Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ordnungen aus den Beobachtungszahlen

Autor(en): **Linder, Arthur**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **30 (1935)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555015

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ordnungen aus den Beobachtungszahlen.

Von Dr. **Arthur Linder**, Bern.

1. Vorbemerkungen.

Als eine *unabhängige Ordnung* definiert Prof. *Friedli* «*eine Gesamtheit gleichaltriger Personen, die nur aus einer Ursache abnimmt*» **1** [1]). Jede unabhängige Ordnung kann durch die Werte einer der drei folgenden Funktionen gegeben werden:

1. $f(x)$, die zu jedem Alter x den Wert der *unabhängigen Ordnung* festlegt,
2. $q(x)$, die *Abgangswahrscheinlichkeit* und
3. $\mu(x)$, die *Abgangsintensität.*

Zwischen diesen drei Grössen bestehen Gleichungen von der Form

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = C \prod\limits_{x=a}^{x-1} (1-q(x)) = C\, e^{-\int\limits_a^x \mu(x)\,dx} \\ 1-q(x) = \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = e^{-\int\limits_x^{x+1} \mu(x)\,dx} \\ \mu(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)} \end{cases}$$

[1]) Die Literatur ist am Schluss der Arbeit zusammengestellt.

Prof. *Friedli* erwähnt einige Beispiele von unabhängigen Ordnungen:

1. Allgemeine Absterbeordnung,
2. Absterbeordnung für aktive Personen,
3. Invalidierungsordnung der Aktiven,
4. Verheiratungsordnung der Ledigen,
5. Absterbeordnung der aktiven Ledigen,
6. Absterbeordnung der nicht an Lungentuberkulose sterbenden Bevölkerung.

Der Übergang von den Beobachtungen zur unabhängigen Ordnung geschieht meist durch Berechnung der $q(x)$. Im Falle der allgemeinen Absterbeordnung lautet die Formel, welche die $q(x)$ aus den Beobachtungszahlen gibt

$$q_x = \frac{T}{B + \frac{E}{2} - \frac{A}{2}} \tag{2}$$

In dieser Formel bedeutet

q_x die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, im Laufe des nächsten Altersjahres zu sterben,

B die Zahl der x-jährigen zu Beginn des Jahres,

E die Zahl der im Verlaufe des Jahres neu hinzugekommenen Personen,

A die Zahl der im Verlaufe des Jahres (nicht durch Tod) ausgeschiedenen Personen,

T die Zahl der im Verlaufe des Jahres verstorbenen Personen.

Für die übrigen der genannten unabhängigen Ordnungen ist das Prinzip der Berechnung der Abgangswahrscheinlichkeiten aus den Erfahrungswerten unverändert dasselbe. Die Zahl der Personen, die infolge der ins Auge gefassten Ursache aus der Gesamtheit

ausscheiden, wird ins Verhältnis gesetzt zur Gesamtzahl zu Beginn des Jahres, vermehrt um die Hälfte der im Verlaufe des Jahres eintretenden und vermindert um die Hälfte der (nicht infolge der betreffenden Ursache) ausscheidenden Personen.

Der Kürze halber verweisen wir für die Berechnung der Abgangswahrscheinlichkeiten der verschiedenen unabhängigen Ordnungen auf die bereits erwähnte grundlegende Arbeit von Prof. *Friedli*. Historisch ist von Interesse, dass die Formel (2) bereits von J. H. *Lambert* verwendet wurde und dass dieser tiefgründige Mathematiker auch als erster eine unabhängige Ordnung berechnet hat, worauf *Loewy* **2** aufmerksam gemacht hat. In seinem Werke «Beiträge zum Gebrauche der Mathematik» **3** gibt Lambert eine Absterbeordnung «wenn die Blattern nicht wirksam wären», d. h. er berechnet eine Absterbeordnung für die an den übrigen Todesursachen Verstorbenen, wobei er setzt

$$q_x^{nb} = \frac{T - T_b}{B - \frac{1}{2} T_b} \tag{3}$$

T = Gesamtzahl der Sterbefälle
T_b = Sterbefälle an Blattern
B = Anfangsbevölkerung.

