Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 30 (1935)

Artikel: Ein Beitrag zur Theorie der Ausgleichsrechnung

Autor: Schöb, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555035

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Beitrag zur Theorie der Ausgleichsrechnung.

Von Dr. **W. Schöb**, Rorschach.

Einleitung.

In den Naturwissenschaften muss man eine Erscheinung oft auf Grund des Experimentes beurteilen. Messungen sind vielfach das einzige Mittel, gewisse Gesetze und Eigenschaften ausfindig zu machen. Die Grösse der Messungen kann von einer unabhängigen Variablen abhängig sein, z. B. von der Zeit, Temperatur usw. Nimmt man nun die Messungen an den aufeinanderfolgenden Stellen dieser Variablen vor, so erhalten wir eine *Beobachtungsreihe*. Es wird einem bestimmten Zahlwert (Ordnungszahl) eine durch das Experiment ermittelte Grösse (Funktion) zugeordnet.

$$\begin{array}{c} x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n; \\ w(x_1),\ w(x_2),\ \ldots\ w(x_n) \end{array}$$

Da solchen Messungen immer Fehler anhaften, deren Ursachen die Unzulänglichkeiten der Messungen und der Apparate und Störungen sind, so nimmt man für jeden Wert von x viele Messungen vor. So erhalten wir eine Folge von Beobachtungsreihen.

$$\begin{array}{c} x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n \\ w_1(x_1),\ w_1(x_2)\ \ldots\ w_1(x_n) \\ w_2(x_1),\ w_2(x_2)\ \ldots\ w_2(x_n) \\ \vdots \\ w_m(x_1),\ w_m(x_2)\ \ldots\ w_m(x_n) \end{array}$$

Das ist nun nicht immer möglich. Wo es aber angeht, wird man aus den m-Beobachtungsreihen nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung die wahrscheinlichste Beobachtungsreihe $W(x)$ konstruieren. Die einfachste Bildung ist das arithmetische Mittel.

$$W(x_1) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} w_\nu (x_1)$$

$$\vdots$$

$$W(x_n) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} w_\nu (x_n)$$

Neben dieser Art Beobachtungsreihen, denen das Experiment zugrunde liegt, gibt es noch eine andere. An Stelle der experimentellen tritt die statistische Erfassung. Durch Zählung werden Eigenschaften von Gesamtheiten ermittelt. (Z. B. das Sterben in Personen-Gesamtheiten.) Diese zweite Art unterscheidet sich von der ersten nur hinsichtlich der Entstehungsweise.

Mathematisch stellt so eine Zuordnung von Variable und Beobachtung einen Verlauf dar. Stellen wir diesen graphisch dar, erhalten wir die Beobachtungskurve. Diese weist selten einen regelmässigen Verlauf auf. Es werden auch bei verhältnismässig grossem Beobachtungsmaterial Unstetigkeiten auftreten. Zumeist handelt es sich um Sprünge. Das graphische Bild ist eine gebrochene Linie. Doch kann man bei diesen Zickzacklinien fast immer eine deutliche Tendenz zur Zu- oder Abnahme oder zur Periodizität feststellen. Es kann auch vorkommen, dass diese Tendenz fehlt. Solche Fälle sind für uns uninteressant.

Die Schwankungen der Beobachtungswerte von Argument zu Argument sind meistens nicht begründet in der Natur des beschriebenen Vorganges und wider-

sprechen der Erfahrung. Man darf daher annehmen, dass bei einer grösseren Anzahl von Messungen oder bei Erweiterung des Beobachtungsmaterials diese Unstetigkeiten verschwinden würden. Da dieses aber immer im beschränkten Umfange vorhanden ist, muss man andere Mittel und Wege finden, der Kurve einen möglichst glatten Verlauf zu geben.

Nun tritt aber die Frage auf, inwiefern wir Sprünge als Unstimmigkeiten bezeichnen und sie entfernen dürfen. Bezeichnen wir eine Zacke in der Beobachtungskurve als eine Unstimmigkeit, so setzen wir doch einen gewissen erwarteten, regelmässigen Verlauf voraus. Wir wollen diesen Idealverlauf *Erwartung* nennen. Sie entbehrt jeder strengen Begründung und ist lediglich in der *Erfahrung* fundiert. Es stehen sich also Beobachtung und Erwartung gegenüber. In der Anpassung der wahrscheinlichsten Beobachtungsreihe an die Erwartung besteht das Wesen der Ausgleichung. Diese Anpassung nach mathematischen Grundsätzen darzustellen ist Aufgabe der Ausgleichtheoretiker. — Über die Erwartung können wir nichts Genaues sagen. In der Vielgestaltigkeit des Ausdruckes einer Erwartung besteht die Unbestimmtheit des Ausgleichproblemes.

Die Methoden, die zur Ausgleichung ausgearbeitet wurden, lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen. Das *graphische* Verfahren versucht auf zeichnerischem Wege die Beobachtungskurve zu glätten. Als Erwartung betrachtet man den allgemeinen Zug der rohen Wertereihe. Ein Hauptvertreter dieser Methode ist Sprague [1]).

Die analytische Ausgleichung untersucht, ob sich die Beobachtungsreihe durch eine mathematische Funktion: $f(a, b, c, \ldots; x, y)$ ausdrücken lasse. Die Erfahrung reicht aus, die Konstanten $a, b, \ldots$ zu bestimmen. Z. B. dient die Erfahrung dazu, die Makehamsche

Formel zu begründen. Durch dieses Verfahren wird ein vollkommen stetiger Verlauf erzielt.

Bei der mechanischen Methode geht man von der Überlegung aus, dass eine Schwankung an der Stelle x sich auch an den benachbarten Stellen bemerkbar machen müsse. Es werden daher zum Ausgleichen des einen Wertes x die Nachbarwerte links und rechts herbeigezogen. Diese letzte Gruppe umfasst eine Anzahl guter Verfahren. Einen guten Überblick über die verschiedenen Formeln der mechanischen Ausgleichung gibt Simonett [2]).

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, die Methode der mechanischen Ausgleichung gemäss der Methode der kleinsten Quadrate unter allgemeineren Gesichtspunkten zu betrachten. Wegleitend war eine schöne Arbeit von Gram [3]). Es wird versucht, die Erwartung durch eine ganz allgemeine Entwicklung darzustellen. Ferner soll ausgehend von der Arbeit Grams gezeigt werden, wie diese mit einer Arbeit von Wirtinger [4]) zusammenhängt.

Wirtinger hat die Errungenschaften auf dem Gebiete der Theorie der linearen Integralgleichungen zur Darstellung einer Ausgleichmethode verwendet. Diese wird näher untersucht und auf ihre Verwendbarkeit geprüft.

I. Theoretischer Teil.

1. Die Fundamentalgleichung der Ausgleichrechnung.

Es sei $w(x)$ eine Beobachtungsreihe, die noch Unstetigkeiten aufweise. Ferner sei $W(x)$ der Ausdruck der Erwartung, über die wir noch nichts Bestimmtes aussagen können. Es soll die Beobachtungskurve an die Erwartung angepasst werden. An diese Anpassung stellen wir die folgende Forderung:

Der ausgeglichene Wert (also der nach irgendeinem Verfahren abgeänderte Beobachtungswert) soll die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens aller Beobachtungswerte hinsichtlich der Erwartung zu einem Maximum machen. Diese Forderung wird von allen Ausgleichern als notwendig erachtet. Mathematisch gefasst bildet sie den Ausgangspunkt der Ausgleichtheorie. Sie lautet [5]):

$$(1) \qquad \sum_{x=a}^{b} g(x)\,[w(x) - W(x)]\,\delta W(x) = 0$$

$g(x)$ bedeutet dabei das Gewicht, das den einzelnen Beobachtungen zukommt. Ferner ist (a, b) das Grundintervall, auf dem die Ausgleichung durchgeführt wird. Über die Grösse dieses Intervalles wollen wir uns vorderhand nicht äussern. Wir werden im folgenden von den Gewichten $g(x)$ absehen, nehmen also an, dass alle Werte $W(x)$ den auszugleichenden Wert in gleichem Masse beeinflussen. Wenn wir das Grundintervall nicht zu gross nehmen, dürfen wir diese Annahme treffen. So geht Formel (1) über in:

$$(1') \qquad \sum_{x=a}^{b} [w(x) - W(x)]\,\delta W(x) = 0$$

Gleichung (1′) löst aber das Variationsproblem:

$$(2) \qquad \sum_{x=a}^{b} [w(x) - W(x)]^2 = \text{Minimum.}$$

Bemerkung: $\sum \varphi_\nu(x)$ ohne Laufzahl bedeutet im folgenden immer, dass über alle Werte von x summiert werde. Dagegen bedeutet $\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)$, dass bei festem x über alle ν zu summieren ist.

Wir bezeichnen (2) als Ausgleichgleichung. Sie ist der mathematische Ausdruck der gestellten Forderung unter der Annahme konstanter Gewichte $g(x) = 1$. Wir erkennen das Prinzip der kleinsten Quadrate, das aus Wahrscheinlichkeitsüberlegungen heraus entstanden ist. Es existieren viele Ausgleichmethoden, die sich auf dieses Prinzip stützen.

Von hier weg müssen wir bestimmte Annahmen treffen über die Gestalt der Erwartung, die wir auch *Ausgleichungsgesetz* nennen wollen. Die Unbestimmtheit dieser Funktion führte dazu, dass man sie einfach als eine ganze rationale Funktion auffasste. Man nimmt z. B. an, die Beobachtungsreihe lasse sich auf dem ganzen Grundintervalle mit hinreichender Annäherung durch eine Parabel n-ter Ordnung darstellen. Etwa in der Form:

$$(3) \quad W(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ sind noch völlig unbestimmt. Sie sind der wesentliche Teil einer Ausgleichformel. Die Forderung, die an die Ausgleichung gestellt ist, wird zur Bestimmung der Koeffizienten verwendet.

2. Die Ausgleichung Pearsons.

Pearson hat gestützt auf die Ausgleichgleichung (2) ein Verfahren angegeben, das die Bestimmung der Parameter a_ν ermöglicht. Er fasst zwar (2) in stetiger Form auf. Es soll also das Integral über die Fehlerquadrate:

$$\Omega = \int_a^b [w(x) - W(x)]^2 \, dx = \text{Minimum.}$$

Die Minimumbedingung heisst dann:

$$\int_a^b [w(x) - W(x)]\, dx\, \delta\, W(x) = 0$$

Dabei setzt er voraus, dass sich $W(x)$ in eine Taylorsche Reihe mit rasch abfallenden Gliedern entwickeln lasse, als Funktion von n Parametern $b_0, b_1, \ldots . b_{n-1}$.

$$(4) \quad W(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots . + b_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

Der Rest selbst ist auch eine Funktion der n Parameter:

$$R_n = R_n (b_0, b_1, \ldots . b_{n-1})$$

Wir bilden nun die erste Variation von $W(x)$ in bezug auf die Parameter b_ν:

$$(5) \qquad \delta W(x) = \delta b_0 + \delta b_1 x + \delta b_2 \frac{x^2}{2!} +$$

$$\ldots . + \delta b_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial R_n}{\partial b_0} \delta b_0 + \ldots . + \frac{\partial R_n}{\partial b_{n-1}} \cdot \delta b_{n-1}$$

Setzen wir in der Minimumbedingung ein und beachten wir, dass die Inkremente $\delta b_0 \ldots . \delta b_{n-1}$, willkürliche Grössen sind, so erhalten wir ein System von n-Gleichungen:

$$\int_a^b W(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, dx - \int_a^b (W(x) - w(x)) \frac{\partial R_n}{\partial b_0}\, dx$$

. . . . .

. . . . .

$$\int_a^b x^{n-1} \cdot W(x)\, dx = \int_a^b x^{n-1} \cdot w(x)\, dx - (n-1)! \int_a^b (W(x) - w(x)) \frac{\partial R_n}{\partial b_{n-1}}\, dx$$

Da aber einerseits aus der Minimumbedingung die Differenzen $W(x) - w(x)$ möglichst klein werden sollen und anderseits die partiell differenzierten Reste auch sehr klein sind, dürfen die Integrale, die diese Ausdrücke enthalten, vernachlässigt werden. Die n-Gleichungen werden somit:

$$(6) \qquad \begin{cases} \int_a^b W(x)\,dx = \int_a^b w(x)\,dx \;; \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \int_a^b x^{n-1} \cdot W(x)\,dx = \int_a^b x^{n-1} w(x)\,dx \;; \end{cases}$$

Dieses System kann nun zur direkten Berechnung der Parameter b_ν verwendet werden. Theoretisch bietet sich keine Schwierigkeit. Links stehen die theoretischen Kurvenmomente und rechts die der rohen Beobachtungsreihe. Wie wir sehen, führt die Forderung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Momentenrelationen. Die erste Relation drückt aus, dass die Fläche unter der beobachteten Kurve gleich der Fläche unter der ausgeglichenen Kurve sein müsse.

Praktisch besteht die Schwierigkeit im Übergang von den Integralen zu den Summen. Pearson hat selbst praktische Vorschläge gemacht, wie dieser Übergang hergestellt werden kann [6]).

3. Die Ausgleichung Grams durch Orthogonalfunktionen.

Gram hat ein Verfahren abgeleitet, das prinzipiell auf die gleichen Voraussetzungen aufbaut wie Pearsons Methode, aber wesentlich einfacher ist.

