)} \cdot \left[\frac{w-x}{m+k} + \frac{k}{2}\right]$$

Diese Formeln sind gültig für $k \geqq 1$.

Die m bestimmen sich dann aus den Gleichungen:

$$m = \frac{\log N_{x_0+t_0} - \log N_{x_0}}{\log(w - x_0 - t_0) - \log(w - x_0)}\,; \quad m = \frac{\log M_{x_0+t_0} - \log M_{x_0}}{\log(w - x_0 - t_0) - \log(w - x_0)}$$

für irgendein x_0 und t_0.

Zur Orientierung über die Genauigkeit der angeführten Formeln sei ein für alle mal auf die numerischen Beispiele und die Tabellen im Anhange dieser Arbeit hingewiesen.

Mittelst der Formel (56 b) ist es also möglich, die höheren Summen der diskontierten Zahlen in guter Annäherung zu berechnen.

Die Reihenentwicklungen (51) erlauben nun damit sofort die Berechnung der Versicherungswerte zu einem neuen Zinsfuss i'; die dabei erreichbare Genauigkeit ist sehr gut und ist sogar etwas besser als diejenige der bisher bekannten Näherungsformeln. (Es sei wiederum auf die numerischen Beispiele 1, 2, 3 und die Tabellen V, VI, VII im Anhange hingewiesen).

6. Beziehung zwischen einer Annahme von Poukka und den Annäherungsparabeln für die Summen der diskontierten Zahlen.

Poukka benützt für seine Formeln die beobachtete Tatsache, dass für alle Alter und etwas weniger genau zugleich auch für alle Zinsfüsse das Verhältnis:

$$k = \frac{S_x^{(2)}}{S_x} : \frac{S_x}{N_x} \tag{36}$$

annähernd konstant ist. Mit unserer Annahme, dass die Summen der diskontierten Zahlen annähernd Parabeln $m$ten Grades der Zeitvariablen t sind, erhalten wir für k, wenn wir von den Korrektionsgliedern in der Eulerschen Formel absehen:

$$N_{x+t} = N_x \cdot \left(1 - \frac{t}{w-x}\right)^m$$

$$S_x = \int_0^{w-x} N_{x+t} \cdot dt + \ldots = \frac{N_x \cdot (w-x)}{m+1}$$

$$S_x^{(2)} = \int_0^{w-x} S_{x+t} \cdot dt + \ldots = \frac{N_x \cdot (w-x)^2}{(m+1)(m+2)}$$

Damit erhalten wir in guter Annäherung für k:

$$(57)\quad k = \frac{N_x \cdot (w - x)^2 \cdot (m + 1)^2 \cdot N_x}{(m + 1)\,(m + 2) \cdot N_x^2 \cdot (w - x)^2} = \frac{m + 1}{m + 2};$$

k ist also annähernd unabhängig vom Alter x; ebenso ändert sich k sehr wenig mit wechselndem Zinsfuss, da die Grösse von $m = m\,(i)$ sich wenig ändert mit variierendem i und m im Zähler und im Nenner des Bruches für k vorkommt.

Umgekehrt lässt sich auch schliessen, dass ebenfalls das Verhältnis:

$$k' = \frac{R_x^{(2)}}{R_x} : \frac{R_x}{M_x}$$

annähernd konstant sein wird, da die Kurve der M_x nur wenig von einer Parabel $m$ten Grades abweicht.

Der Methode von Poukka folgend, muss man zur Bestimmung von Versicherungswerten für einen neuen Zinsfuss für die betreffende Überlebensordnung zuerst die Grösse k bzw. k' berechnen und ihre Konstanz in bezug auf das Alter und den Zinsfuss prüfen, was doch die Berechnung der Summen $S_x^{(2)}$, $R_x^{(2)}$ erfordert.

Nach unserer Methode hat man die Güte der Anpassung einer Parabel an die Kurve der S_x bzw. R_x zu untersuchen (am einfachsten auf graphischem Wege) und den Grad m der Parabel aus einem Beobachtungswerte zu bestimmen.