Es wird im folgenden genügen, die Berechnung der Abgangswahrscheinlichkeit für die gewöhnliche Absterbeordnung darzustellen. Die Übertragung auf andere Fälle bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Die Formeln (2) und (3) sind *Näherungsformeln*. Ihnen liegen bestimmte Annahmen zugrunde, die am schärfsten durch *Lexis* **4** umschrieben worden sind. Um die Darlegungen von Lexis in einfacher Form dar-

stellen zu können, führen wir das Zeichen $q\,(0, t)$ ein für die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, zwischen den Altersgrenzen x und $x + t$ zu sterben. Ähnlich bezeichne $q\,(t, 1)$ die Wahrscheinlichkeit eines $x + t$-jährigen, bis zum Alter $x + 1$ zu sterben. Für t gilt stets

$$0 \leqq t \leqq 1.$$

Um zur Formel (2) zu gelangen, hat man anzunehmen:

1. $$q\,(t, 1) = (1 - t)\, q\,(0, 1)$$

2. gleichförmige Verteilung der Ein- und Austritte.

Das Jahr sei in n gleichlange Zeitstrecken eingeteilt. Zu Beginn jedes dieser Teile mögen e Personen eintreten. Von den Eingetretenen sterben somit im Verlaufe des Jahres

$$T_e = e\,q(0,1) + e\,q\left(\frac{1}{n}, 1\right) + e\,q\left(\frac{2}{n}, 1\right) + \ldots + e\,q\left(\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Daraus wird nach der ersten Annahme

$$T_e = \frac{e\,n}{n}\,q\,(0,1) + \frac{e\,(n-1)}{n}\,q\,(0,1) + \ldots + \frac{e\,(n-(n-2))}{n}\,q\,(0,1) + \frac{e}{n}\,q(0,1)$$

$$= \frac{e\,n\,(n+1)}{2\,n}\,q\,(0, 1)$$

Nun ist aber $ne = E$ die Gesamtzahl der Eintritte. Infolgedessen wird

$$q\,(0, 1) = \frac{T_e}{\frac{1}{2}E}$$

wenn die Zahl der Teile n gegen ∞ strebt.

Aus den gleichen Gründen erhält man für die Sterbefälle der Austretenden

$$q\,(0,1) = \frac{T_a}{\frac{1}{2}A}$$

Ist zu Beginn des Jahres noch ein Bestand von B Personen vorhanden, so erhält man als endgültige Formel zur Berechnung von q die Formel (2).

Wir begnügen uns hier mit diesem Hinweis auf die Grundlagen der am häufigsten benützten Formel (2). Eine eingehende historische Darstellung der Berechnungsmethoden von Sterbenswahrscheinlichkeiten hat der Verfasser an anderer Stelle geboten **5.**

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie sich der Übergang von den Beobachtungen zu den Werten q ohne die Annahmen 1 und 2 über die unterjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten und den Verlauf der Eintritte und Austritte ausführen lässt.

2. Kontinuierliche Methode.

Als erster hat *Insolera* **6** gezeigt, dass zur Berechnung von q Annahmen über die $q\,(t, 1)$ nicht nur unnötig, sondern sogar unstatthaft sind.

Insolera geht von folgender Gleichung aus

$$(4) \qquad \int_0^z d\,(t)\,dt = l_0 q\,(0, z) + \int_0^z r\,(t)\,q\,(t, z)\,dt$$

l_0 bedeutet darin die Zahl der gleichaltrig Lebenden zu Beginn des in Frage stehenden Altersjahres. $d\,(t)\,dt$ ist die Zahl der im Zeitpunkt t in der Gesamtheit sterbenden Personen, $r\,(t)\,dt$ der Mehrzuzug im Zeitpunkt t und $q\,(t, z)$ die Sterbenswahrscheinlichkeit für das Alters-

intervall t bis z. Gleichung (4) besagt, dass die Zahl aller beobachteten Sterbefälle gleich ist der Zahl der Verstorbenen aus der Ausgangsgesamtheit, vermehrt um die Sterbefälle aus den Mehrzuziehenden.