Es sei wiederum $w(x)$ eine Beobachtungsreihe, die durch eine stetige Funktion ausgeglichen werden soll. Gram setzt voraus, dass die gegebene Reihe $w(x)$ in Teilreihen so aufgeteilt worden sei, dass die Funktion $w(x)$ durch die Parabel n-ter Ordnung:

$$W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \tag{7}$$

hinreichend angenähert werden kann. Dabei sind die Parameter $a_0 \ldots . a_\nu$ aus der Bedingung:

$$\Omega = \sum (w(x) - W(x))^2 = \text{Minimum.} \tag{8}$$

zu bestimmen. Wie wir sehen, sieht Gram ebenfalls von den Gewichten $g(x)$ ab. Die Minimumbedingung (8) wird erfüllt, wenn die $n+1$-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum (w(x) - W(x)) &= 0 \\ \sum x\,(w(x) - W(x)) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum x^n (w(x) - W(x)) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, d. h. es muss für alle ν gelten:

$$\sum x^\nu w(x) = \sum x^\nu \cdot W(x) \tag{9}$$

Es zeigt sich hier die gleiche Bedingung wie bei der Methode von Pearson. Es wird die Gleichheit der theoretischen und rohen Momente verlangt. Wir werden diese Beziehung später im allgemeineren Zusammen-

hange auch noch erhalten finden. Diese $n + 1$ Beziehungen reichen aus zur linearen Bestimmung der Parameter a_ν.

Setzen wir nun in (9) an Stelle von x^ν ein Polynom in x vom Grade ν, so bleiben die Beziehungen wesentlich erhalten, da wir x^ν immer als ein Polynom $\Pi_\nu(x)$ darstellen können. (9) lautet dann:

$$(9') \qquad \Sigma\, \Pi_\nu(x)\, w(x) = \Sigma\, \Pi_\nu(x)\, W(x)$$

Hier trifft nun Gram eine Voraussetzung, die die Rechnung in verschiedener Hinsicht erleichtert. Es soll nämlich auf dem Grundintervalle das Polynom $\Pi_\nu(x)$ so beschaffen sein, dass es für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$, der Orthogonalitätsbedingung:

$$(10) \qquad \Sigma\, x^\mu\, \Pi_\nu(x) = 0$$

genügt. Die Polynome sind von der Form:

$$\Pi_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda\, x^\lambda$$

Die Beziehungen (10) reichen aus, die Koeffizienten b_λ linear bis auf einen gemeinschaftlichen Faktor zu berechnen. Speziell wählen wir noch $\Pi_0(x) = 1$. Nun haben wir einfach die Gleichungen (10) explicite anzuschreiben; sie lauten für $\nu = 1, 2,$:

$$b_0\, \Sigma\, x^0 + b_1\, \Sigma\, x^1 = 0$$

$$b_0\, \Sigma\, x^0 + b_1\, \Sigma\, x^1 + b_2\, \Sigma\, x^2 = 0$$

usw.

Gleichung (10) können wir noch verallgemeinern, indem wie an Stelle von x^μ auch ein Polynom $\Pi_\mu(x)$ setzen. Die Orthogonalitätsbedingungen lauten dann:

$$(11) \qquad \Sigma\, \Pi_\mu(x)\, \Pi_\nu(x) = 0 \qquad \text{für } \mu \neq \nu$$

Man sieht leicht ein, dass man das Ausgleichsgesetz gleich zu Beginn auch durch Polynome $\Pi_\nu(x)$ darstellen kann. Es ändern sich lediglich die Parameter a_ν. (7) lautet demnach in allgemeinerer Form:

$$(7') \qquad W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\, \Pi_\nu(x)$$

Diese Darstellung gewährt nun unerwartete Vorteile zur Berechnung der Parameter A_ν. Ersetzen wir in der Momentenrelation (9') die Erwartung $W(x)$ durch (7'), so folgt wegen (11):

$$\Sigma\, \Pi_\nu(x)\, w(x) = A_\nu\, \Sigma\, \Pi_\nu^2(x)$$

Der Koeffizient lässt sich also allgemein darstellen durch den Quotienten:

$$(12) \qquad A_\nu = \frac{\Sigma\, \Pi_\nu(x)\, w(x)}{\Sigma\, \Pi_\nu^2(x)}\ ;$$

Setzen wir A_ν in der Formel (7') ein, so erhalten wir das Resultat:

$$(13) \qquad W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \Pi_\nu(x)\, \frac{\Sigma\, \Pi_\nu(x)\, w(x)}{\Sigma\, \Pi_\nu^2(x)}\ ;$$

$W(x)$ stellt einen Ausgleich dar nach einer Parabel n-ter Ordnung gemäss der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Koeffizientendarstellung ist einfach und bietet grosse Vorteile. Bei der Pearsonschen Darstellung sind die Parameter a_ν vom Grade des Ausgleichgesetzes abhängig. Ohne Wiederholung der ganzen Konstantenbestimmung kann das ursprüngliche Ausgleichgesetz n-ten Grades nicht in ein solches $n+1^{\text{ten}}$ Grades erweitert werden. Es kommt aber oft vor, dass das gemacht werden muss, um eine Verbesserung des Ausgleiches zu erzielen. Will man hier das Ausgleichgesetz erweitern, so hat man nur noch weitere $\Pi_\nu(x)$ zu berechnen und nach der Vorschrift (12) die Koeffizienten A_ν zu bestimmen. Man hat diese neuen Glieder dann einfach als Korrekturglieder zu addieren. Darin liegt der grosse Vorteil dieser Methode.

Nachdem wir nun die Koeffizienten A_ν kennen, können wir das Abweichungsmass zum voraus berechnen. Es sei dargestellt als die Summe über die Fehlerquadrate:

$$\begin{aligned}\Omega^{(n)} &= \sum (w(x) - W(x))^2 \\ &= \sum w(x)\,(w(x) - W(x)) - \sum W(x)\,(w(x) - W(x))\end{aligned}$$

das letzte Glied rechts wird wegen:

$$\sum \Pi_\nu(x)\, w(x) = \sum \Pi_\nu(x)\, W(x)$$

zu Null, und es bleibt

$$\Omega^{(n)} = \sum w^2(x) - \sum w(x) \left\{ A_0\, \Pi_0(x) + A_1\, \Pi_1(x) + \ldots + A_n\, \Pi_n(x) \right\}$$

aber da die A_ν von x unabhängig sind:

$$\Omega^{(n)} = \sum w^2(x) - \left\{ A_0 \sum \Pi_0(x)\, w(x) + \ldots + A_n \sum \Pi_n(x)\, w(x) \right\}$$

Die Glieder in der geschweiften Klammer sind aber darstellbar durch:

$$A_\nu \sum \Pi_\nu^2(x)\,; \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots n$$

denn:
$$A_\nu = \frac{\sum \Pi_\nu(x)\, w(x)}{\sum \Pi_\nu^2(x)}\,;$$

und:
$$A_\nu \sum \Pi_\nu^2(x) = \sum \Pi_\nu(x)\, w(x)$$

Also wird das Abweichungsmass:

$$\Omega^{(n)} = \sum w^2(x) - \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^2 \sum \Pi_\nu^2(x) \tag{14}$$

Fügen wir ein neues Glied hinzu, so wird das Abweichungsmass:

$$\Omega^{(n+1)} = \sum w^2(x) - \sum_{\nu=0}^{n+1} A_\nu^2 \sum \Pi_\nu^2(x)$$

Durch Mitnahme des neuen Gliedes wird das Abweichungsmass vermindert um:

$$\Delta\Omega = \Omega^{(n+1)} - \Omega^{(n)} = A_{n+1}^2 \sum \Pi_{n+1}^2(x)$$

Es ist also möglich, das Abweichungsmass $\Omega^{(n)}$ zum vornherein zu ermitteln. Man hat so eine gute Handhabe zur Kontrolle der ausgeführten Rechnung.

Um den Eigentümlichkeiten der Beobachtungsreihe gerecht zu werden, muss die Ausgleichung in kurzen Intervallen durchgeführt werden. Man kann z. B. die Ausgangsreihe in Stücke von 9 Gliedern aufteilen. Als wirklich ausgeglichen dürfen wir nur den zentralen Wert betrachten. Man verwendet also um den einen Wert W (5) auszugleichen links und rechts vier Werte.

Eine Schwierigkeit, auf die Gram selbst aufmerksam gemacht hat, besteht in der Verknüpfung der Intervalle. In seiner Arbeit gibt er Wege an, wie dies am einfachsten geschehen kann.

Gram hat seine Methode an einem Beispiel erprobt. Die Rechnung ist im praktischen Teil wiedergegeben. Auch andere haben sich des Verfahrens bedient. So eignet es sich besonders gut für Trendberechnungen, die eine Art Ausgleichung im Grossen sind, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Ausgleichung im Kleinen.

4. Verallgemeinerte und stetige Behandlung.

Das Verfahren, das wir im letzten Abschnitt kennengelernt haben, bedeutet eine Verallgemeinerung des Falles, dass man als Ausgleichgesetz eine Parabel der Form (3) verwendet. Die Voraussetzung der Orthogonalität der Polynome $\Pi_\nu(x)$ lässt augenscheinlich eine Spezialisierung vermuten. Tatsächlich bedeutet aber diese Voraussetzung keine Einschränkung, sofern diese Polynome auf dem Grundintervalle stetige und linear unabhängige Funktionen sind.

Wir betrachten nun wiederum die Beobachtungsreihe $w(x)$. Sie stellt eine diskrete Punktverteilung auf dem Grundintervalle dar. $w(x)$ kann noch Unstetigkeiten aufweisen in Form von Sprüngen. Diese können wir

uns aber durch geeignete Interpolation beseitigt denken. An Stelle der Sprünge treten Schwingungen. Wir fassen daher in der Folge $w(x)$ immer als eine stetige Funktion auf. Ferner setzen wir Differenzierbarkeit und quadratische Integrabilität voraus.

Nun gehen wir den gleichen Weg, den Pearson eingeschlagen hat. Die Forderung, die wir an die Ausgleichung stellen, ist wiederum:

$$(15) \qquad \int_a^b (W(x) - w(x))^2 \, dx = \text{Minimum.}$$

d. h. die erste Variation dieses Integrals muss zu Null werden.

$$(16) \qquad \int_a^b (W(x) - w(x)) \, dx \, \delta W(x) = 0$$

Als Ausgleichfunktion benützt Pearson eine in Taylorsche Reihe entwickelbare Funktion, und die Konstantenbestimmung geschah durch die Kurvenmomente.

Wir machen nun über die Ausgleichfunktion allgemeinere Voraussetzungen. Wir betrachten sie als ein lineares Aggregat einer endlichen Anzahl auf dem Grundintervalle stetiger und linear unabhängiger Funktionen $\Phi_\nu(x)$. Sie ist demnach von der Form

$$(17) \quad W(x) = d_0 \, \Phi_0(x) + d_1 \, \Phi_1(x) + \ldots + d_n \, \Phi_n(x)$$

Vorderhand sehen wir davon ab, das Funktionensystem $\Phi_\nu(x)$ näher zu präzisieren.

Hier müssen wir noch einige Begriffe festhalten, die wir später immer wieder brauchen und die bei praktischen Arbeiten von Bedeutung sind.

Ein Funktionensystem $\Phi_\nu(x)$ heisst auf dem Intervalle (a, b) *linear unabhängig*, wenn unter Ausschluss der Möglichkeit, dass gleichzeitig alle $b_i = 0$ sind, eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \Phi_\nu(x) = 0$$

nicht besteht. Jedes solche System $\Phi_\nu(x)$ kann durch geeignete Transformation in ein System $\varphi_\nu(x)$ umgewandelt werden, das folgende Eigenschaften hat:

I. Die $\varphi_\nu(x)$ bilden ein *Orthogonalsystem*, d. h. die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ genügen auf dem Grundintervall der Beziehung

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\, \varphi_\mu(x)\, dx = 0 \; ; \qquad \text{für } \mu \neq \nu$$

II. Das System $\varphi_\nu(x)$ ist *normiert*, d. h. für alle ν gilt die Beziehung:

$$\int_a^b \varphi_\nu^2(x)\, dx = 1 \; ;$$

III. Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ sind *immer noch linear unabhängig*.

IV. Die $\varphi_\nu(x)$ sind lineare Kombinationen der $\Phi_\nu(x)$, d. h. die Systeme $\Phi_\nu(x)$ und $\varphi_\nu(x)$ sind nicht wesentlich voneinander verschieden.

Allgemeine Richtlinien solcher Transformationen sind zu finden bei: Wiarda, Integralgleichungen, unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Teubner, Leipzig und Berlin 1930.

Das System $\varphi_\nu(x)$ konstruiert man aus dem System $\Phi_\nu(x)$ nach folgendem Schema:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{c_0}\,\Phi_0(x)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{c_1}\left[\Phi_1(x) - b_{1,0}\,\varphi_0(x)\right]$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{c_n}\left[\Phi_n(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n,\nu}\,\varphi_\nu(x)\right]$$

Dabei dienen die Koeffizienten c_ν lediglich zur Normierung und berechnen sich folgendermassen:

$$c_0 = \sqrt{\int_a^b \Phi_0^2(x)\,dx}\;;\quad c_1 = \sqrt{\int_a^b \left[\Phi_1(x) - b_{1,0}\,\varphi_0(x)\right]^2 dx}\;;$$

$$c_n = \sqrt{\int_a^b \left[\Phi_n(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n,\nu}\,\varphi_\nu(x)\right]^2 dx}\;;$$

Die Koeffizienten $b_{n,m}$ ergeben sich aus der Forderung der Orthogonalität. Sie heissen:

$$b_{n,m} = \int_a^b \Phi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx$$

Wir geben diese Formel an, weil wir später bei einer speziellen Annahme von $\Phi_\nu(x)$ die Transformation durchführen werden.

Nun nehmen wir an, das System $\Phi_\nu(x)$ sei bereits in diesem Sinne transformiert worden. Besonders die Eigenschaften I und II werden uns nützlich sein.