7. Anwendung der Resultate der Parabelannäherung auf die Formeln von Palmqvist und Poukka.

Die Formel von Palmqvist lautet in der Form, wie sie Poukka [19] abgeleitet hat:

$$(39) \qquad a'_x = a_x \cdot \left(\frac{h \cdot v \cdot S_{x+1}}{\beta \cdot N_{x+1}} + 1 \right)^{-\beta}$$

wobei β sich aus der folgenden Gleichung berechnen lässt:

$$\frac{1+\beta}{2\beta} = \frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} : \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$$

Sind die Zahlen S_x gegeben, so hat man für $S^{(2)}_{x+1}$ unsere Näherungsformel (56 a) zu benützen:

$$(56\,a) \qquad S^{(2)}_{x+1} = S_{x+1} \cdot \left(\frac{w - x - 1}{m+1} + \frac{1}{2} \right)$$

Damit ist β bestimmbar und mit der Formel von Palmqvist auch der Rentenbarwert a'_x.

Für die numerische Berechnung ist die nun folgende Formel von Poukka [19] bedeutend einfacher:

$$(57) \qquad a'_x = a_x - \frac{\dfrac{S_{x+1} \cdot vh}{D_x}}{1 + \dfrac{h \cdot v \cdot S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}}}$$

Darin ist für $S^{(2)}_{x+1}$ der aus Formel (56 a) zu berechnenden Wert einzusetzen.

Über die Genauigkeit dieser Berechnungsweise von a'_x orientiert das Beispiel 4 mit der Tabelle VIII im Anhange.

Anwendung der Parabelannäherung auf die temporäre Leibrente.

Unsere Erweiterung der von Poukka für lebenslängliche Leibrenten abgeleiteten Formel lautet:

$$(58) \qquad a'_{x\,|n} = a_{x\,|n} - \frac{\dfrac{hv\,(S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1})}{D_x}}{1 + \dfrac{\left(S^{(2)}_{x+1} - S^{(2)}_{x+n+1} - n \cdot S_{x+n+1} - \dfrac{n\,(n+1)}{2} \cdot N_{x+n+1}\right) hv}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}}$$

Hier wird es nicht leicht gelingen, in analoger Weise, wie dies Poukka für die lebenslängliche Leibrente durchgeführt hat, die Glieder $S^{(2)}_x$, $R^{(2)}_x$ zu berücksichtigen. Dagegen kann man mit der Formel (56 a) die $S^{(2)}_x$ berechnen und erhält mit (58) eine praktisch gut verwendbare Formel für die temporäre Leibrente.

Wie die graphische Darstellung der S_x, R_x zeigen, ist die Anpassung der Parabeln in hohem Alter am schlechtesten; daher wird für die temporären Leibrenten, die nicht bis in hohes Alter dauern, sich der grösste Teil dieses Fehlers in dem Ausdruck $S^{(2)}_{x+1} - S^{(2)}_{x+n+1}$ wegheben. (Siehe Beispiel 5 mit den Tabellen IX und X im Anhange.)

8. Ableitung einer weiteren Näherungsformel.

Die Leibrente a'_x zum Zinsfuss i' ist eine analytische Funktion von $h = i' - i$ und ist durch die folgende Potenzreihe von h dargestellt:

$$(33) \qquad a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x}\,vh + \frac{S^{(2)}_{x+1}}{D_x}\,(vh)^2 - \frac{S^{(3)}_{x+1}}{D_x}\,(vh)^3 + - \ldots$$

Durch die Abbildungsfunktion:

$$(59\,a) \qquad z = 1 - e^{-\beta h};\; h = -\frac{1}{\beta} \cdot ln\,(1 - z)$$

$$(59\,b) \qquad h = -\frac{1}{\beta}\,ln\,(1 - z) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right)$$

(β ist eine noch beliebig wählbare positive Konstante), wird man für (33) eine stärker konvergierende Potenzreihe in z erhalten.