Sind alle Grössen ausser den q bekannt, so kann die Gleichung (4) aufgelöst werden für ein beliebiges Intervall oz $(o < z \leqslant 1)$. Zur Lösung setzen wir

$$(5) \qquad D_z = \frac{1}{l_0} \int_0^z d(t)\, dt, \quad R_z = \frac{1}{l_0} \int_0^z r(t)\, dt$$

und weiter für $q(t, z)$

$$(6) \qquad q(t, z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{\varphi(z)}$$

Dabei ist $\varphi(z) = e^{\int_0^z \mu(t)\, dt}$, wenn $\mu(t)$ die Sterblichkeitsintensität bedeutet. Setzt man D_z, R_z und $\varphi(z)$ in die Gleichung (4) gemäss (5) und (6) ein, so erhält man

$$D_z = 1 - \frac{1}{\varphi(z)} + \int_0^z R_t' \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{\varphi(z)}\, dt$$

oder

$$(7) \qquad \varphi(z)\,(1 + R_z - D_z) - 1 = \int_0^z R_t'\, \varphi(t)\, dt$$

Diese Integralgleichung für φ lässt sich mit Benützung eines Theorems von Insolera auflösen. Ist

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_0^X K(x, z)\, v(z)\, dz$$

eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art für $v(z)$, deren Kern die Form

$$K(x, z) = \left(\frac{f(x)}{f(z)}\right)^{\lambda} \frac{d}{dz} \ln f(z)$$

hat, wobei λ eine beliebige Konstante und $f(x)$ eine beliebige Funktion ist, die im Einheitsquadrat endlich und stetig bleibt. Dann ist der lösende Kern der Integralgleichung für irgendein endliches, von Null verschiedenes λ gleich

$$-K(x, x) = -\frac{d}{dx} \ln f(x)$$

Wie man sieht, hängt der lösende Kern nicht von λ ab.

Wir schreiben noch (7) etwas anders:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+R_z-D_z} + \int_0^z \frac{R'_y}{1+R_z-D_z} \varphi(y)\, dy$$

Setzt man nun für den Kern

$$\frac{R'_y}{1+R_z-D_z} = \lambda \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \frac{f'(y)}{f(y)} \tag{8}$$

so erhält man als Lösung von (7):

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+R_z-D_z} + \lambda \int_0^z \frac{f'(y)}{f(y)} \cdot \frac{dy}{1+R_y-D_y} \tag{9}$$

Hier ist noch $f(y)$ zu eliminieren. Es ist

$$\lambda \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{d}{dy}\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \tag{10}$$

und daraus

$$\lambda \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{d}{dy}\left\{ ln\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda}\right\} \tag{11}$$

Durch Integration von (8) ergibt sich bei Beachtung von (10)

$$\int \frac{R'_y}{1+R_z-D_z}\, dy = \int \frac{d}{dy}\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} dy$$

oder

$$\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} = \frac{R_y}{1+R_z-D_z} + C(z) \tag{12}$$

Setzt man in (12) $y = z$, so erhält man für $C(z)$

$$C(z) = \frac{1-D_z}{1+R_z-D_z} \tag{13}$$

Somit hat man für

$$\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} = \frac{1+R_y-D_z}{1+R_z-D_z} \tag{14}$$

Als endgültige Lösung wird aus (9)

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-D_z+R_z} + \int_0^z \frac{R'_y\, dy}{(1-D_z+R_y)(1-D_y+R_y)} \tag{15}$$

In Verbindung mit (6) bietet (15) die allgemeine Lösung des Problems der Wanderungskorrektur, bei Annahme *kontinuierlicher* Vorgänge [1]).

Die Funktionen R und D liessen sich nun aus dem empirischen Verlaufe der Mehrzuzüge und der Sterbefälle herleiten, und danach durch Integration der Gleichung (15) — unter Umständen nur durch angenäherte Berechnung — die Werte von $\varphi(z)$ und $q(0, z)$ bestimmen.

Es muss weitern Untersuchungen vorbehalten bleiben, die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten der Gleichung (15) weiter zu verfolgen.

Wir begnügen uns damit, hier zu zeigen, wie Insolera für den Fall des *gleichförmigen Verlaufs* der *Sterbefälle* und des *Mehrzuzugs* eine Näherungsformel herleitet.