Das Ausgleichgesetz heisse jetzt:

$$(18) \quad W(x) = a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + \ldots + a_n\,\varphi_n(x)$$

Es hängt also $W(x)$ linear von $(n+1)$ Parametern a_n ab. Es gilt nun zunächst, diese Parameter zu bestimmen. Wir bilden die erste Variation:

$$\delta W(x) = \delta\,a_0 \cdot \varphi_0(x) + \delta\,a_1 \cdot \varphi_1(x) + \ldots + \delta\,a_n \cdot \varphi_n(x)$$

und setzen in (1′) ein:

$$\int_a^b \{w(x) - (a_0\,\varphi_0(x) + \ldots + a_n\,\varphi_n(x))\}\{\delta a_0\,\varphi_0(x) + \ldots + \delta a_n\,\varphi_n(x)\}dx = 0$$

Diese Gleichung liefert uns die Koeffizienten a_n. Beachten wir die Eigenschaften I und II des Systems $\varphi_\nu(x)$, so werden diese:

$$(19) \qquad \begin{aligned} a_0 &= \int_a^b \varphi_0(x)\,w(x)\,dx \\ a_1 &= \int_a^b \varphi_1(x)\,w(x)\,dx \\ &\vdots \\ a_n &= \int_a^b \varphi_n(x)\,w(x)\,dx \end{aligned}$$

Hätten wir von der Voraussetzung der Normiertheit abgesehen, so lauteten die Koeffizienten:

$$a_\nu = \frac{\int_a^b \varphi_\nu(x)\,w(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_\nu^2(x)\,dx}$$

Wir stellen vollständige Analogie mit den Entwicklungskoeffizienten von Gram fest. Die Normiertheit der Funktionen vereinfacht die Formel beträchtlich. Setzen wir in (18) ein, so wird das Resultat:

$$(20) \qquad W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b \varphi_\nu(z)\, w(z)\, dz$$

Es stellt eine Ausgleichung gemäss der Methode der kleinsten Quadrate dar. Die Formel bietet die gleichen Vorteile, wie sie schon bei der Formel von Gram hervorgehoben worden sind. Man kann das Ausgleichgesetz, ohne die ganze Rechnung zu wiederholen, von der Ordnung n auf die Ordnung $n+1$, $n+2$ usw. erweitern.

Die Kurvenmomente.

Bei den Verfahren von Pearson und Gram sind die Momentenrelationen aufgetreten. Es ist nun von Interesse zu wissen, wie diese sich in dem allgemeineren Falle zeigen. Der Koeffizient a_ν ist ja schon eine Art Moment, und zwar das der rohen Werte. Dieses muss den Momenten in bezug auf die ausgeglichene Reihe gleich sein. Um das hier zu zeigen, multiplizieren wir $W(x)$ in (20) mit $\varphi_\nu(x)$ und integrieren nach x:

$$\int_a^b W(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx = \int_a^b \varphi_\nu(x) \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz\, dx$$

Rechts fallen wegen der Orthogonalität alle Glieder bis auf das ν^{te} weg, und es bleibt:

$$(21) \qquad \int_a^b W(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx$$

Diese beiden Integrale tragen ganz den Charakter der Kurvenmomente. Wir wollen sie die verallgemeinerten Kurvenmomente nennen. Es ist deutlich erkennbar, dass die übliche Form der Kurvenmomente nur ein Spezialfall dieser verallgemeinerten Momente für $\varphi_\nu(x) = x^\nu$ sind. Wie wir sehen, ist also die Momentenrelation erhalten geblieben. Wir stellen auch vollständige Analogie mit den Resultaten von Gram fest.

Das Abweichungsmass.

Als Abweichungsmass betrachten wir wiederum das Integral über die Fehlerquadrate:

$$(22) \qquad \Omega^{(n)} = \int_a^b (W(x) - w(x))^2\, dx =$$

$$\int_a^b w^2(x)\, dx - 2\int_a^b W(x)\, w(x)\, dx + \int_a^b W^2(x)\, dx$$

Das erste Integral rechts kann nicht weiter vereinfacht werden. Dagegen lassen sich die beiden letzten durch (20) darstellen:

$$2\int_a^b W(x)\, w(x)\, dx = 2\int_a^b w(x) \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b \varphi_\nu(z)\, w(z)\, dz\, dx$$

$$= 2\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2$$

und:

$$\int_a^b W^2(x)\, dx = \int_a^b \left[\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b \varphi_\nu(z)\, w(z)\, dz\right]^2 dx = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2$$

Setzen wir oben ein, so wird:

$$\Omega^{(n)} = \int_a^b w^2(x)\,dx - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 \tag{23}$$

Fügen wir dem Ausgleichgesetz (18) noch ein weiteres Glied $a_{n+1}\,\varphi_{n+1}(x)$ an, so lautete die Abweichung:

$$\Omega^{(n+1)} = \int_a^b w^2(x)\,dx - \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2$$

Durch Hinzufügen dieses neuen Gliedes vermindert man also das Abweichungsmass um:

$$\Delta\,\Omega^{(n)} = \Omega^{(n)} - \Omega^{(n+1)} = a_{n+1}^2$$

Nun wollen wir noch untersuchen, was aus Formel (20) im Grenzfalle, nämlich wenn man $n \rightarrow \infty$ streben lässt, wird. Die Formel umfasst dann unendlich viele Glieder:

$$W(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b w(z)\,\varphi_\nu(z)\,dz \tag{20'}$$

Jetzt stellt (20′) eigentlich keinen Ausgleich mehr dar. Denn durch die Formel mit unendlich vielen Gliedern wird die Beobachtungsreihe genau reproduziert. Am deutlichsten sehen wir das ein, wenn wir in (23) auch zur Grenze übergehen. Der Ausdruck

$$\Omega = \int_a^b w^2(x)\,dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2$$

ist nichts anderes als die Besselsche Identität. Da ferner Ω eine positive Grösse ist, haben wir die Ungleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \leqq \int_a^b w^2(x)\, dx \tag{24}$$

Ist das Orthogonalsystem ein vollständiges, so geht obige Ungleichung über in die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 = \int_a^b w^2(x)\, dx\,; \qquad \text{(Parsevalscher Satz)}$$

d. h. aber, dass das Abweichungsmass Null geworden ist, die Beobachtungsreihe also reproduziert wurde. Man erhält also gewissermassen in Formel (20) einen Ausgleich dadurch, dass man sich mit wenigen Gliedern der Entwicklung begnügt.

Anwendung der Theorie auf ein Beispiel.

Wir wollen nun die Theorie anhand eines speziellen Funktionensystems $\Phi_\nu(x)$ bzw. $\varphi_\nu(x)$ erläutern. Gleichzeitig soll gezeigt werden, was geschieht, wenn wir als Ausgleichgesetz die ganze rationale Funktion:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

verwenden. Das System $\Phi_\nu(x)$ lautet demnach:

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= 1 \\ \Phi_1(x) &= x \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n(x) &= x^n \end{aligned} \tag{25}$$

Als Grundintervall wählen wir $a = -\alpha$; $b = +\alpha$. Wir führen die Rechnung Schritt für Schritt so durch, wie sie vorne angedeutet ist. Es ist also zunächst zu zeigen, dass die $\Phi_\nu(x)$ auf dem gewählten Intervalle linear unabhängig sind. Wären sie es nicht, so müsste auf dem ganzen Intervalle die Beziehung:

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \, \Phi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \, x^\nu = 0$$

identisch erfüllt sein. Speziell auch im Punkte $x = 0$. Dann werden aber alle b_ν zu Null. Die Potenzen x^ν sind daher linear unabhängig.

Durch den nächsten Schritt soll das gewählte System so transformiert werden, dass es orthogonal und normiert erscheint. Wir führen die Rechnung durch für $n = 0, 1, 2$ und 3.

Wir setzen also:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{c_0} \, \Phi_0(x)$$

$$c_0 = \sqrt{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \Phi_0^2(x) \, dx} = \sqrt{2\alpha} \; ;$$

somit:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Für $n = 1$ bekommen wir:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{c_1} \left[\Phi_1(x) - b_{1,0} \, \varphi_0(x) \right] \; ;$$

$$b_{1,0} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \Phi_1(x)\, \varphi_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} x\, dx = 0;$$

$$c_1 = \sqrt{\int_{-\alpha}^{+\alpha} [\Phi_1(x) - b_{1,0}\, \varphi_0(x)]^2\, dx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

woraus:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{\alpha}$$

Ganz analog für $n = 2$:

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{c_2} \left[\Phi_2(x) - b_{2,0}\, \varphi_0(x) - b_{2,1}\, \varphi_1(x) \right]$$

Dabei sind die Koeffizienten:

$$b_{2,0} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \Phi_2(x)\, \varphi_0(x)\, dx = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2}}\, \alpha^3 ;$$

$$b_{2,1} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \Phi_2(x)\, \varphi_1(x)\, dx = 0 ;$$

$$c_2 = \sqrt{\int_{-\alpha}^{+\alpha} [\Phi_2(x) - b_{2,0}\, \varphi_0(x) - b_{2,1}\, \varphi_1(x)]^2\, dx}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{2}{5}}\, \alpha^2 ;$$

und daher:

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{5}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] ;$$

$\varphi_3(x)$ ergibt sich aus:

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{c_3} \left[\Phi_3(x) - b_{3,0}\, \varphi_0(x) - b_{3,1}\, \varphi_1(x) - b_{3,2}\, \varphi_2(x) \right]$$

Die Koeffizienten lauten:

$$b_{3,0} = 0$$

$$b_{3,1} = \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{3}{2}}\, \alpha^4$$

$$b_{3,2} = 0$$

und der Normierungsfaktor:

$$c_3 = \frac{2}{5} \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{2}{7}}\, \alpha^3$$

Somit wird:

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{7}{2}} \left[\frac{5}{2} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right]$$

Wir erhalten folgende Zusammenstellung:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2}} \; ;$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x}{\alpha} \; ;$$

(26)
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{5}{2}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \; ;$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{7}{2}} \left[\frac{5}{2} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^3 - \frac{3}{2} \frac{x}{\alpha} \right]$$

Diese vier Funktionen sind so konstruiert, dass sie allen gemachten Voraussetzungen genügen. Sie sind auf dem Grundintervalle linear *unabhängig*, *orthogonal* und *normiert*, und so für unsere Zwecke verwendbar.

Wir versuchen nun noch das Polynom n-ten Grades zu bestimmen. Setzen wir $\frac{x}{\alpha} = x'$ und sehen wir von den Faktoren $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2}}$ usw. ab, so erkennen wir, dass die vier Funktionen $\varphi_0(x) \ldots \varphi_3(x)$ gerade die vier ersten *Legendre*schen Polynome P darstellen. Diese Polynome genügen auf dem Intervalle $(-1, 1)$ der Integralbeziehung:

(27)
$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \Theta_{n,m} \begin{cases} = 0; \text{ für } n \neq m \\ = \dfrac{2}{2m+1}; \text{ für } n = m \end{cases}$$

Wir suchen also Polynome $Q_n(x')$, die auf dem Intervall $(-\alpha, \alpha)$ so beschaffen sind, dass sie der Bedingung:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} Q_n(x')\, Q_m(x')\, dx' = \Theta_{n,m} \begin{cases} = 0; \text{ für } n \neq m \\ = \dfrac{2}{2m+1}; \text{ für } n = m \end{cases}$$

genügen.

Setzen wir $x' = \dfrac{x}{\alpha}$, $dx' = \dfrac{1}{\alpha} dx$, so gilt:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} Q_n(x')\, Q_m(x')\, dx' = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, Q_n(x') \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, Q_m(x') \right) dx' = \Theta_{n,m}$$

Wir haben also in $P_n(x)$, x durch $\dfrac{x}{\alpha}$ zu ersetzen und mit dem Faktor $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ zu multiplizieren, der die Normiertheit garantiert. Das gesuchte Polynom ist dann:

$$Q_n(x') = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot P_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \tag{28}$$

Die vier ersten Legendreschen Polynome lauten explizite:

$$P_0 = 1;\ P_1 = x;\ P_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2};\ P_3 = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

Das allgemeine Polynom lautet:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(2n-2\nu)!}{(n-2\nu)!}\, x^{n-2\nu} \tag{29}$$

Führen wir die in (28) gegebene Vorschrift aus, so wird:

$$Q_0(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} P_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}};$$

$$Q_1(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} P_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{x}{\alpha};$$

$$Q_2(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} P_2\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

usw.

Vergleichen wir mit den gefundenen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ in (26), so sehen wir, dass:

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, Q_0(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2}}\, P_0\left(\frac{x}{\alpha}\right);$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, Q_1(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{3}{2}}\, P_1\left(\frac{x}{\alpha}\right);$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\, Q_2(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{5}{2}}\, P_2\left(\frac{x}{\alpha}\right);$$

durch Schluss von n auf $n+1$ kann leicht bewiesen werden, dass allgemein gilt:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, Q_n(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Nun kennen wir das Entwicklungssystem und können die Koeffizienten a_ν bestimmen; es ist:

$$(30) \quad a_\nu = \int_{-\alpha}^{+\alpha} w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} w(z)\, P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz$$

Setzen wir in der Formel (20) ein, so lautet die Entwicklung:

$$(31) \quad \begin{cases} W(x) = \dfrac{1}{2\alpha} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1)\, P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right) \int_{-\alpha}^{+\alpha} w(z)\, P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz \\ \qquad = \dfrac{1}{2\alpha} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1)\, P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right) A_\nu \end{cases}$$

wenn wir $A_\nu = \int_{-\alpha}^{+\alpha} w(z)\, P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz$ setzen.