Setzt man den Wert (59 b) für h in (33) ein und berücksichtigt nur die Glieder bis und mit zur 2. Potenz von z, so erhält man:

$$a_x' = a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot v \cdot \left(\frac{z}{\beta} + \frac{z^2}{2\beta} + \ldots \right) + \frac{S_{x+1}^{(2)}}{D_x} \cdot v^2 \cdot \left(\frac{z^2}{\beta^2} + \ldots \right)$$

$$(60\,a) \quad a_x' = a_x - \frac{S_{x+1} \cdot v \cdot z}{D_x \cdot \beta} + z^2 \cdot \left(- \frac{S_{x+1} \cdot v}{2 \cdot D_x \cdot \beta} + \frac{S_{x+1}^{(2)} \cdot v^2}{D_x \cdot \beta^2} \right)$$

Nun kann man die Konstante β so wählen, dass der Koeffizient von z^2 gleich Null wird:

$$- \frac{S_{x+1} \cdot v}{2\beta \cdot D_x} + \frac{S_{x+1}^{(2)} \cdot v^2}{\beta^2 \cdot D_x} = 0$$

Daraus ergibt sich β zu:

$$\beta = \frac{S_{x+1}^{(2)}}{S_{x+1}} \, 2\,v$$

Ersetzt man in der Gleichung (60 a) wieder z durch:

$$z = 1 - e^{-\frac{S_{x+1}^{(2)} \cdot 2vh}{S_{x+1}}}$$

so erhält man für a_x' die folgende Näherungsformel:

$$(61\,a) \qquad a_x' = a_x - \frac{(S_{x+1})^2}{2\,D_x \cdot S_{x+1}^{(2)}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{S_{x+1}^{(2)} \cdot 2vh}{S_{x+1}}} \right)$$

Dabei sind die $S^{(2)}_{x+1}$ mit der Näherungsformel (56 a) zu berechnen.

Die Näherungsformel für a'_x lautet dann:

$$(61\,b)\qquad a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}}{2D_x\left(\dfrac{w-x-1}{m+1}+\dfrac{1}{2}\right)}\cdot\left(1-e^{-2vh\left(\frac{w-x-1}{m+1}+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

Entsprechende Formeln gelten für die temporäre Leibrente und die Todesfallversicherung. Wenn wir den Ausdruck (61 a) nach Potenzen von h entwickeln:

$$(61\,c)\qquad a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}\cdot vh}{D_x} + \frac{S^{(2)}_{x+1}\cdot (vh)^2}{D_x} -$$

$$-\frac{2\cdot (S^{(2)}_{x+1})^2}{3\cdot D_x\cdot S_{x+1}}(vh)^3 + \frac{(S^{(2)}_{x+1})^3}{3\,D_x\cdot (S_{x+1})^2}(vh)^4 - \ldots,$$

so zeigt diese letzte Reihe (61 c) mit der Reihe (33) genaue Übereinstimmung in den zwei ersten Korrektionsgliedern und das 3. und 4. Korrektionsglied in (61 c) weichen in ihrer Grösse nicht viel von den entsprechenden Gliedern in (33) ab. Daher ist zum voraus zu erwarten, dass diese Näherungsformel (61a) für a'_x ziemlich gute Resultate liefern wird. (Siehe Beispiel 6 und Tabellen XI—XIV im Anhange).

9. Schlusswort.

Wie wir in der Einleitung schon erwähnten, war das Hauptziel unserer Arbeit, darzulegen, wie es möglich ist, die Leibrentenbarwerte zu einem neuen Zinsfusse mit einer für die Praxis befriedigenden Genauigkeit zu berechnen, ohne das ganze System der Kommutationszahlen zum neuen Zinsfuss aufstellen zu müssen.

Der geschichtliche Überblick zeigt uns, dass bis jetzt unseres Erachtens entschieden *Poukka* die beste Lösung des Zinsfussproblems gefunden hat; er erreichte sein Resultat durch Verwendung eines annähernd konstanten Verhältnisses von Kommutationszahlen höherer Ordnung. Unser Ausgangspunkt, die höhern Summen der diskontierten Zahlen mittelst Anpassungsparablen zu berechnen, kann als eine Verfeinerung der Methode von Poukka aufgefasst werden. Während dessen Formel für die lebenslängliche Leibrente wohl keiner Erweiterung fähig ist, können wir auch Formeln für die temporäre Leibrente mit guter Genauigkeit aufstellen.

Die höhern Summen $S_x^{(k)}$ sind näherungsweise mit unserer Methode in einfacher Weise berechenbar. Wie die Beispiele zeigen, erreicht man bei der Berechnung der Leibrenten mittelst der entsprechenden Reihenentwicklungen selbst, eine weitergehende Genauigkeit als bisher; die rechnerische Arbeit ist dabei nicht wesentlich grösser als bei den eigentlichen Näherungsformeln.