Es sei

$$D_t = \triangle_0 t\,, \quad R_t = \varrho_0 t \tag{16}$$

---

[1]) *Anmerkung bei der Korrektur:* Wie aus einer noch nicht veröffentlichten Berner Dissertation von *H. Schulthess* hervorgeht, ist als Lösung der Integralgleichung (7) nicht (15), sondern der Ausdruck

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 - D(z) + R(z)}\, e^{\int_0^z \frac{R'(t)\,dt}{1 - D(t) + R(t)}} \tag{15*}$$

anzunehmen, ein Ausdruck, den übrigens auch Insolera schon abgeleitet hat.

Obschon somit die Formel von Insolera (Gleichung (22)) anfechtbar ist, fällt doch *Insolera* das Verdienst zu, mit der Integralgleichung (7) den Weg zur einwandfreien Lösung des Problems der Wanderungskorrektur gewiesen zu haben. Die Ausführungen im Abschnitt 3 der vorliegenden Arbeit, und insbesondere die von uns gegebene Formel (36), werden durch die Einwände von Schulthess nicht berührt.

wobei $\triangle_0$ und ϱ_0 konstant sind. Aus (15) wird

$$(17) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1-(\triangle_0-\varrho_0)\,z} + \int_0^z \frac{\varrho_0\,dt}{(1-\triangle_0\,z+\varrho\,t)\,(1-(\triangle_0-\varrho_0)\,t)}$$

Bezeichnen wir das Integral auf der rechten Seite mit J, so bekommen wir durch Partialbruchzerlegung und Integration

$$(18) \qquad J = \frac{\varrho_0\; ln\,(1-\triangle_0\,z)}{\triangle_0\,\{(\triangle_0-\varrho_0)\,z-1\}}$$

In (14) eingesetzt gibt

$$(19) \qquad \varphi(z) = \frac{\triangle_0-\varrho_0\; ln\;(1-\triangle_0\,z)}{\triangle_0\,\{1-(\triangle_0-\varrho_0)\,z\}}$$

und daraus in Verbindung mit (6)

$$(20) \qquad q\,(0,z) = 1 - \frac{\triangle_0\,\{1-(\triangle_0-\varrho_0)\,z\}}{\triangle_0-\varrho_0\; ln\;(1-\triangle_0\,z)}$$

Setzt man darin $z = 1$ und statt 0 das Alter x, so ergibt sich die endgültige Formel

$$(21) \qquad q_x = 1 - \triangle_x\,\frac{1-\triangle_x+\varrho_x}{\triangle_x-\varrho_x\; ln\;(1-\triangle_x)}$$

Da $\triangle_x$ stets positiv und kleiner als 1 ist, ja sogar in den meisten Altersjahren nur wenig von 0 verschieden ist, darf $ln\,(1-\triangle_x)$ in eine Reihe entwickelt werden und die Glieder 3. und höhern Grades können vernachlässigt werden.

Es ist

$$ln\,(1 - \triangle_x) = -\triangle_x - \frac{\triangle_x^2}{2} - \frac{\triangle_x^3}{3} - \ldots$$

In (21) eingesetzt gibt

$$(22) \qquad q_x \simeq \frac{\triangle_x\,(2 + \varrho_x)}{2 + \varrho_x\,(2 + \triangle_x)}$$

die endgültige Formel von Insolera. Sie gilt für positive und negative Werte von ϱ_x, vorausgesetzt, dass $\triangle_x \leqslant 1 + \varrho_x$ ist, da sonst $q_x > 1$. Praktisch heisst dies, dass die Formel von Insolera nicht gilt, wenn statt eines Mehrzuzugs oder eines schwachen Mehrwegzugs ein so starker Mehr*weg*zug besteht, dass $1 - \varrho_x < \triangle_x$ wird.

3. Diskontinuierliche Methode.

Man kann nun, ohne irgendeine Annahme über die unterjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten zu treffen, eine Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einfluss des Zu- und Wegzugs aufstellen, ohne sich dabei der Infinitesimalrechnung zu bedienen.