Wir schreiben einige Glieder an:

$$W(x) = \frac{1}{2\alpha}\left[P_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) A_0 + 3\, P_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) A_1 + 5\, P_2\left(\frac{x}{\alpha}\right) A_2 + \ldots\right]$$

$W(x)$ ist das Resultat einer Ausgleichung mittels einer Parabel n-ten Grades. Die Entwicklung gilt für jedes endliche Intervall $(-\alpha, +\alpha)$. Die Anzahl der Glieder, die man in (31) verwendet, muss sich nach der Anzahl der verwendeten Beobachtungswerte richten. Auf keinen Fall soll diese letztere kleiner sein als die Anzahl der Glieder in (31). In den meisten Fällen wird man sich mit einer Parabel zweiten Grades begnügen. Die ausgeglichenen Werte liegen dann auf dieser Parabel (vgl. Figur 2 im praktischen Teil). Als wirklich ausgeglichen dürfen wir aber nicht alle Punkte des Teilintervalles betrachten. Gegen die Enden hin sind die Resultate

nicht mehr so gut. Der zuverlässigste Wert ist der zentral gelegene. Die Rechenarbeit von Fall zu Fall beschränkt sich auf die Berechnung der verallgemeinerten Momente a_ν. Die Polynome $P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ kann man ein für allemal für bestimmte Intervalle berechnen (vgl. Tabellen im Anhang). Die direkte Berechnung der höhern Polynome aus Formel (29) ist etwas umständlich. Kennt man aber einmal $P_0\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ und $P_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für ein bestimmtes Intervall, so kann man die folgenden aus der einfachen Rekursionsformel:

$$P_n(x) = x\,\frac{2n-1}{n}\,P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\,P_{n-2}(x)$$

berechnen. Diese Formel ist gültig für das Intervall $(-1, +1)$. Die gleiche Rekursion gilt aber für die Polynome $Q_n(x')$:

$$Q_n(x') = x'\,\frac{2n-1}{n}\,Q_{n-1}(x') - \frac{n-1}{n}\,Q_{n-2}(x')$$

Da aber $Q_n(x') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,P_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ ist, so wird:

$$(32)\quad P_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha}\,\frac{2n-1}{n}\,P_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{n-1}{n}\,P_{n-2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Die Berechnung der $P_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ vereinfacht sich dadurch erheblich.

Wir wollen auch hier das Abweichungsmass berechnen. Es ist

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} w(z)\, P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz$$

$$a_\nu^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{2\nu+1}{2} \left(\int_{-\alpha}^{+\alpha} w(z)\, P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz \right)^2 = \frac{2\nu+1}{2\alpha} A_\nu^2$$

daher:

$$\Omega^{(n)} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} w^2(x)\, dx - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2\alpha} A_\nu^2$$

II. Theoretischer Teil.

1. Quellenmässige Darstellung der Erwartung $W(x)$.

Im vorhergehenden Kapitel setzten wir voraus, dass die Funktion $w(x)$ auf dem Grundintervalle stetig und samt ihrem Quadrate integrierbar sei. Wir entwickelten dann $W(x)$ in eine Reihe mittels eines Systems vorgegebener Funktionen $\{\varphi_\nu(x)\}$ die auf dem Grundintervalle orthogonal und normiert sind. Durch die Minimumbedingung gelangten wir zu Formel (20):

$$W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\, a_\nu$$

Die a_ν bedeuten dabei die *Fourierkoeffizienten* in bezug auf das System $\{\varphi_\nu(x)\}$ und die Funktion $w(x)$. Ferner haben wir gesehen, dass, falls $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein vollständiges oder abgeschlossenes Orthogonalsystem ist, die Beobachtungsreihe reproduziert wird. Verwenden wir in (20) die Momentenrelation und lassen wir die n ersten empirischen Momente gleich den n ersten theoretischen Momenten werden, so wird:

$$(33) \qquad W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b W(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$

lassen wir n unendlich gross werden, sehen wir deutlich, dass die Beobachtungsreihe reproduziert wird. Es wird dann:

$$(33') \qquad W(x) = w(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_a^b W(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$

Die Formeln stellen die allgemeine Entwicklung einer willkürlichen, stetigen Funktion $w(x)$ in eine nach $\varphi_\nu(x)$ fortschreitende Reihe dar. Eine wichtige Frage stellt sich nun hinsichtlich der Konvergenz. Wir wissen nicht, wie die Funktion $W(x)$ mit wachsendem n gegen $w(x)$ strebt. Wir wissen lediglich, dass bei $n \to \infty$ die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 = \int_a^b w^2(x)\, dx$$

erfüllt ist.

Daraus können wir weiter schliessen, dass die Summe der Entwicklungskoeffizienten konvergiert. Die Entwicklung selbst strebt im Mittel gegen $W(x)$ bzw. $w(x)$.

Um weiter in die Zusammenhänge einzudringen, stellen wir uns die Frage, wie denn die Funktion $W(x)$ beschaffen sein müsse, damit sie eine gleichmässig konvergente Entwicklung zulasse. Sei also:

$$W(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\, a_\nu$$

Hier darf man im allgemeinen die beiden Prozesse Grenzübergang und Integration nicht vertauschen. Denn:

$$W(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b w(z) \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(z)\, \varphi_\nu(x)\, dz$$

wird nicht gleichmässig konvergieren. Der Wert der Variablen x liegt zwischen a und b und bleibt fest; z hingegen variiert zwischen den gleichen Grenzen und wird einmal den Wert $z = x$ annehmen. Das geschieht aber für jedes ν. An diesen Stellen aber, wo $z = x$ wird, kann das allgemeine Glied nicht gleichmässig kleiner als eine vorgegebene, beliebig kleine positive Zahl ε werden. Um gleichmässige Konvergenz zu erhalten, müssen wir jedes Produkt $\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(z)$ durch eine geeignete Zahl λ_ν dividieren. Wir wählen daher eine Folge gleichmässig wachsender Zahlen:

$$|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots . < |\lambda_n|$$

so dass der Ausdruck:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

gleichmässig konvergiert. Es sei dann der Grenzwert dieser Summe, die eine Funktion von x und z ist:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varphi_\nu(z)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} = K(x, z) \tag{34}$$

Man nennt dann $K(x, z)$ die zum System $\{\varphi_\nu(x)\}$ gehörige *Kernfunktion.* In (34) sehen wir deutlich, dass $K(x, z)$ in x und z symmetrisch ist. Sie genügt ja der Beziehung:

$$K(x, z) = K(z, x)$$

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen $K(x, z)$ und $\varphi_\nu(x)$ wird erhalten, indem man (34) mit $\varphi_\nu(x)$ multipliziert und über das Grundintervall integriert. Es wird:

$$\int_a^b \varphi_\nu(z) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}\, dz = \int_a^b K(x, z)\,\varphi_\nu(z)\, dz$$

Wegen der Orthogonalität bleibt links allein das Glied:

$$\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_a^b \varphi_\nu^2(x)\, dx = \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

So ergibt sich die wichtige Funktionalgleichung:

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(z, x)\,\varphi_\nu(z)\, dz \tag{35}$$

Bekanntlich sind die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ die Lösungen der homogenen linearen Fredholmschen Integralgleichung:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)\, \varphi(z)\, dz$$

Diese Gleichung hat für gewisse Werte von λ, die Eigenwerte heissen, Lösungen: die sogenannten Eigenfunktionen.

Bedeute nun $r(z)$ eine auf (a, b) stetige oder wenigstens stückweise stetige beliebige Funktion, so können wir $W(x)$ mit Hilfe von $r(z)$ darstellen. Wir multiplizieren $K(x, z)$ mit $r(z)$ und integrieren über (a, b) nach z; es wird:

$$W(x) = \int_a^b K(x, z)\, r(z)\, dz$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b \frac{\varphi_\nu(z)\, r(z)}{\lambda_\nu}\, dz$$

Der Fourierkoeffizient wird:

$$a_\nu = \int_a^b \frac{\varphi_\nu(z)\, r(z)}{\lambda_\nu}\, dz$$

Die Funktion, die eine gleichmässig konvergente Reihenentwicklung zulässt, ist also von der Form:

$$W(x) = \int_a^b K(x, z)\, r(z)\, dz\,, \tag{36}$$

wobei $K(x, z)$ die zum Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ gehörige Kernfunktion darstellt. Es wird also $W(x)$ vermöge der beliebigen Belegungsfunktion $r(z)$ quellenmässig dargestellt [7]).

Da nun $r(z)$ eine beliebige Funktion ist, wählen wir speziell $r(z) = w(z)$. Gleichung (36) nimmt dann die spezielle Form an:

$$W_1(x) = \int_a^b K(x, z)\, w(z)\, dz \tag{36'}$$

An dieser Stelle sei die schon erwähnte Studie von Professor *Wirtinger* nochmals hervorgehoben. Wirtinger verwendet Gleichung (36′) als Ausgleichgesetz und leitet aus ihr eine Methode ab, die in kurzen Zügen skizziert sei.

Die Gleichung (36) können wir folgendermassen interpretieren: Es hängt $W_1(x)$ linear und homogen von den Funktionswerten der Belegungsfunktion $w(x)$ ab. Wir können uns also zu Beginn das Verfahren als durch diese Formel festgelegt denken. Im Hinblick auf die verschiedenen Methoden der mechanischen Ausgleichung ist sie durchaus plausibel. Um den einen Wert $W_1(x)$ darzustellen, wird die Gesamtheit der auf dem betrachteten Intervalle liegenden Beobachtungsgrössen $w(x)$ verwendet. Das ist ja charakteristisch für die Formeln der mechanischen Ausgleichung.

Die Schwierigkeiten, die aus einer direkten Auflösung von (36′) entstehen, können umgangen werden. Wir betrachten $W_1(x)$ als eine beliebige, auf dem Grundintervall definierte Funktion. Eine Reihenentwicklung dieser Funktion mit Hilfe des Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$, das ein abgeschlossenes sei, heisst:

$$(37) \qquad W_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b \varphi_\nu(z)\, W_1(z)\, dz$$

Diese Entwicklung reproduziert genau die erwartete Funktion, wie sie in (36′) definiert ist, nicht aber die Beobachtungsreihe. Ersetzen wir $W_1(x)$ unter dem Integral durch (36′), so wird:

$$W_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^b \int_a^b \varphi_\nu(z)\, K(z, x)\, w(x)\, dx\, dz$$

Wir setzen das Doppelintegral:

$$\int_a^b \int_a^b \varphi_\nu(z)\, K(z, x)\, w(x)\, dx\, dz = a_\nu^{(1)}$$

$$= \int_a^b w(x)\, dx \int_a^b K(z, x)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$

Und wegen der Beziehung (35):

$$a_\nu^{(1)} = \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b w(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx$$

Es lautet somit das Resultat der ersten Ausgleichung:

$$(38) \qquad W_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, a_\nu^{(1)}$$

Diese Entwicklung ist gleichmässig konvergent auf dem Intervalle (a, b). Es ist $W_1(x)$ vermöge der Belegungsfunktion $w(x)$ linear dargestellt. Die Idee Wirtingers geht nun dahin, das Verfahren in genau gleicher Weise zu wiederholen.

Sei $W_2(x)$ die Erwartung, die man auf die einmal ausgeglichene Reihe macht. Diese Erwartung sei in gleicher Weise darstellbar wie $W_1(x)$. Es hange nämlich $W_2(x)$ linear und homogen von den auf dem Grundintervalle liegenden Werten $W_1(x)$ ab. Also:

$$W_2(x) = \int_a^b K(x, z)\, W_1(z)\, dz$$

Setzen wir aus (38) $W_1(z)$ ein:

$$W_2(x) = \int_a^b K(x, z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} \int_a^b w(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt\, dz$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_a^b \Big[K(x, z)\, \varphi_\nu(z)\Big]\, dz\, \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b w(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

aber:

$$\int_a^b K(x, z)\, \varphi_\nu(z)\, dz = \frac{1}{\lambda_\nu}\, \varphi_\nu(x)$$

daher:

$$(39) \quad \begin{cases} W_2(x) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu^2} \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz \\ \qquad\quad = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, a_\nu^{(2)} \end{cases}$$

mit $\quad a_\nu^{(2)} = \displaystyle\int_a^b \frac{w(z)\, \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2}\, dz$

Dieses Resultat der zweiten Ausgleichung unterscheidet sich vom ersten nur durch das Auftreten von λ_ν^2.

Das Verfahren kann nun beliebig viele Male wiederholt werden. Eine n-malige Anwendung gibt:

$$W_n(x) = \int_a^b K(x, z)\, W_{n-1}(z)\, dz$$

und:

$$W_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, a_\nu^{(n)} \tag{40}$$

dabei ist $$a_\nu^{(n)} = \frac{1}{\lambda_\nu^n} \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$ zu setzen.

Man sieht, dass die wiederholte Ausübung des Verfahrens nur die Berechnung der Koeffizienten a_ν verlangt. Die Rechenarbeit von Fall zu Fall reduziert sich auf die Berechnung der verallgemeinerten Momente der Beobachtungsreihe.

Das Abweichungsmass.

Um das Resultat beurteilen zu können, untersuchen wir, wieviel $W_1(x)$ von der Ausgangsreihe $w(x)$ bzw. $W(x)$ abweiche. Wir stellen also Formel (20), die die Beobachtungsreihe im Grenzfalle reproduziert, der Formel (38) gegenüber. Wir bilden das Integral über die Fehlerquadrate:

$$\Omega = \int_a^b (W(x) - W_1(x))^2 dx = \int_a^b \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) \frac{a_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 dx$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, a_\nu \left(1 - \frac{1}{\lambda_\nu}\right) \right]^2 dx$$

Wegen der Orthogonalität und wegen der Normiertheit wird:

$$\Omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \left[\frac{2}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_\nu^2} \right]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_\nu}\right)^2;$$

Analog wird das Abweichungsmass für die n-te Ausgleichung:

$$\Omega^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \left[\frac{2}{\lambda_\nu^n} - \frac{1}{\lambda_\nu^{2n}} \right] \tag{41}$$

Ferner lautet das Abweichungsmass von $W_1(x)$ direkt in bezug auf $w(x)$:

$$\Omega = \int_a^b (w(x) - W_1(x))^2\, dx$$

oder

$$\Omega = \int_a^b w^2(x)\, dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \left[\frac{2}{\lambda_\nu^n} - \frac{1}{\lambda_\nu^{2n}} \right] \tag{42}$$

In (41) sehen wir sofort, dass das Abweichungsmass ein Minimum wird, wenn alle $\lambda_\nu = 1$ sind. In diesem günstigsten Falle wird die eckige Klammer in (42) gleich $= 1$ und Ω zu Null. Das ist ja der Fall, wenn wir die nicht gleichmässig konvergente Reihenentwicklung (20) anwenden. Ferner sehen wir, dass bei $|\lambda_\nu| > 1$ und wachsendem n die eckige Klammer in (41) gegen Null strebt. Das Abweichungsmass konvergiert also bei wiederholter Ausgleichung gegen $\sum a_\nu^2$.