Versicherungswissenschaftliches Seminar
der Universität Bern.

Mai 1929.

Anhang.

Die nachfolgenden Tabellen zeigen, wie weit sich z. B. für die Grundlagen des Text-Books, $i = 4\ \%$, die Näherungsparabeln der Summen der diskontierten Zahlen den Beobachtungswerten anpassen:

Tabelle I der $N_x : 10^3$; $x_0 + t_0 = 20 + 40$; $m_{60} = 4{,}020$.

Tabelle I.

Alter x	genauer Wert	mit Formel (53) berechnet	absoluter Fehler
20	862	862	0
30	502	511	— 9
45	199	200	— 1
60	58	58	0
75	8	10	— 2
$w = 102$	0	0	0

Tabelle II der $S_x : 10^3$; $x_0 + t_0 = 20 + 25$; $m_{45} = 4{,}9917$.

Tabelle II.

Alter x	genauer Wert	mit Formel (53) berechnet	absoluter Fehler
20	14 334	14 334	0
30	7 469	7 496	— 27
45	2 333	2 333	0
60	480	508	— 28
75	39	56	— 17
$w = 102$	00	00	0

Tabelle III der R_x: 100; $x_0 + t_0 = 20 + 25$; $m_{45} = 2{,}875$.

Tabelle III.

Alter x	genauer Wert	mit Formel (53) berechnet	absoluter Fehler
20	3107	3107	00
30	2147	2139	08
45	1090	1090	00
60	400	455	— 55
75	64	128	— 64
$w = 102$	00	00	00

In der nachfolgenden Tabelle IV sind die $S_x^{(2)}$ berechnet nach der Formel (56 a):

$$S_x^{(2)} = S_x \left(\frac{w - x}{m + 1} + \frac{1}{2} \right)$$

Grundlagen: Text-Book, 4 %, $w = 102$, $t_0 = 25$.

$$m = \frac{\log S_{20+25} - \log S_{20}}{\log 57 - \log 82} = 4{,}9917.$$

Tabelle IV.

berechneter Wert $S_x^{(2)} : 10^3$	genauer Wert $S_x^{(2)} : 10^3$	Fehler in %	Alter x
188 857	188 088	0,4 %	21
86 050	85 534	0,4 %	31
34 991	34 279	2,1 %	41
11 965	11 392	5,0 %	51
3 099	2 828	8,2 %	61

Der relative Fehler nimmt mit zunehmendem Alter zu.

Beispiel 1.

Gegeben seien die Versicherungswerte für 4 %.

Grundlage: Text-Book; in letzterem sind noch die S_x angegeben.

Die höhern Summen sind nach den angeführten Formeln (56 *b*) zu berechnen; $m = 4{,}9917$.

Beispielsweise berechnet sich a'_{19} mittels der Entwicklung (33) zu:

$$a'_{19} = a_{19} - \frac{S_{20}}{D_{19}} \cdot vh + \frac{S_{20}^{(2)}}{D_{19}} (vh)^2 - \frac{S_{20}^{(3)}}{D_{19}} (vh)^3 + - \ldots$$

1. Übergang von 4 % nach 4,5 %; a_{19} (4 %) $= 18{,}806$.

$$(4{,}5\ \%)\ a'_{19} = 18{,}806 - 1{,}50338 + 0{,}10253 - 0{,}00605 + \\ + 0{,}00032.$$

$$a'_{19} = 18{,}806 - 1{,}407 = 17{,}399$$

genauer Wert von (4,5 %) $a_{19} = 17{,}399$

$$\varDelta = 0{,}000.$$

2. Übergang von 4 % nach 3,5 %; $h = -0{,}005$

$$(3{,}5\ \%)\ a'_{19} = 18{,}806 + 1{,}50338 + 0{,}10253 + 0{,}00605 + \\ + 0{,}00032.$$

$$a'_{19} = 18{,}806 + 1{,}612 = 20{,}418$$

genauer Wert von (3,5 %) $a_{19} = 20{,}418$

$$\varDelta = 0{,}000.$$

Die nachfolgende Tabelle V gibt eine Zusammenstellung der berechneten, der genauen Werte und der absoluten Fehler von a'_{19} bei einem Übergange von 4 % nach i':