Man denke sich das Jahr in z (z. B. 12) Teile geteilt. Vorausgesetzt wird dabei einzig, dass

1. die Zahl der Sterbefälle und der Mehrzugezogenen oder Mehrweggezogenen bekannt sei,
2. die Ein- und Austritte (bzw. Zu- und Wegzüge) am Ende eines jeden der z Jahresteile erfolge.

In gewissen Fällen hat die in diesem Abschnitt gewonnene Formel gegenüber jener von Insolera den Vorteil, der während eines Jahres oft sehr unterschiedlichen Gestaltung der Wanderungen Rechnung zu tragen. Insolera nimmt dagegen ausdrücklich an, dass der Mehr-

zuzug sich im Verlaufe des Jahres nicht ändere. Nun weiss man aber, dass insbesondere auch für Städte die Wanderungen ausgesprochen saisonbedingt sind. Bei der Berechnung von Sterbetafeln für Städte darf dieser Umstand nicht ausser acht gelassen werden. Die Formel von Insolera ist daher bei Sterbetafeln für Gebiete, die jahreszeitliche Schwankungen der Wanderungen zeigen, nur mit Vorbehalt anwendbar.

Wir bezeichnen die Zahl der im 1., 2., 3., ... z. Teil des Jahres Verstorbenen mit $d_1, d_2, d_3 \ldots d_z$. Zu Beginn des Jahres mögen der Gesamtheit l_0 gleichaltrige Personen angehören. Nach dem ersten Intervall treten γ_1 Personen dazu, nach dem zweiten γ_2 usw. bis γ_{z-1} vor Beginn des z. Intervalls. Mit $q\,(0, z)$ bezeichnen wir die Sterbenswahrscheinlichkeit im ganzen z Teile umfassenden Zeitraum, mit $q\,(t, z)$ die Wahrscheinlichkeit einer nach dem t. Zeitintervall lebenden Person, bis zum Ende des z. Intervalls zu sterben. Unter diesen Voraussetzungen erhält man:

$$\sum_{t=1}^{z} d_t = l_0\, q\,(0, z) + \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t\, q\,(t, z) \tag{23}$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe aller in der Gesamtheit erfolgten Sterbefälle gleich ist der Zahl der aus den anfangs vorhandenen l_0 Personen herrührenden Sterbefälle plus die Summe der aus dem Mehrzuzug hervorgehenden Todesfälle. γ_t kann auch negativ sein; es handelt sich dann um einen Mehrwegzug. Und die Sterbefälle aus dem Mehrwegzug sind mit negativem Vorzeichen versehen, weil sie nicht in der Gesamtheit stattfinden und daher unter den beobachteten $\Sigma\, d_t$ nicht inbegriffen sein können.

Nun sei für einen Moment angenommen, die Kurve der Überlebenden für die in Frage stehende Alters-

strecke sei bekannt; l_0^* sei die Zahl der Überlebenden, die dem Ausgangsalter, l_t^* diejenige, die dem Ausgangsalter plus t entspricht. Mit $\varphi(t)$ sei dann die Grösse

$$\varphi(t) = \frac{l_0^*}{l_t^*}$$

bezeichnet. Aus dieser Definition folgt sofort $\varphi(0) = 1$. Nun ist

$$(24) \qquad q(t, z) = 1 - \frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}.$$

Setzt man diese Werte für $q(t, z)$ in Gleichung (23) ein, so ergibt sich

$$(25) \qquad \sum_{t=1}^{z} d_t = l_0 - l_0 \frac{\varphi(0)}{\varphi(z)} + \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t - \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t \frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}$$

Daraus erhält man

$$\varphi(z) \sum_{t=1}^{z} d_t = l_0 \varphi(z) - l_0 + \varphi(z) \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t - \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t \varphi(t)$$

$$(25) \qquad l_0 = \varphi(z) \left\{ l_0 + \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t - \sum_{t=1}^{z} d_t \right\} - \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t \varphi(t)$$