Denn:
$$\left[\frac{2}{\lambda_\nu^n} - \frac{1}{\lambda_\nu^{2n}}\right] = \frac{2\lambda_\nu^n - 1}{\lambda_\nu^{2n}}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ |\lambda_\nu| > 1}} \frac{2\lambda_\nu^n - 1}{\lambda_\nu^{2n}} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ |\lambda_\nu| > 1}} 2n \frac{\lambda_\nu^{n-1}}{2n\,\lambda_\nu^{2n-1}} = \frac{1}{\lambda_\nu^n} = 0$$

Wie wir gesehen haben, vergrössert die Wiederholung des Verfahrens das Abweichungsmass, bis es schliesslich gegen $\sum a_\nu^2$ strebt bei $n \to \infty$. Um aber dennoch das Verfahren anwenden zu können, müssen wir auf viele Wiederholungen verzichten. So können wir das Abweichungsmass unter einer zulässigen Grenze halten. Wenn z. B. der kleinste λ-Wert gleich eins ist, so wird das Abweichungsmass nach n-maliger Wiederholung, wobei $n \to \infty$ strebt, nach dem Werte: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ streben, denn in (41) wird dann für $\nu = 0$ die eckige Klammer $= 1$; es wird also das Maximum des Abweichungsmasses um a_0^2 vermindert. Der Vorteil der Wirtingerschen Methode gegenüber Formel (20) ist die gleichmässige Konvergenz der Entwicklung. Es lohnt sich im Anschluss an seine Untersuchungen, diese praktisch brauchbar zu gestalten. Ich denke dabei vor allem an die Wahl des Grundintervalles, die in engster Verbindung mit der Wahl des Orthogonalsystemes ist.

Wahl der Orthogonalsysteme.

Wir haben gesehen, dass durch eine Zahlenfolge λ_ν gleichmässige Konvergenz der Entwicklung $W(x)$ erreicht wird. Es ist nun die Frage offen, wie wir das Entwicklungssystem wählen wollen. Wir haben, wie aus dem Vorhergesagten ersichtlich ist, drei Möglichkeiten.

I. Wir wählen eine zweckentsprechende Kernfunktion $K(x, z)$ und bestimmen die Eigenfunktionen und Eigenwerte durch Lösung der linearen Integralgleichung:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)\, \varphi(z)\, dz$$

Diese Gleichung gestattet ausser der trivialen Lösung, die wir nicht als Lösung betrachten wollen, für gewisse Werte von λ Lösungen. Diese Lösungen können ein System bilden, das alle Voraussetzungen über das Entwicklungssystem erfüllt.

II. Wir wählen primär das System $\{\varphi_\nu(x)\}$. Wir haben ja gesehen, dass die Funktionen eines Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$ auf unendlich viele Arten als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns aufgefasst werden können; das allerdings nur unter der Bedingung, dass die Funktionen $\{\varphi_\nu(x)\}$ nach oben beschränkt sind. Es muss also eine Zahlenfolge M_ν so bestimmbar sein, dass auf dem ganzen Intervalle:

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq M_\nu \qquad \text{gilt.}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich stets eine Folge der gewünschten λ_ν finden. Es genügt z. B. die Wahl:

$$|\lambda_\nu| \geqq \nu^2 M_\nu^2 \tag{43}$$

Denn damit $K(x, z)$ in der Bilinearreihe gleichmässig konvergiere, muss der Reihenrest der Entwicklung verschwinden. Er heisst:

$$R_n = \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{\varphi_\mu(x)\, \varphi_\mu(z)}{\lambda_\mu}\,; \qquad a \leqq x, z \leqq b$$

Sicher ist:

$$R_n \leqq \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{|\varphi_\mu(x)|\, |\varphi_\mu(z)|}{|\lambda_\mu|}$$

und a fortiori:

$$\leqq \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{M_\nu^2}{|\lambda_\mu|}$$

Setzen wir für λ_μ den Wert aus (43) ein, so majorieren wir im Falle, dass wir $|\lambda_\nu| \geqq \nu^2 M_\nu^2$ nehmen. Also:

$$\sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{\varphi_\mu(x)\, \varphi_\mu(z)}{\lambda_\mu} \leqq \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{1}{\mu^2}$$

Die rechte Seite ist bei $n \to \infty$, Null. Die andere Bedingung, die an die Konvergenz des Kernes gestellt ist, nämlich:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \text{konverg.}$$

muss natürlich auch erfüllt sein. Es ist also möglich, für jede beschränkte Funktionenfolge die Zahlenfolge λ_ν zu konstruieren. Bei der Durchführung von Rechnungen ist es übrigens überflüssig, die ausführliche

Kernbildung vorzunehmen. Denn wie wir gesehen haben, tritt die Kernfunktion in den Endresultaten nirgends auf.

III. Eine dritte Möglichkeit bei der Wahl des Entwicklungssystems besteht darin, dass man eines der bekannten Lösungssysteme eines gegebenen Kernes verwendet. So hat z. B. der Kern:

$$K(x, z) = \frac{1}{2} \log \frac{\sin \frac{x+z}{2}}{\sin \frac{x-z}{2}}$$

auf dem Grundintervalle $0 \leqq x, z \leqq \pi$ die Eigenwerte:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}, \frac{6}{\pi}, \ldots, \frac{2n}{\pi}, \ldots$$

und die Eigenfunktionen: $\sin z, \sin 2z, \ldots, \sin nz, \ldots$

Theoretisch ist das System brauchbar zur Entwicklung der Funktion $W(x)$. Aber im Hinblick auf die Praxis wird es sicher nicht sehr geeignet sein. Es handelt sich ja in den weitaus meisten Fällen darum, die Ausgleichung für ganze Argumente durchzuführen.

2. Verwendung der Polynome $P_n(x)$.

Praktisch wird sich die unter II. gegebene Möglichkeit am einfachsten gestalten. Wir wollen nun untersuchen, ob die Legendreschen Polynome sich auch für diese Darstellung verwenden lassen. Wir betrachten also das normierte Orthogonalsystem:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x)$$

a) Es fragt sich nun, ob diese Funktionen als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes $K(x, z)$ aufgefasst werden können. Damit dies der Fall sei, müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein.

α) Es muss auf dem Grundintervall $-1 \leqq x, z \leqq 1$ für jedes n eine Zahl M_n so existieren, dass $|\varphi_n(x)| \leqq M_n$ ist. Das ist tatsächlich möglich, denn für die Legendreschen Polynome gilt allgemein:

$$-1 \leqq P_n(x) \leqq 1 \qquad \text{oder also} \qquad |P_n(x)| \leqq 1$$

somit: $$M_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

β) Es muss eine Zahlenfolge λ_n existieren, so dass:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(z)}{\lambda_n} = \text{konverg.}$$

Diese Zahlenfolge erhalten wir aus der Ungleichung (43): Es genügt somit $|\lambda_n| \geqq n^2 M_n^2$ zu wählen, damit obige Summe gleichmässig konvergent sei. Sicher wird also z. B. die Folge

$$\lambda_n = n^2 \frac{2n+1}{2} + 1$$

den gemachten Bedingungen genügen. Wir wählen diese Form, um keinen Eigenwert $\lambda_0 = 0$ zu bekommen. Denn dann wäre ja die Reihenentwicklung schon beim ersten Gliede divergent. Führen wir die Rechnung durch, so lautet das System: $\varphi_n(x)$, λ_n:

$$\varphi_0(x)\,,\ \varphi_1(x)\,,\ \ldots.$$

$$1\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \ldots.$$

Man überzeugt sich leicht, dass auch die Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \quad \text{konvergent ist.}$$

Denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine Majorante, und diese konvergiert bekanntlich gleichmässig gegen $\frac{\pi^2}{6}$.

b) Es ist auch hier wieder angenehm, wenn wir uns von dem speziellen Intervalle $(-1, +1)$ loslösen können. Es ist zu eng, und wir ziehen ein allgemeineres Intervall $(-\alpha, \alpha)$ vor. Wir verwenden also wie in 4. I. Teil die Funktionen:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\, P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right); \qquad -\alpha \leqq x \leqq +\alpha$$

Es ist nun noch zu untersuchen, wie sich hier die Eigenwerte gestalten. Variiert x zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$, so gilt wiederum:

$$\left| P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right| \leqq 1$$

Es ist somit: $|\varphi_\nu(x)| \leqq \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\alpha}}\, 1$

also: $$M_\nu = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\alpha}}$$

Es genügt daher λ_ν so zu wählen, dass:

$$|\lambda_\nu| \geqq \nu^2 \frac{2\nu+1}{2\alpha}$$

und da ferner $|\alpha| \geqq 1$, so genügt auch:

$$|\lambda_\nu| \geqq \nu^2 \frac{(2\nu+1)}{2}$$

Um keinen λ-Wert Null zu bekommen, wählen wir:

$$\lambda_\nu = \frac{\nu^2 (2\nu+1)}{2} + 1$$

So erhalten wir die Folge:

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \ldots,\ \lambda_n$$

$$1,\ \frac{5}{2},\ 11,\ \frac{65}{2},\ 73,\ \ldots,\ \frac{n^2(2n+1)}{2} + 1$$

Eine Entwicklung von $W_1(x)$ nach Wirtinger lautet demnach:

$$W_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi_\nu(z)\, w(z)\, dz$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi_\nu(z)\, w(z)\, dz = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\alpha}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) w(z)\, dz$$

Und daher:

$$W_1(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(2\nu+1)+2} P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right) \int_{-\alpha}^{+\alpha} P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) w(z)\, dz$$

c) Die Formel erscheint etwas kompliziert. Von Fall zu Fall ist aber lediglich der Ausdruck

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) w(z)\, dz$$

zu berechnen. Die übrigen Formelteile lassen sich ein für allemal tabellieren. Wir setzen der Einfachheit halber noch:

$$\frac{2\nu + 1}{\nu^2 (2\nu + 1) + 2} = k_\nu^{(1)}$$

Ferner ist: $$\int_{-\alpha}^{+\alpha} P_\nu \left(\frac{z}{\alpha}\right) w(z)\, dz = A_\nu$$

Es lautet so das Resultat der ersten Ausgleichung:

$$W_1(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu^{(1)} P_\nu \left(\frac{x}{\alpha}\right) A_\nu$$

Wiederholen wir das Verfahren, so ändert sich ausser dem Koeffizienten $k_\nu^{(1)}$ nichts. Im Nenner tritt ein weiteres λ_ν als Faktor hinzu. Setzen wir wiederum:

$$\frac{1}{\lambda_\nu} k_\nu^{(1)} = \frac{1}{\lambda_\nu} \frac{2\nu + 1}{\nu^2 (2\nu + 1) + 2} = k_\nu^{(2)}$$

so wird das Resultat der zweiten Ausgleichung:

$$W_2(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu^{(2)} P_\nu \left(\frac{x}{\alpha}\right) A_\nu$$

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Koeffizienten $k_\nu^{(m-1)}$ und $k_\nu^{(m)}$ besteht die einfache Rekursion:

$$k_\nu^{(m)} = \frac{1}{\lambda_\nu} k_\nu^{(m-1)}$$

Wir sehen, dass $k_\nu^{(m)}$ von der Ausdehnung des Intervalles unabhängig ist. Wir können daher die Werte für $k_\nu^{(m)}$

ein für allemal berechnen. Es ergibt sich folgende Tabelle:

ν	λ_ν	$\frac{1}{\lambda_\nu}$	$k_\nu^{(1)}=\frac{2\nu+1}{\nu^2(2\nu+1)+2}$	$k_\nu^{(2)}=\frac{1}{\lambda_\nu}k_\nu^{(1)}$	$k_\nu^{(3)}=\frac{1}{\lambda_\nu}k_\nu^{(2)}$	$k_\nu^{(4)}=\frac{1}{\lambda_\nu}k_\nu^{(3)}$
0	1,0	1,0000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
1	2,5	0,4000	0,6000	0,2400	0,0960	0,0384
2	11,0	0,0909	0,2270	0,0200	0,0018	0,0001
3	32,5	0,0307	0,1080	0,0030	0,00009	0,0000
4	73,0	0,0136	0,0620	0,0008	0,00001	—
5	138,5	0,0072	0,0400	0,0002	—	—
6	235,0	0,0042	0,0280	0,0001	—	—

Wie aus dieser Zusammenstellung ersichtlich ist, streben die Koeffizienten $k_\nu^{(m)}$ mit wachsendem ν schnell gegen Null. Ferner sehen wir, dass diese, abgesehen vom ersten, mit wachsendem m ebenfalls schnell gegen Null abfallen.

d) Nun können wir auch das Abweichungsmass in Formel (42) noch praktisch untersuchen. Wir wollen den Wert des Ausdruckes: $\left[\frac{2}{\lambda_\nu^n}-\frac{1}{\lambda_\nu^{2n}}\right]$ bei wachsendem m für diese Zahlen berechnen. Es ergibt sich folgende Zusammenstellung:

ν	λ_ν	$\frac{1}{\lambda_\nu}$	$\frac{2}{\lambda_\nu}-\frac{1}{\lambda_\nu^2}$	$\frac{2}{\lambda_\nu^2}-\frac{1}{\lambda_\nu^4}$
0	1,0	1,0000	1,0000	1,0000
1	2,5	0,4000	0,6400	0,2940
2	11,0	0,0909	0,1810	0,0165
3	32,5	0,0307	0,0605	0,0018
4	73,0	0,0136	0,0272	0,00036

Aus dieser Tabelle ist klar ersichtlich, dass die eckigen Klammern, also die Koeffizienten von a_ν^2 im negativen Teil des Abweichungsmasses schnell gegen Null streben. Das bewirkt aber, dass bei oftmaliger Wiederholung des Ausgleichprozesses das Abweichungsmass zunimmt. Aus Formel (42) ist ferner ersichtlich, welches die obere Grenze des Abweichungsmasses ist. Es war:

$$\Omega_n = \int_{-\alpha}^{+\alpha} w^2(x)\, dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \left[\frac{2}{\lambda_\nu^n} - \frac{1}{\lambda_\nu^{2n}}\right]$$

Wird n gross, so reduziert sich die Summe rechts auf das Glied a_0^2. Somit ist der höchste Wert des Abweichungsmasses:

$$\Omega_n = \int_{-\alpha}^{+\alpha} w^2(x)\, dx - a_0^2$$

Vergleichen wir ferner mit Formel (41), so sehen wir, dass das Abweichungsmass nicht unter $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2$ sinken kann.