Tabelle V.

i'	berechneter Wert von a'_{19}	genauer Wert von a_{19}	absoluter Fehler
3 %	22,277	22,275	— 0,002
3,5 %	20,418	20,418	0,000
4,5 %	17,399	17,399	0,000
5 %	16,1655	16,165	— 0,0005
6 %	14,113	14,109	— 0,004

Die hier auftretende Genauigkeit ist etwas grösser als diejenige bisher bekannter Formeln. Für temporäre Leibrenten ergibt die Berechnung mit der entsprechenden Reihenentwicklung (51) eine noch grössere Genauigkeit.

Beispiel 2.

In ähnlicher Weise ist nachfolgend der Barwert der lebenslänglichen Todesfallversicherung: A'_{20} nach den Grundlagen des Text-Books, 4 %, berechnet:

Gegeben ist: A_{20} (4 %) $= 0{,}24377$; $R_{20} = 310\,718{,}5$

(52 a)
$$A'_{20} = A_{20} - \frac{R_{20}}{D_{20}}(vh) + \frac{R^{(2)}_{20}}{D_{20}}(vh)^2 - \frac{R^{(3)}_{20}}{D_{20}}(vh)^3 + - \ldots$$

Übergang von 4 % nach 4,5 %; $h = 0{,}005$

$$(4{,}5\,\%)\ \mathrm{A}'_{20} = 0{,}24377 - 0{,}034075 + 0{,}003526 + \\ - 0{,}000294 + 0{,}000021 - 0{,}000001$$

$$A'_{20} = 0{,}24377 - 0{,}03082 = 0{,}21295$$

genauer Wert von (4,5 %) $A_{20} = 0{,}212289$

$$\Delta = -0{,}00006$$

In der nachfolgenden Tabelle VI sind die mit der obigen Reihe (52 a) berechneten Werte von A'_{20} und die absoluten Fehler zusammengestellt, die sich ergeben bei einem Übergange von 4 % nach i':

Tabelle VI.

i'	berechneter Wert von A'_{20}	genauer Wert von A_{20}	absoluter Fehler
3 %	0,32874	0,32822	— 0,00052
3,5 %	0,28169	0,28159	— 0,00010
4,5 %	0,21295	0,21289	— 0,00006
5 %	0,18767	0,18750	— 0,00017
6 %	0,14933	0,14896	— 0,00037

Der prozentuale Fehler ist hier grösser als bei den Leibrenten, weil die Anpassung der Parabel an die Kurve der beobachteten Werte von R_x besonders in hohem Alter schlechter ist als bei den S_x.

Beispiel 3.

Berechnen wir daher A'_x für neue Zinsfüsse, indem wir den Ausdruck: $1 - d' \cdot \mathrm{a}'_x$ bilden, so werden wir genauere Werte für A'_x erhalten.

Es seien die Versicherungswerte für $i = 4$ % bekannt; Grundlage: Text-Book.

In der folgenden Tabelle VII sind die Werte von A'_{19} durch Bildung des Ausdruckes: $1 - d' \cdot \mathrm{a}'_{19}$ berechnet und die absoluten Fehler zusammengestellt, die sich ergeben bei einem Übergange von 4 % nach i'.

Tabelle VII.

i'	berechneter Wert von a'_{19}	genauer Wert von a_{19}	absoluter Fehler
3 %	0,32203	0,32208	0,00005
3,5 %	0,27572	0,27571	— 0,00001
4,5 %	0,20770	0,20768	— 0,00002
5 %	0,182595	0,18265	0,000055
6 %	0,14455	0,14475	0,00020

Beispiel 4.

Aus den gegebenen Versicherungswerten zu 4 %, Text-Book, sei der Rentenbarwert a'_{20} nach der Formel (35 *c*) für andere Zinsfüsse zu berechnen.