In dieser Gleichung sind l_0, γ_t und d_t bekannte, $\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(z)$ unbekannte Grössen. Die Grössen $\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(z)$ lassen sich dadurch bestimmen, dass man die Gleichung nacheinander für $z = 1, 2, \ldots z$ ansetzt, nachdem man sie zweckmässig noch in folgende Form gebracht hat:

$$(26)\quad \frac{l_0}{l_0 + \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t - \sum_{t=1}^{z} d_t} = \varphi(z) - \frac{1}{l_0 + \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t - \sum_{t=1}^{z} d_t} \sum_{t=1}^{z-1} \gamma_t \varphi(t)$$

Nun wird

$$(27)\quad \begin{cases} z = 1 : \dfrac{l_0}{l_0 - d_1} = \varphi(1) \\[2ex] z = 2 : \dfrac{l_0}{l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)} = -\dfrac{1}{l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)} \{\gamma_1 \varphi(1)\} + \varphi(2) \\[2ex] z = 3 : \dfrac{l_0}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3)} = - \\[2ex] \qquad -\dfrac{1}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3)} \{\gamma_1 \varphi(1) + \gamma_2 \varphi(2)\} + \varphi(3) \\[2ex] \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Aus diesen z Gleichungen lassen sich die z Unbekannten $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... $\varphi(z)$ bestimmen. Man setze $\varphi(1)$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so bekommt man $\varphi(2)$. Durch Einsetzen von $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ in die dritte Gleichung erhält man $\varphi(3)$ usw.

Es wird

$$(29)\quad \varphi(1) = \frac{l_0}{l_0 - d_1}$$

$$\varphi(2) = \frac{l_0}{l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)} + \frac{1}{l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)} \cdot \frac{l_0}{l_0 - d_1} \gamma_1$$

$$= \frac{l_0 \left(1 + \dfrac{\gamma_1}{l_0 - d_1}\right)}{l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)}$$

$$(30)\quad \varphi(2) = \frac{l_0\,(l_0 - d_1 + \gamma_1)}{(l_0 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2))}$$

$$\varphi(3) = \frac{l_0}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3)} +$$

$$+ \frac{1}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3)} \{\gamma_1\,\varphi(1) + \gamma_2\,\varphi(2)\}$$

$$= \frac{l_0 + \dfrac{\gamma_1\,l_0}{l_0 - d_1} + \dfrac{\gamma_2\,l_0\,(l_0 - d_1 + \gamma_1)}{(l_0 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2))}}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3)}$$

$$= \frac{l_0\,(l_0 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 - d_2)) + \gamma_1\,l_0\,)l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)) + \gamma_2\,l_0\,(l_0 - d_1 + \gamma_1)}{(l_0 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2))\,(l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3))}$$

$$= \frac{l_0\,(l_0 + \gamma_1 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2)) + \gamma_2\,l_0\,(l_0 - d_1 + \gamma_1)}{(l_0 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2))\,(l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3))}$$

$$(31)\quad \varphi(3) = \frac{l_0\,(l_0 + \gamma_1 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2))}{(l_0 - d_1)\,(l_0 + \gamma_1 - (d_1 + d_2))\,(l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - (d_1 + d_2 + d_3))}$$

Schon aus diesen Gleichungen wird die Formel für $\varphi(z)$ ersichtlich. Man hat

$$(32)\qquad \varphi(z) = \frac{\prod\limits_{t=1}^{z}\left(l_0 + \sum\limits_{i=1}^{t-1}\gamma_i - \sum\limits_{i=1}^{t-1} d_i\right)}{\prod\limits_{t=1}^{z}\left(l_0 + \sum\limits_{i=1}^{t-1}\gamma_i - \sum\limits_{i=1}^{t} d_i\right)}$$

Da $q(0, z) = 1 - \frac{1}{\varphi(z)}$, und $q(0, z) + p(0, z) = 1$ ist, erhält man für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$(33) \qquad p(0, z) = \frac{\prod_{t=1}^{z} \left(l_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \gamma_i - \sum_{i=1}^{t} d_i \right)}{\prod_{t=1}^{z} \left(l_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\gamma_i - d_i) \right)}$$

Dieses Ergebnis lässt sich anschaulich interpretieren. Es ist nämlich

$$(34) \qquad p(0, z) = \frac{l_0 - d_1}{l_0} \cdot \frac{l_0 + \gamma_1 - d_1 - d_2}{l_0 + \gamma_1 - d_1} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \frac{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{z-1} - d_1 - d_2 \ldots - d_z}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{z-1} - d_1 - d_2 \ldots - d_{z-1}}$$

Der erste Faktor bedeutet die Überlebenswahrscheinlichkeit für das erste Zeitintervall, der zweite für das zweite Intervall und der letzte Faktor für das letzte Intervall. In der Tat stimmen diese Grössen mit unserer Annahme überein, dass die Ein- und Austritte am Ende jedes Alterszeitabschnittes vor sich gehen.