Ferner sieht man aus der Zusammenstellung gleich, dass die erste Ausgleichung für das Abweichungsmass am günstigsten ist.

e) Nun haben wir zu entscheiden über die Ausdehnung der Grundintervalle. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir müssen die Grösse der Teilreihen bestimmen. Wir haben ja die ursprüngliche Beobachtungsreihe in Teilreihen aufgeteilt und die Ausgleichung in jedem Intervalle für sich vorgenommen. Wir haben zur Wahl von $(-\alpha, \alpha)$ keine festen Anhaltspunkte. Doch können zu dessen Bestimmung folgende Überlegungen bestimmend sein. Umfasst die Teilreihe nur wenige Werte (z. B. 3), also $\alpha = (-1, +1)$, so berück-

sichtigen wir den Verlauf links und rechts des auszugleichenden Wertes zu wenig. Lokale Schwankungen treten daher stärker hervor. Nehmen wir aber viele Glieder, z. B. 9—11, so werden charakteristische Eigentümlichkeiten der Ausgangsreihe verwischt, indem die Enden zu weit vom Zentralwert entfernt liegen. Eine Ausdehnung des Intervalles auf 5—7 Glieder dürfte am zweckmässigsten sein. — Als wirklich ausgeglichen betrachten wir immer nur den Zentralwert. Die rechts und links von ihm liegenden Werte sind wohl auch ausgeglichen, aber je mehr man gegen die Enden des Intervalles kommt, um so schlechter passen sie sich dem allgemeinen Zuge der Beobachtungsreihe an. Ist einmal ein Punkt z ausgeglichen, so müssen wir den nächstfolgenden Punkt $z+1$ in genau gleicher Weise behandeln. Man hat nur das Intervall um eine Einheit nach rechts zu verschieben. Natürlich könnte man sich wie andere Methoden auch mit der Ausgleichung von sogenannten Kardinalpunkten begnügen. Z. B. würde man jeden fünften Wert ausgleichen. Die dazwischen liegenden Werte würden durch Interpolation bestimmt.

3. Kerndarstellung der Formel (20).

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, wie Wirtinger zu seinen Formeln gelangte. Erwartung und Beobachtung sind verbunden durch die Beziehung:

$$W_1(x) = \int_a^b w(z)\, K(x, z)\, dz \tag{36}$$

Dabei ist: $$K(x, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}$$

Bei der Darstellung der Erwartung durch eine nach orthogonalen Funktionen fortschreitenden Reihe haben wir die Formel

$$W(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\, a_\nu \tag{20}$$

gefunden, wo:

$$a_\nu = \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$

ist. (Fourierkoeffizient.)

Da in (20) die Summe aus endlich vielen Gliedern besteht, dürfen wir die Prozesse Summation und Integration ohne weiteres vertauschen. Eine Konvergenzfrage tritt ja nicht auf. Führen wir die Vertauschung durch, so wird:

$$W_1(x) = \int_a^b w(z) \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(z)\, dz \tag{44}$$

Betrachten wir die endliche Summe:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(z)$$

so sehen wir, dass diese eine endliche, stetige und symmetrische Funktion der beiden Variabeln x und z darstellt. Es sei diese Funktion mit $K_n(x, z)$ dargestellt. Führen wir diese rein formelle Beziehung in (44) ein, so lautet das Ausgleichgesetz:

$$W(x) = \int_a^b w(z)\, K_n(x, z)\, dz \tag{45}$$

Die Formel ist ganz analog aufgebaut wie diejenige von Wirtinger. Es stellt $w(z)\,K_n(x, z)\,dz$ den Beitrag dar, den der Funktionswert $w(z)$ zum Funktionswerte $W(x)$ liefert.

Hier können wir auch sofort sehen, dass eine zweite Ausgleichung derselben Art das Resultat unverändert lässt. Nehmen wir nämlich an, es hange $W_1(x)$ linear und homogen von den Funktionswerten ab, und zwar in der Form:

$$W_1(x) = \int_a^b W(z)\,K_n(x, z)\,dz$$

so wird, wenn wir $W(z)$ aus (45) einführen:

$$W_1(x) = \int_a^b w(t)\,K_n(z, t)\,dt \int_a^b K_n(x, z)\,dz$$

$$= \int_a^b w(t)\,dt \int_a^b K_n(z, t)\,K_n(x, z)\,dz$$

Aber:

$$K_n(z, t)\,K_n(x, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(z)\;\varphi_\nu(t) \sum_{\mu=0}^{n} \varphi_\mu(x)\;\varphi_\mu(z)$$

Integrieren wir nach z, so fallen alle Glieder, wo $\mu \neq \nu$ ist, wegen der Orthogonalität weg. Dort hingegen, wo $\mu = \nu$ ist, gibt die Integration die Einheit. Also:

$$\int_a^b K_n(z, t)\,K_n(x, z)\,dz = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(t) = K_n(x, z)$$

Somit ist:

$$W_1(x) = \int_a^b w(t)\, K_n(x, t)\, dt \tag{46}$$

Wir sehen, dass die Formeln (45) und (46) sich vollständig decken.

Diese neue Gestalt des Ausgleichgesetzes vereinfacht die frühere Formel bedeutend. Wir können nämlich die Funktion $K_n(x, z)$ für beliebiges endliches n vorausberechnen. An Stelle der Summe tritt dann ein einziges Integral. n Integrationen werden durch eine einzige ersetzt. Doch hat diese Formel gegenüber der früheren einen Nachteil. Wir haben gesehen, dass zur Berechnung des Abweichungsmasses die Koeffizienten a_ν bekannt sein müssen. Hier treten diese aber nicht mehr auf. Bei Ausgleichungen, bei denen man das Abweichungsmass näher untersuchen muss, wird man daher vorteilhafter die frühere Fassung verwenden. Theoretisch ist es ja immerhin möglich, die Koeffizienten a_n auch hier zu bestimmen. Betrachten wir nämlich:

$$W^{(n)}(x) = \int_a^b w(z)\, K_n(x, z)\, dz = a_0\, \varphi_0(x) + a_1\, \varphi_1(x) + \ldots + a_n\, \varphi_n(x)$$

und

$$W^{(n-1)}(x) = \int_a^b w(z)\, K_{n-1}(x, z)\, dz = a_0\, \varphi_0(x) + a_1\, \varphi_1(x) + \ldots + a_{n-1}\, \varphi_{n-1}^{(x)}(x)$$

so ergibt sich durch Subtraktion:

$$W^{(n)}(x) - W^{(n-1)}(x) = a_n\, \varphi_n(x)$$

und somit: $$a_n = \frac{W^{(n)}(x) - W^{(n-1)}(x)}{\varphi_n(x)}$$

Formel (45) lässt noch weitere Vereinfachungen zu, wenn wir beachten, dass jedesmal nur die Stelle Null als ausgeglichen betrachtet wird. Wir müssen also nur die Funktion:

$$K_n(\mathrm{o}, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(\mathrm{o})\, \varphi_\nu(z) = \Phi_n(z)$$

kennen. Dadurch wird die Ausgleichformel:

$$W(\mathrm{o}) = \int_a^b w(z)\, \Phi_n(z)\, dz \tag{47}$$

Ist die Funktion einmal für gewisse Intervalle berechnet, so reduziert sich die Rechenarbeit auf die Ermittlung dieses Integrals.

Beispiel.

Ein praktisches Beispiel soll die Formel (47) illustrieren. Wir wenden uns wiederum den Legendreschen Polynomen zu, die uns als Entwicklungssystem dienen sollen. Es ist:

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\alpha}}\, P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Verwenden wir eine Parabel n-ter Ordnung zur Ausgleichung, so lautet $K_n(x, z)$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2\alpha}\, P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right) P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Somit wird die Funktion $\Phi_n(z)$:

$$\Phi_n(z) = \underset{(-\alpha,\,\alpha)}{K_n}(\mathrm{o}, z) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1)\, P_\nu(\mathrm{o})\, P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) \tag{48}$$

Von den Legendreschen Polynomen wissen wir aber, dass

$$P_{2\nu+1}(\mathrm{o}) = 0\,; \quad \text{u.} \quad P_{2\nu}(\mathrm{o}) = (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}$$

Es fallen daher in (48) alle Glieder mit ungeradem Index weg. Führen wir ferner den Wert von $P_{2\nu}(\mathrm{o})$ ein, so wird:

$$\underset{(-\alpha,\,\alpha)}{K_n}(\mathrm{o}, z) = \Phi_n(z) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} (4\nu+1)\, P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Setzen wir noch:

$$(-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} (4\nu+1) = g_{\nu}$$

so wird:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} g_{\nu}\, P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Kennt man also die Werte der Funktion $P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)$, so kann man beliebig hohe K_n berechnen. Für die Koeffizienten g_{ν} können wir noch eine einfache Rekursion ableiten. Es ist:

$$\frac{g_{\nu+1}}{g_{\nu}} = \frac{(-1)^{\nu+1}\, 2\,(\nu+1)!\,[4(\nu+1)+1]\, 2^{2\nu}(\nu!)^2}{(-1)^{\nu}(2\nu)!\,(4\nu+1)\, 2^{2(\nu+1)}(\nu+1)!^{\,2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{4\nu+5}{4\nu+1}\,\frac{2\nu+1}{\nu+1}$$

Oder also:

$$g_{\nu+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{4\nu+5}{4\nu+1}\,\frac{2\nu+1}{\nu+1}\, g_{\nu}$$

Da wir $g_0 = 1$ kennen, können wir die folgenden Koeffizienten leicht berechnen. So heissen die vier ersten:

$$g_0 \; \ldots\ldots\ldots = 1$$

$$g_1 \; \ldots\ldots\ldots = -\frac{5}{2}$$

$$g_2 \; \ldots\ldots\ldots = \frac{27}{8}$$

$$g_3 \; \ldots\ldots\ldots = -\frac{65}{16}$$

Es würde so:

$$K_n(\mathrm{o}, z) = \frac{1}{2\alpha}\left[P_0\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \frac{5}{2} P_2\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \frac{3}{8}\, 9\, P_4\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{65}{16} P_6\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \ldots\right]$$

Von dieser Formel können wir nun eine beliebige Anzahl von Gliedern verwenden. Interessant ist der Fall, wo wir nur das erste Glied verwenden. Es ist dann:

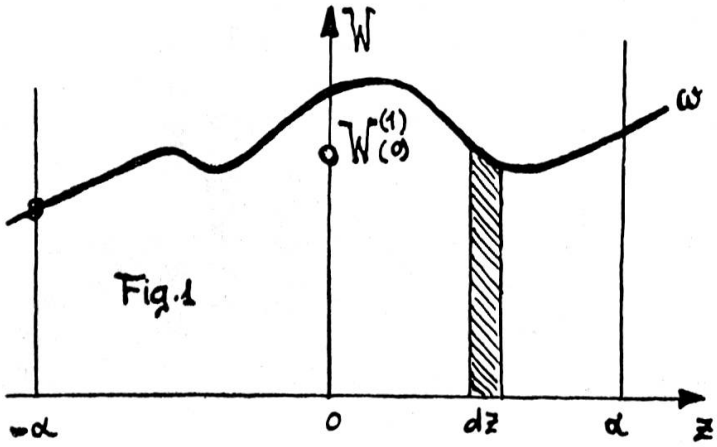
$$W^{(1)}(\mathrm{o}) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} w(z)\, P_0\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz$$

Da aber $P_0\left(\frac{z}{\alpha}\right) = 1$ ist, so wird:

$$W^{(1)}(\mathrm{o}) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} w(z)\, dz$$

Das Integral ist die Fläche unter dem zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegenden Teil der Beobachtungskurve. 2α ist die Ausdehnung des ganzen Intervalles. Der Wert

$W^{(1)}(o)$ ist also das arithmetische Mittel der auf dem Grundintervalle liegenden Beobachtungswerte.