Die nachfolgende Tabelle VIII enthält die Werte der a'_{20}, nach der Formel (57) berechnet, und deren absolute Fehler, die sich ergeben bei einem Übergange von 4 % nach i':

Tabelle VIII.

i'	berechneter Wert von a'_{20}	genauer Wert von a_{20}	absoluter Fehler
3 %	22,064	22,077	— 0,013
3,5 %	20,245	20,246	— 0,001
4,5 %	17,279	17,278	0,001
5 %	16,062	16,058	0,004
6 %	14,035	14,008	0,027

Beispiel 5.

Gegeben seien die Versicherungswerte für 4 %, Text-Book; für die 30 Jahre dauernde Rente ${}_{|30}a'_x$ sind für andere Zinsfüsse ihr Wert nach der Formel (58) zu berechnen. Die Zahlen $S_x^{(2)}$ sind mit der Formel (56 a) bestimmt worden. ($m = 4{,}9917$; $w = 102$.)

Es ergeben sich bei einem Übergang von 4 % nach i' die in der Tabelle IX zusammengestellten Werte für ${}_{|30}a'_x$ und ihre Fehler:

Tabelle IX $({}_{|30}a_{19})$.

i'	berechneter Wert ${}_{|30}a'_{19}$	genauer Wert ${}_{|30}a_{19}$	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
3 %	17,793	17,789	— 0,004	0,023 %
3,5 %	16,742	16,741	— 0,001	0,006 %
4,5 %	14,910	14,910	0,000	0,000 %
5 %	14,108	14,109	0,001	0,007 %
6 %	12,687	12,694	0,007	0,054 %

Die Tabelle X enthält die Resultate für die Berechnung von ${}_{|30}a'_{50}$ nach der Formel (58), bei einem Übergange von 4 % nach i':

Tabelle X.

i'	berechneter Wert ${}_{|30}a'_{50}$	genauer Wert ${}_{|30}a_{50}$	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
3 %	13,592	13,585	— 0,007	0,052 %
3,5 %	12,924	12,922	— 0,002	0,016 %
4,5 %	11,744	11,743	— 0,001	0,009 %
5 %	11,221	11,217	— 0,004	0,036 %
6 %	10,286	10,277	— 0,009	0,087 %

Beispiele 6.

Gegeben seien die Versicherungswerte für $i = 4\,\%$; Text-Book. In den nachfolgenden Tabellen XI bis XIV sind die absoluten und prozentualen Fehler von a'_x angegeben, die sich bei einem Übergange von 4 % nach i' mit der Formel (61 *b*) ergeben.

Tabelle XI.

Übergang von 4 % nach 4,5 %.

x	a_x:4 %	a'_x:4,5 % berechnet	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
20	18,662	17,280	— 0,001	0,006 %
30	17,155	16,013	— 0,002	0,012 %
40	15,136	14,2625	— 0,0075	0,007 %
50	12,522	11,925	— 0,002	0,018 %

Tabelle XII.

Übergang von 4 % nach 3,5 %.

x	a_x:3,5 % berechnet	a_x:3,5 % genau	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
20	20,2435	20,245	0,0015	0,007 %
30	18,441	18,441	0,000	0,000 %
40	16,104	16,103	— 0,001	0,006 %
50	13,173	13,172	— 0,001	0,008 %

Tabelle XIII.

Übergang von 4 % nach 5 %.

x	a_x:5 % berechnet	genau	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
20	16,072	16,062	— 0,010	0,06 %
30	14,999	14,991	— 0,008	0,05 %
40	13,474	13,469	— 0,005	0,03 %
50	11,3775	11,371	— 0,0065	0,058 %

Tabelle XIV.

Übergang von 4 % nach 3 %.

x	a_x:3 % berechnet	genau	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
20	22,059	22,064	0,005	0,023 %
30	19,890	19,895	0,005	0,025 %
40	17,176	17,177	0,001	0,004 %
50	13,888	13,878	— 0,010	0,075 %

Verzeichnis der wichtigsten Literatur über das Zinsfussproblem.

In dem nachfolgenden Literaturverzeichnis sind alle Abhandlungen mit fortlaufenden arabischen Ziffern versehen, und im Text wird zur Zitierung einer Arbeit neben dem Namen des Autors nur die betreffende Nummer in Klammern beigefügt.