Gleichung (33) lässt sich auf eine einfachere Form bringen, wie man anhand von (34) leicht einsieht. Es ist

$$(35) \qquad p(0, z) = \left(1 - \frac{d_1}{l_0}\right) \left(1 - \frac{d_2}{l_0 + \gamma_1 - d_1}\right) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{d_z}{l_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{z-1} - d_1 - d_2 \ldots - d_{z-1}}\right)$$

und als Produktformel geschrieben

$$(36) \qquad p\,(0, z) = \prod_{t=1}^{z} \left(1 - \frac{d_t}{l_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (\gamma_i - d_i)}\right)$$

Diese Formel setzt einzig voraus, dass die Zahl der Sterbefälle und der Zu- und Weggezogenen in den z Zeitintervallen bekannt sei. Die Grösse dieser Zeitabschnitte ist beliebig. Es kann sich beispielsweise um Monate, also um ungleichlange Zeitstrecken handeln.

Als Spezialfall erhält man bei gleichmässiger Verteilung der Sterbefälle und des Mehrzuzugs auf die z Zeitstrecken aus Gleichung (36)

$$(37) \qquad p\,(0, z) = \prod_{t=1}^{z} \left(1 - \frac{d_0}{l_0 + (t-1)\,(\gamma_0 - d_0)}\right)$$

Für $p\,(0, z)$ lässt sich in diesem Falle noch folgende Bedingung formulieren:

$$(38) \qquad \left(1 - \frac{d_0}{l_0 + (\gamma_0 - d_0)}\right)^z \gtrless p\,(0, z) \gtrless \left(1 - \frac{d_0}{l_0 + (z-1)\,(\gamma_0 - d_0)}\right)^z,$$

wobei die obern Zeichen gelten, wenn $d_0 > \gamma_0$ und die untern, wenn $\gamma_0 > d_0$. Der einzige Fall, in welchem die Ungleichungen nicht ohne weiteres gelten, ist $d_0 > \gamma_0$ und $|(z-1)\,(\gamma_0 - d_0)| > l_0$; doch wird dieser praktisch wohl nie eintreten. Die Zahl der Sterbefälle müsste gegenüber dem Anfangsbestand unverhältnismässig gross sein.

4. Schlusswort.

Es dürfte sich empfehlen, bei der Berechnung von Volkssterbetafeln die Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der Formel (36) zu bestimmen. Ob dabei vierteljährliche oder monatliche Intervalle zugrunde gelegt werden müssen, kann nur nach genauer Prüfung aller Umstände in jedem einzelnen Falle festgelegt werden.

Literaturverzeichnis.

1. *Friedli, W.* Intensitätsfunktion und Zivilstand. Beiträge zu einer Theorie der unabhängigen und zusammengesetzten Ordnungen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21, 1926, S. 25—90.

2. *Loewy, A.* Johann Heinrich Lamberts Bedeutung für die Grundlagen des Versicherungswesens. Festgabe für Alfred Manes, S. 280—287. Berlin, 1927.

3. *Lambert, J. H.* Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. 3 Bände. Berlin, 1765.

4. *Lexis, W.* Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena, 1903.

5. *Linder, A.* Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln. Bern, 1934.

6. *Insolera, F.* Sul calcolo della probabilità annuale di morte in gruppi aperti di popolazione. Atti reale accad. scienze di Torino, Vol. LXII, Disp. 1ª, S. 611—619, 1926/27.

Derselbe. Su particolari equazioni di Volterra e loro applicazione finanziaria e demografica. Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LX, S. 247—252, 1927.