Für $\alpha = 5$ ergab die Berechnung der Funktion $\Phi_n(z)$ folgende Resultate:

z	$\Phi_0(z)$	$\Phi_2(z)$	$\Phi_4(z)$	$\Phi_6(z)$
5	0,1	— 0,150	0,188	— 0,218
4	0,1	— 0,015	— 0,093	0,066
3	0,1	0,090	— 0,048	— 0,118
2	0,1	0,165	0,127	0,009
1	0,1	0,210	0,288	0,320
0	0,1	0,225	0,351	0,477

4. Kerndarstellung für die Formel von Wirtinger.

Für die Formel von Wirtinger gilt eine analoge Darstellung. Das Resultat der ersten Ausgleichung hiess:

$$(38) \qquad W_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_a^b w(z)\, \varphi_\nu(z)\, dz$$

$$= \int_a^b w(z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}\, dz$$

Speziell heisst der Ausgleich für den Zentralwert $x = 0$:

$$W_1(\mathrm{o}) = \int_a^b w(z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(\mathrm{o})\, \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}\, dz$$

Wir setzen wiederum:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(\mathrm{o})\, \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} = \Psi(z) = \text{Ausgleichfunktion},$$

so dass schliesslich wird:

$$W_1(\mathrm{o}) = \int_a^b w(z)\, \Psi(z)\, dz$$

Verwenden wir nun als Entwicklungssystem die Legendreschen Polynome, so wird die Ausgleichfunktion:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} (4\nu+1) \frac{1}{\lambda_{2\nu}} P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

aber: $$\lambda_{2\nu} = \frac{(2\nu)^2 (4\nu+1) + 2}{2}$$

Also:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} (4\nu+1) \frac{2}{(2\nu)^2(4\nu+1)+2} P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Führen wir wieder den aus dem vorigen Abschnitt bekannten Koeffizienten:

$$g_\nu = (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} (4\nu+1)$$

ein, so wird das Resultat:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_\nu}{\lambda_{2\nu}} P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right) \tag{49}$$

und somit der erste Ausgleich:

$$W^{(1)}(\mathrm{o}) = \frac{1}{2\alpha} \int_a^b w(z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_\nu}{\lambda_{2\nu}} P_{2\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz \tag{50}$$

Die Funktion $\Psi(z)$ kann man für bestimmte Werte von α berechnen und in einer Tabelle zusammenstellen. Die Rechenarbeit von Fall zu Fall reduziert sich so erheblich. An Stelle von mehreren Integrationen tritt eine einzige.

5. Verfeinerung der Methode.

In den beiden letzten Abschnitten haben wir Formeln abgeleitet, die uns an der Stelle $x = 0$ einen Ausgleich liefern. Der ausgeglichene Punkt liegt, wie wir festgestellt haben, auf einer Parabel. Es liegen aber noch andere ausgeglichene Punkte auf dieser Parabel. Diese haben wir bis jetzt ausser acht gelassen. Wir nehmen an, dass wir mit der Ausgleichung an der Stelle ξ begonnen haben. Die Formel:

$$W_1(x) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} K(x, z)\, w(z)\, dz$$

liefert uns $2\alpha + 1$ ausgeglichene Werte, die alle auf derselben Parabel liegen. Es seien diese Werte:

$$\underbrace{\overset{(-\alpha)}{W(\xi)}, \overset{(-\alpha+1)}{W(\xi+1)}, \ldots \overset{(-\alpha+\alpha-1)}{W(\xi+\alpha-1)}}_{\alpha\text{-Werte}}, \underbrace{\overset{(0)}{W(\xi+\alpha)}}_{\text{Zentralwert}}, \underbrace{\overset{(1)}{W(\xi+\alpha+1)}, \ldots \overset{(\alpha)}{W(\xi+2\alpha)}}_{\alpha\text{-Werte}}$$

Der Wert $W(\xi + \alpha)$ ist jetzt Zentralwert und als solcher am zuverlässigsten ausgeglichen. Nun verschieben wir das Intervall um eine Einheit nach rechts. Nun liegt der Wert $W(\xi + \alpha + 1)$ zentral. Es entstehen überdies von der Stelle $\xi + 1$ hinweg neue ausgeglichene Werte. Die weiteren Verschiebungen des Intervalles nach rechts werden noch mehr übereinanderliegende Werte liefern. Von der Stelle $\xi + 2\alpha$ hinweg beträgt die Zahl der Resultate an einer Stelle $2\alpha + 1$. Statt nun den zentralen Wert jeweils als fertiges Ausgleichsresultat zu betrachten, lassen wir die übrigen Werte an der Ausgleichung auch mitwirken. Es sind diese verschiedenen Werte an einer Stelle linear zu kombinieren. Natürlich muss das Hauptgewicht immer noch auf den zentralen Wert gelegt werden. Wir müssen also den verschiedenen Ordinatenwerten Gewichte beilegen. Die Forderungen, die wir an die Gewichte $g(z)$ stellen, sind die folgenden:

1. $\sum g(z) = 1$
2. $g(z) = g(-z)$ (Symmetriebedingung)
3. $g(0) =$ Maximum.
4. $g(0) > g(\pm 1) > g(\pm 2) > \ldots > g(\pm \alpha)$

d. h. die Gewichte sollen gegen die Enden hin abnehmen.

Eine solche Verteilung wäre die Gausssche. Diese ist aber in ihrer Anwendung zu kompliziert. Der Gaussschen Verteilung liegt die Binomialverteilung am nächsten. Diese wollen wir anwenden. Es stehen uns an der Stelle $\xi + 2\alpha$ folgende Werte zur Verfügung:

$$\underset{(-\alpha)}{W}(\xi+2\alpha)\ldots,\ \underset{(-1)}{W}(\xi+2\alpha),\ \underset{(0)}{W}(\xi+2\alpha),\ \underset{(1)}{W}(\xi+2\alpha)\ldots,\ \underset{(\alpha)}{W}(\xi+2\alpha)$$

Nun teilen wir die Gewichte zu. Diese sind gegeben durch die Koeffizienten der Entwicklung: $(1+1)^{2\alpha}$

Also erhalten wir folgendes Schema:

$$\binom{2\alpha}{0}\ \ldots\ \binom{2\alpha}{\alpha-1}\quad \binom{2\alpha}{\alpha}\quad \binom{2\alpha}{\alpha+1}\ \ldots\ \binom{2\alpha}{2\alpha}$$

Die Bedingungen 2—4 sind erfüllt. Die erste Bedingung wird erfüllt, indem wir jeden Koeffizienten durch $2^{2\alpha}$ dividieren. Addieren wir nun die mit den Gewichten versehenen Ausgleichswerte, so entsteht der neue Wert:

$$\overline{W}(\xi+2\alpha)=\frac{1}{2^{2\alpha}}\left\{\binom{2\alpha}{0}\underset{(-\alpha)}{W}(\xi+2\alpha)+\ldots+\binom{2\alpha}{\alpha-1}\underset{(-1)}{W}(\xi+2\alpha)+\right.$$

$$\left.+\binom{2\alpha}{\alpha}\underset{(0)}{W}(\xi+2\alpha)+\binom{2\alpha}{\alpha+1}\underset{(1)}{W}(\xi+2\alpha)+\ldots+\binom{2\alpha}{2\alpha}\underset{(\alpha)}{W}(\xi+2\alpha)\right\}$$

Beispiel: $\alpha=2;\ \xi+2\alpha=\xi+4=t$

Es sind an der Stelle t die folgenden Werte vorhanden:

$$\underset{(-2)}{W}(t),\quad \underset{(-1)}{W}(t),\quad \underset{(0)}{W}(t),\quad \underset{(1)}{W}(t),\quad \underset{(2)}{W}(t)$$

Nun teilen wir die Gewichte zu:

$$\binom{4}{0}\quad \binom{4}{1}\quad \binom{4}{2}\quad \binom{4}{3}\quad \binom{4}{4}$$

$$=1\quad =4\quad =6\quad =4\quad =1$$

Es lautet dann der ausgeglichene Wert an der Stelle t:

$$\overline{W}(t)=\frac{1}{16}\left\{\underset{(-2)}{W}(t)+4\underset{(-1)}{W}(t)+6\underset{(0)}{W}(t)+4\underset{(1)}{W}(t)+\underset{(2)}{W}(t)\right\}$$

oder noch:

$$= 0{,}0625 \left(\underset{(-2)}{W(t)} + \underset{(2)}{W(t)} \right) + 0{,}250 \left(\underset{(-1)}{W(t)} + \underset{(1)}{W(t)} \right) + 0{,}375 \underset{(0)}{W(t)}$$

Die Summe der Gewichte ist: $= 2 \cdot 0{,}0625 + 2 \cdot 0{,}250 + 0{,}375 = 1$. Wir stellen fest, dass die Formel erst von der Stelle $\xi + 4$ an voll verwendet werden kann. Es werden also die Werte an den Stellen ξ, $\xi + 1$, $\xi + 2$, $\xi + 3$ vom Verfahren nicht erfasst. Zu den Werten an den Stellen $\xi + 2$ und $\xi + 3$ ist zu bemerken, dass sie noch ganz gut ausgeglichen sind. Sie sind ja die beiden ersten zentral gelegenen Werte. An der Stelle $\xi + 2$ und $\xi + 3$ liegen aber noch andere Werte, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich ist.

An der Stelle $\xi + 2$ dürfen wir die drei Werte $W(0)$, $W(-1)$, $W(-2)$ nicht kombinieren, weil die Verteilung einseitig ist. Hingegen an der Stelle $\xi + 3$ dürfen wir die drei Werte $W(1)$, $W(0)$, $W(-1)$ kombinieren. $W(-2)$ streichen wir einfach, weil die Verteilung sonst unsymmetrisch ist. Als Gewichte wählen wir wiederum die Binomialkoeffizienten 1, 2, 1. Das Resultat lautet:

$$\overline{W}(\xi + 3) = 0{,}25 \left(W(1) + W(-1) \right) + 0{,}5\, W(0)$$

Die gleichen Feststellungen gelten für das Ende der auszugleichenden Tafel. Im ganzen würden also vier Werte von der Methode gar nicht erfasst.

	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$	$\xi+3$	$\xi+4$	$\xi+5$	$\xi+6$	$\xi+7$	$\xi+8$	$\xi+9$
Die 1. Parabel liefert:	$W(-2)$	$W(-1)$	$W(0)$	$W(1)$	$W(2)$					
Die 2. Parabel liefert:		$W(-2)$	$W(-1)$	$W(0)$	$W(1)$	$W(2)$				
Die 3. Parabel liefert:			$W(-2)$	$W(1)$	$W(0)$	$W(1)$	$W(2)$			
Die 4. Parabel liefert:				$W(-2)$	$W(-1)$	$W(0)$	$W(1)$	$W(2)$		
Die 5. Parabel liefert:					$W(-2)$	$W(-1)$	$W(0)$	$W(1)$	$W(2)$	
usw.	1 Wert	2 Werte	3 Werte	4 Werte	5 Werte	immer 5 Werte				

II. Praktischer Teil.

Anwendung der Theorie auf numerische Beispiele.

1. Beispiel.

Gram hat in der zitierten Arbeit ein Beispiel durchgerechnet. Um vergleichen zu können, wollen wir die gleichen rohen Zahlen mit unserer Formel behandeln. Es handelt sich um 11 Beobachtungswerte von Log $\frac{1}{p_x}$ für die Alter 20 bis 30. Es ist dabei $\alpha = 5$ gewählt. Wir verwenden also alle 11 Beobachtungswerte wie Gram. Für die Berechnung müssen wir eine Vereinfachung treffen hinsichtlich der Ermittlung der Fourierkoeffizienten a_ν. Um die lange Arbeit der numerischen Integration zu umgehen, nehmen wir für die Koeffizienten a_ν Annäherungen. Wir bedienen uns der Formel:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)\, dx \sim \frac{1}{2} f(-\alpha) + f(-\alpha+1) + \ldots + \\ + f(-1) + f(0) + f(1) + \ldots + \frac{1}{2} f(\alpha)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten a_ν benötigen wir ausser den Beobachtungszahlen noch die Werte der Funktion $P_\nu\left(\frac{x}{5}\right)$. (Vgl. Tab. 1 im Anhang.) Wir begnügen uns wie Gram mit einer dreigliedrigen Formel, d. h. wir legen der Ausgleichung eine Parabel zweiten Grades zugrunde. Es sind nun die Produkte $w(x)\, P_0\left(\frac{x}{5}\right)$, $w(x)\, P_1\left(\frac{x}{5}\right)$ und $w(x)\, P_2\left(\frac{x}{5}\right)$ zu bilden:

x'	x	$w(x) = w(x)\,P_0\left(\frac{x}{5}\right)$	$w(x)\,P_1\left(\frac{x}{5}\right)$	$w(x)\,P_2\left(\frac{x}{5}\right)$
20	— 5	0,00	0,000	0,000
21	— 4	5,82	— 4,656	2,677
22	— 3	0,00	0,000	0,000
23	— 2	2,44	— 0,976	— 0,634
24	— 1	5,04	— 1,008	— 2,218
25	0	0,00	0,000	0,000
26	1	7,80	1,560	— 3,432
27	2	1,24	0,496	— 0,322
28	3	2,12	1,272	0,085
29	4	1,79	1,432	0,823
30	5	1,94	1,940	1,940

Nun bilden wir die Summe dieser Kolonnen (vgl. die Integralbildung oben) und erhalten so die Koeffizienten:

$A_0 = 27{,}22; \qquad A_1 = -0{,}910; \qquad A_2 = -2{,}050$

Nun wenden wir die Formel (31) an:

$$W^{(2)}(x) = \frac{1}{10}\left\{A_0 + 3\,A_1\,P_1\left(\frac{x}{5}\right) + 5\,A_2\,P_2\left(\frac{x}{5}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\left\{27{,}22 - 3\cdot 0{,}910\,P_1\left(\frac{x}{5}\right) - 5\cdot 2{,}050\,P_2\left(\frac{x}{5}\right)\right\}$$

Beschränken wir uns zunächst auf ein Glied der Formel, so wird: $W^{(0)}(x) = 2{,}722$

d. h. die ausgeglichenen Werte liegen alle auf einer Geraden parallel zur x-Achse. Nehmen wir noch das zweite Glied mit, so erfährt das erste Resultat keine wesentliche Abänderung. Der Wert im Nullpunkt bleibt unverändert. Die übrigen Werte liegen alle auf einer Geraden (Fig. 2). Da das lineare Glied nur geringen