Es bedeuten in der Folge:

(I) Archief voor de Verzekerings-Wetenschap.
(II) Assekuranz-Jahrbuch.
(III) Assurance-Magazine.
(IV) Bulletin trimestriel de l'institut des actuaires français.
(V) Mitteilungen österreichischer Versicherungstechniker.
(VI) Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker.
(VIII) Österreichische Versicherungszeitschrift.
(IX) Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft.
(X) Skandinavisk Aktuarietidskrift (Aktuaren).

[1] *James Meikle:* (III) vol. III, Seite 325, 1853.

[2] *L. Fontaine:* (IV) Nr. 2, page 34, 1892.
Note sur le calcul des rentes viagères, à différents taux, par interpolation.

[3] *M. A. Achard:* (IV) Nr. 2, page 38, 1892.
Note sur le changement du taux dans le calcul des annuités viagères.

[4] *D. T. Lundgren:* (VIII) 1898.
Über eine Methode zur Anwendung einer Grundtafel für Berechnungen mit verändertem Zinsfusse.

[5] *H. Poterin du Motel:* page 201, 1899.
Théorie mathématique des assurances.

[6] *R. H. van Dorsten:* (I) Bd. 4, Seite 284, 1900.
Benaderingsformules bij verandering van Rentevoet. (1899.)

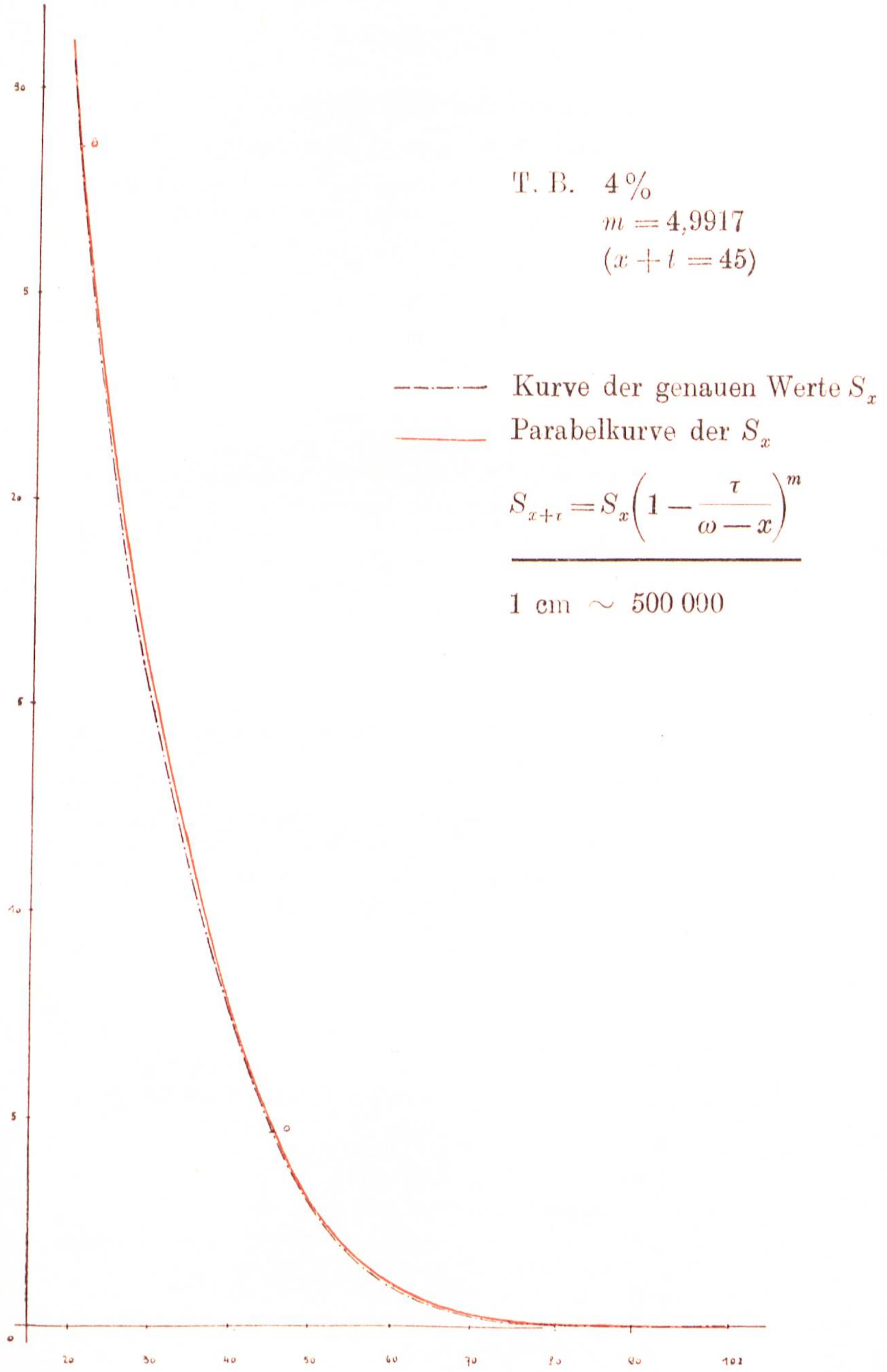
[7] *J. C. Kluyver:* (I) Bd. 5, Seite 1, 1901.
Nog iets over benadering van Lijfrenten bij verandering van Rentevoet.