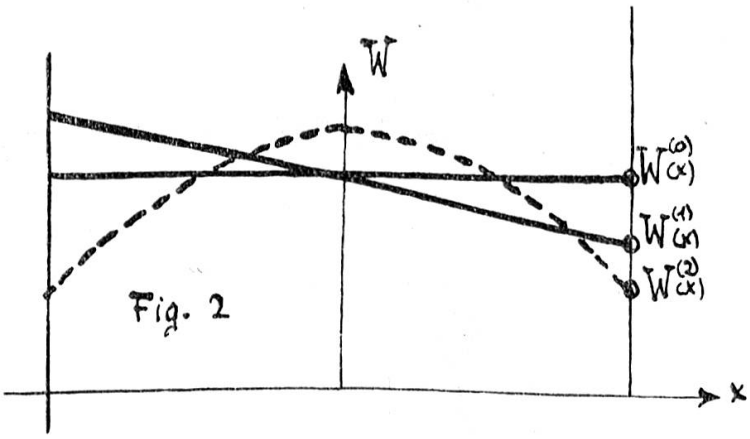


Fig. 2

Einfluss auf das Resultat hat, werden wir es vernachlässigen können. Eine wesentliche Änderung bringt die Verwendung des dritten Gliedes. Es ist:

$$W^{(2)}(x) = 2{,}722 - 1{,}025\, P_2\left(\frac{x}{5}\right)$$

Die Werte $W^{(2)}(x)$ liegen jetzt auf einer nach unten geöffneten Parabel zweiten Grades, deren Scheitel im Nullpunkte liegt. Führen wir die Berechnung punktweise durch, so erhalten wir folgende Resultate.

x	$w(x)$	$W^{(2)}(x)$	$W^{(1)}(x)$	$W^{(0)}(x)$	$w(x) - W^{(2)}(x)$	$(w(x) - W^{(2)}(x))^2$
— 5	0,00	2,722	2,995	1,697	— 1,697	2,880
— 4	5,82	2,722	2,940	2,250	3,570	12,744
— 3	0,00	2,722	2,886	2,681	— 2,681	7,188
— 2	2,44	2,722	2,831	2,988	— 0,548	0,300
— 1	5,04	2,722	2,776	3,173	1,867	3,486
0	0,00	2,722	2,722	3,234	— 3,234	10,458
1	7,80	2,722	2,668	3,173	4,627	21,409
2	1,24	2,722	2,613	2,988	— 1,748	3,056
3	2,12	2,722	2,558	2,681	— 0,561	0,314
4	1,79	2,722	2,504	2,250	— 0,460	0,212
5	1,94	2,722	2,449	1,697	0,243	0,059
	27,22	27,22	27,22	27,11	— 0,622	60,636

Unsere Zusammenstellung enthält noch das Abweichungsmass:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} (w(z) - W^{(2)}(z))^2 \, dz = 60{,}636$$

Wir können es noch anders erhalten durch die Berechnung des Besselschen Exzesses:

$$\Omega = \int_{-\alpha}^{+\alpha} w^2(z) \, dz - \sum_{\nu=0}^{2} a_\nu^2$$

Die a_ν berechnen sich aus den A_ν folgendermassen:

$$a_\nu = \sqrt{\frac{2\nu + 1}{2\alpha}} \, A_\nu$$

somit:

$$a_\nu^2 = \frac{2\nu + 1}{2\alpha} \, A_\nu^2$$

Es wird daher:

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \frac{1}{10} \cdot (27{,}22)^2 &&= 74{,}092 \\ a_1^2 &= \frac{3}{10} \cdot (0{,}910)^2 &&= 0{,}248 \\ a_2^2 &= \frac{5}{10} \cdot (2{,}050)^2 &&= 2{,}101 \\ \hline \sum a_\nu^2 & &&= 76{,}441 \end{aligned}$$

Anderseits ist: $\int_{-\alpha}^{+\alpha} w^2(x) \, dx \sim 137{,}183$

Somit das Abweichungsmass:

$$\Omega = 137{,}183 - 76{,}441 = 60{,}742.$$

Wir sehen, dass sich die Resultate fast decken; so hat man ein gutes Mittel in der Hand, die Richtigkeit der Rechnung zu überprüfen. Die folgende Zusammenstellung soll noch zeigen, dass die Resultate von Gram und dieses hier fast übereinstimmen.

x	Wirtinger	Gram
20	1,697	1,420
21	2,250	2,100
22	2,681	2,640
23	2,988	3,020
24	3,173	3,240
25	3,234	3,320
26	3,173	3,240
27	2,988	3,020
28	2,681	2,640
29	2,250	2,100
30	1,697	1,420

2. Beispiel.

Als zweites Beispiel wurde die Tafel der Sterbenswahrscheinlichkeiten Schweiz-Männer 1921/30 gewählt. Diese praktische Rechnung soll zeigen, dass die kompliziertere, gleichmässig konvergente Formel (44) leicht verwendet werden kann. Es lautet diese:

$$W_1(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu^{(1)} P_\nu\left(\frac{x}{\alpha}\right) A_\nu \tag{44}$$

Dabei ist;

$$k_\nu^{(1)} = \frac{2\nu+1}{\nu^2(2\nu+1)+2}; \quad A_\nu = \int_{-a}^{+a} P_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) w(z)\, dz$$

Um das Charakteristische der Beobachtungsreihe besser hervorheben zu können, wählen wir die Teilintervalle klein. Wir verwenden zur Ausgleichung eines Wertes $w(x)$ links und rechts von diesem zwei Werte. Im ganzen wirken also fünf Beobachtungswerte an der Ausgleichung mit. Es ist $\alpha = 2$. Begnügen wir uns mit einer Parabel 4-ter Ordnung, so lautet die Formel:

$$W_1(x) = \frac{1}{2}\left\{ k_0^{(1)} P_0\left(\frac{x}{2}\right) A_0 + \ldots + k_4^{(1)} P_4\left(\frac{x}{2}\right) A_4 \right\}$$

Am besten ist der Zentralwert ausgeglichen. Die links und rechts von ihm gelegenen Werte sind weniger zuverlässig. In einer guten Ausgleichung wird man daher nur die Zentralwerte als wirklich ausgeglichen betrachten, also Werte an der Stelle $x = 0$. Daher wird:

$$W_1(\mathrm{o}) = \frac{1}{2}\left\{ k_0^{(1)} P_0(\mathrm{o})\, A_0 + k_1^{(1)} P_1(\mathrm{o})\, A_1 + k_2^{(1)} P_2(\mathrm{o})\, A_2 + \right.$$
$$\left. + k_3^{(1)} P_3(\mathrm{o})\, A_3 + k_4^{(1)} P_4(\mathrm{o})\, A_4 \right\}$$

Da aber $P_\nu(\mathrm{o})$ für alle ungeraden ν zu Null wird, so vereinfacht sich obige Formel folgendermassen:

$$W_1(\mathrm{o}) = \frac{1}{2}\left\{ k_0^{(1)} P_0(\mathrm{o})\, A_0 + k_2^{(1)} P_2(\mathrm{o})\, A_2 + k_4^{(1)} P_4(\mathrm{o})\, A_4 \right)$$

Die Konstanten $k_\nu^{(1)}$ haben folgende Werte:

$$k_0^{(1)} = 0{,}500$$
$$k_2^{(1)} = 0{,}227$$
$$k_4^{(1)} = 0{,}062$$

Ferner ist der Wert der Polynome an der Stelle $x = 0$:

$$P_0(0) = 1{,}000$$
$$P_2(0) = -0{,}500$$
$$P_4(0) = 0{,}375$$

Die Ausgleichformel lautet demnach:

$$W_1(\mathrm{o}) = \frac{1}{2}\left\{0{,}500\ A_0 - 0{,}113\ A_2 + 0{,}023\ A_4\right\}$$
$$= 0{,}250\ A_0 - 0{,}056\ A_2 + 0{,}012\ A_4$$

Es sind also von Fall zu Fall nur die Koeffizienten A_0, A_2, A_4 zu berechnen. Es ist:

$$A_0 = \int_{-2}^{+2} P_0\left(\frac{z}{2}\right) w(z)\, dz; \quad A_2 = \int_{-2}^{+2} P_2\left(\frac{z}{2}\right) w(z)\, dz$$

$$A_4 = \int_{-2}^{+2} P_4\left(\frac{z}{2}\right) w(z)\, dz; \text{ usw.}$$

Als Beispiel der rechnerischen Arbeit sei der Beobachtungswert an der Stelle $x' = 25$ ausgeglichen. Wir brauchen hierzu die Werte von $x' = 23$ bis $x' = 27$.

x'	z	$w(z)$	$w(z)\ P_0\left(\frac{z}{2}\right)$	$w(z)\ P_2\left(\frac{z}{2}\right)$	$w(z)\ P_4\left(\frac{z}{2}\right)$
23	— 2	391	391	391	391
24	— 1	394	394	— 49	— 114
*25	*0	399	399	— 200	150
26	1	385	385	— 48	— 111
27	2	405	405	405	405
—	—	—	1576	101	323

Es ist also: $A_0 = 1576$; $A_2 = 101$; $A_4 = 323$;

Das Ausgleichresultat wird:

$$W_1(0) = W_1(25) = 0{,}25\ A_0 - 0{,}056\ A_2 + 0{,}012\ A_4;$$
$$= 394 - 5{,}66 + 3{,}88 = \underline{392.}$$

Man erkennt hieraus, dass die Rechenarbeit gut übersichtlich ist. Das Ausgleichen nimmt sonst im allgemeinen sehr viel Zeit in Anspruch. Auch in dieser Beziehung ist das Resultat der Untersuchung befriedigend. Zur Ausgleichung von 20 Beobachtungswerten war der Zeitaufwand eine Stunde.

Die Tafel der Sterbenswahrscheinlichkeiten Schweiz-Männer 1921/30 wurde für alle Alter ausgeglichen. Ein Vergleich mit anderen Methoden hat gezeigt, dass das Wirtingersche Verfahren für Sterbetafeln sehr gut verwendet werden kann.

Schlussbemerkungen.

Wir blicken zurück. Es wurde gezeigt, wie das Verfahren von Gram allgemeiner aufgefasst werden kann. Die Voraussetzungen, die Gram machte, wurden verallgemeinert. Es kam dabei zum Vorschein, wie eng das Ausgleichsverfahren von Gram mit der allgemeinen Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine Fouriersche Reihe verbunden ist. Wir haben dann unter den beliebigen orthogonalen Entwicklungssystemen eine Auswahl getroffen. Diese Auswahl wurde im Hinblick auf die Praxis gemacht. Die Entwicklung, die gefunden wurde (Formel 20), ist konvergent. Doch ist die Konvergenz ungleichmässig. An dieser Stelle der Studie wurde dann die zitierte Arbeit von Wirtinger näher untersucht. Er machte ähnliche Untersuchungen. Der grosse Unterschied zwischen der ersten Darstellung und derjenigen von Wirtinger besteht darin, dass Wirtingers Formeln gleichmässig konvergent sind. Die Formeln scheinen kompliziert, und ihre praktische Anwendung stellte Wirtinger selbst in Frage. Doch hat es sich nun gezeigt, dass dieses mathematisch schöne Verfahren praktisch verwendbar ist. Die guten Resultate, die erzielt wurden, sprechen dafür.

Wertetabelle der Legendreschen Polynome.

Tab. 1. $\alpha = 1$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
—1	1	—1	1	—1	1
0	1	0	—0,5	0	0,375
1	1	1	1	1	1

Tab. 2. $\alpha = 2$

x	$P_0\left(\frac{x}{2}\right)$	$P_1\left(\frac{x}{2}\right)$	$P_2\left(\frac{x}{2}\right)$	$P_3\left(\frac{x}{2}\right)$	$P_4\left(\frac{x}{2}\right)$
—2	1	—1,000	1,000	—1,000	1,000
—1	1	—0,500	—0,125	0,438	—0,289
0	1	0 000	—0,500	0,000	0,375
1	1	0,500	—0,125	—0,438	—0,289
2	1	1,000	1,000	1,000	1,000

Tab. 3. $\alpha = 5$

x	$P_0\left(\frac{x}{5}\right)$	$P_1\left(\frac{x}{5}\right)$	$P_2\left(\frac{x}{5}\right)$
—5	1	—1,000	1,000
—4	1	—0,800	0,460
—3	1	—0,600	0,040
—2	1	—0,400	—0,260
—1	1	—0,200	—0,440
0	1	0,000	—0,500
1	1	0,200	—0,440
2	1	0,400	—0,260
3	1	0,600	0,040
4	1	0,800	0,460
5	1	1,000	1,000

Literaturnachweis.

[1]) Sprague, Journal J. I. A. XXVI.

[2]) Simonett, Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King. M. V. M. 28. Heft, Oktober 1933.

[3]) Gram, Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. M. V. M. 10. Heft, Mai 1915.

[4]) Wirtinger, Zur Theorie der mechanischen Ausgleichung. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, 3. Bd., Wien 1907.

[5]) Blaschke, Vorlesungen über Mathematische Statistik. Teubner, Leipzig und Berlin 1906.

[6]) Rosmanith, Zur Ausgleichung von Sterbetafeln; Berichte, Denkschriften und Verhandlungen des 5. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft zu Berlin 1906, Ernst Siegfried Mittler & Sohn, Berlin 1906.

[7]) Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, I. Bd., Berlin 1924, Julius Springer.

8) Diaredo, Integralgleichungen

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 53

I. Theoretischer Teil.

1. Die Fundamentalgleichung der Ausgleichsrechnung . . . 56
2. Die Ausgleichung Pearsons 58
3. Die Ausgleichung Grams durch Orthogonalfunktionen . . 60
4. Verallgemeinerte und stetige Behandlung 66
   Die Kurvenmomente. Das Abweichungsmass. Anwendung der Theorie auf ein Beispiel.

II. Theoretischer Teil.

1. Quellenmässige Darstellung der Erwartung $W(x)$ 83
   Das Abweichungsmass. Wahl der Orthogonalsysteme.
2. Verwendung der Polynome $P_n(x)$ 96
3. Kerndarstellung der Formel (20) 103
4. Kerndarstellung der Formel von Wirtinger 110
5. Verfeinerung der Methode 112

III. Praktischer Teil.

Anwendung der Theorie auf numerische Beispiele 117
Schlussbemerkungen 124

Literaturnachweis 126