[8] *J. M. Vaz Dias:* (I) Bd. 5, Seite 437, 1901.
Elementaire afleiding van benaderingsformules bij verandering van rentevoet.

[9] *J. M. Vaz Dias:* (II), XXIV. Jahrgang, 1903, Seite 17.
Annähernde Berechnung bei Änderung des Zinsfusses.

[10] *E. Blaschke:* (V), Heft IX, 1903, 1914.
Über eine Anwendung des Sterbegesetzes Gompertz-Makeham (vollständiges Leibrentensystem).

[11] *J. P. Gram:* Aktuaren, Seite 57, 1904.
Om Makehams Dodelighedsformel og dens Anvendelse paa ikke normale Liv.



T. B. 4 %
$m = 4{,}9917$
$(x + t = 45)$
Kurve der genauen Werte S_x
Parabelkurve der S_x
$S_{x+\tau} = S_x\left(1 - \frac{\tau}{\omega - x}\right)^m$
1 cm $\sim$ 500 000

[12] *G. J. D. Mounier:* (I) Bd. 8, 1906, Seite 437.
Verandering van Rentevoet door middel van per termijn stijgende Lijfrente, betaalbar in termijnen.

[13] *Pexider:* (IX) Bd. 7, 1907.
Beitrag zur Zinstheorie.

[14] *J. F. Steffensen:* (X) Hefte 1 und 2, 1918, Seite 82.
On certain inequalities between mean values, and their applications to actuarial problems.

[15] *Birger Meidell:* (X) Hefte 3 und 4, 1918, Seite 180.
Note sur quelques inégalités et formules d'approximation.

[16] *L. Weber:* (IV) Nr. 104, 1921, page 17.
Sur une méthode de calcul rapide de valeurs approchées des annuités viagères temporaires.

[17] *M. Gauthier:* (IV) Nr. 106, 1921, page 47.
Note sur le changement de taux dans les calculs d'annuités.

[18] *R. Palmqvist:* (X) Heft 3, 1921, Seite 152.
Sur une méthode d'approximation applicable à certains problèmes actuariels

[19] *K. A. Poukka:* (X) Heft 3, 1923, Seite 137.
Über die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfusses.

[20] *W. Saxer:* (VI) Heft 19, 1924, Seite 19.
Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung.

[21] *E. Sos:* (IX) Bd. 24, 1924.
Berechnung von Versicherungswerten aus Tabellen; ergänzt durch E. Meier in (IX) Bd. 25, 1925.

[22] *M. Hochart:* (IV) Nr. 123, 1925, page 146.
Note sur le problème général du taux de l'intérêt dans le calcul des annuités viagères.

[23] *M. Hochart:* (IV) Nr. 123, 1925, page 148.
Note sur le changement du taux d'intérêt dans le calcul des annuités viagères.

Weitere benützte Literatur:

[24] *W. Friedli:* Mathematische Untersuchungen über die in unterjährigen Raten zahlbaren Terminen. 1924 (noch nicht gedruckt).

[25] *Landré:* Lebensversicherung.
(5. Auflage, 1921.)

[26] Text-Book.

[27] A. F.