Untersuchungen über Eintrittsgewinn und Fehlbetrag einer Versicherungskasse

Autor(en): **Möschler, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **30 (1935)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555043

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Untersuchungen über Eintrittsgewinn und Fehlbetrag einer Versicherungskasse.

Von Dr. **Werner Möschler**, Zürich.

Einleitung.

Manche Versicherungskassen verlangen von ihren Mitgliedern eine einheitliche Durchschnittsprämie. Treten neue Mitglieder hinzu, so kann es vorkommen, dass diese Prämie für sie zu hoch ist. Es entsteht ein Eintrittsgewinn. Kann man, z. B. bei einer obligatorischen Kasse, auf regelmässig sich wiederholende Neueintritte rechnen, so darf diese Tatsache bei der Ermittlung des finanziellen Standes der Kasse mitgewürdigt werden. Die Eintrittsgewinne können so bedeutend sein, dass sie einen allfälligen Fehlbetrag der Kassenbilanz teilweise oder ganz kompensieren können. Hegt man Zweifel an der Stabilität einer Kasse, so sind dabei jedenfalls die Eintrittsgewinne (-verluste) ausser acht zu lassen.

Auf Anregung von Prof. Dr. Friedli haben wir, eben diesen Umständen Rechnung tragend, in vorliegender Arbeit die Frage untersucht: Wie verhalten sich Eintrittsgewinn (-verlust) und Fehlbetrag bei der Bilanz der Kasse und was für ein Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Begriffen?

Derartige Betrachtungen haben in der Praxis ihre grosse Wichtigkeit. Denken wir nur etwa an die eid-

genössische Versicherungskasse, an die Pensionskasse der schweizerischen Elektrizitätswerke etc. Erwähnt sei hier, dass es auch Kassen geben kann, für welche die erforderliche statutarische Durchschnittsprämie kleiner ist als die Prämie, die dem Risiko der Neueintretenden entspricht (Witwen- und Waisenkasse der Professoren der E. T. H. [1]).

Es handelt sich nun darum, für bestimmte, gegebene Grundlagen und durch Ausrechnungen den Gang der Ereignisse, vor allem der Eintrittsgewinne, im Laufe der Jahre bis zum Beharrungszustand einer bestimmten Kasse zu verfolgen.

Bei unsern Untersuchungen werden wir nur ein einziges Risiko berücksichtigen: das Sterblichkeitsrisiko, also jeweilen eine Kasse für Lebensversicherung betrachten. Dabei gelangen wir zu der wertvollen Erkenntnis, dass der Eintrittsgewinn, der den Fehlbetrag zu kompensieren vermag, die Schwankungen der Bilanzposten mitmacht.

Grundbegriffe bei einer offenen Kasse.

In der «Festgabe Moser» vom 28. Oktober 1931 hat der Verfasser eingehende Untersuchungen angestellt über die bei einer offenen Kasse auftretenden Begriffe. Zu diesem Zwecke wurden über das Ausscheiden und die Erneuerung des Bestandes der Kasse wie über deren Mitgliederzahl grundlegende Voraussetzungen gemacht. Gestützt darauf wurde versucht, bei der vorliegenden diskontinuierlichen Betrachtungsweise den Aufbau der Erneuerungszahlen zusammenzufassen in ein allgemeines mathematisches Gesetz.

Anmerkung: Die Zahlen, wie z. B. [1]), bedeuten die Literaturnachweise.

Zusammenhang mit den modernen Gebieten der Integralgleichungen für sich erneuernde Kassen.

Wir wollen nun für den Fall der kontinuierlichen Methode die Bestandesgleichung für die offene sich erneuernde Kasse aufstellen. Dabei halten wir uns an die Darstellung von Prof. Dr. *Moser* [2]).

Der Anfangsbestand umfasse $H = H(o)$ Elemente oder Personen. Ist $p(t)$ die durchschnittliche Probabilität für ein Element, nach t Jahren noch der Gesamtheit anzugehören, so sind nach dieser Zeit insgesamt noch $H(o) \cdot p(t)$ Elemente vorhanden. Die Erneuerung erfolge nun in der Weise, dass der Bestand immer gleichviel Elemente aufweist. In ihrer Struktur soll die Erneuerung genau der Anfangsgeneration entsprechen. Im Moment τ treten $N(\tau)$ Elemente ein, wovon t Jahre nach der Gründung noch $N(\tau) \cdot p(t - \tau)$ der Kasse angehören. Nun wird aber die Erneuerung dargestellt durch $H \cdot \varphi(\tau)$, wenn $\varphi(\tau)$ die Erneuerungsfunktion ist. Für das Zeitelement $d\tau$ haben wir also

$$N(\tau) \cdot d\tau = H \cdot \varphi(\tau)\, d\tau$$

Neueintritte, wovon im Zeitpunkt t noch

$$H \cdot \varphi(\tau) \cdot d\tau \cdot p(t - \tau)$$

verbleiben. Der ganze Bestand nach t Jahren zerfällt demnach in zwei Teile, den «alten» Bestand:

$$B_{\mathrm{I}}(t) = H \cdot p(t)$$

den «neuen» Bestand:

$$B_{\mathrm{II}}(t) = \int_o^t H \cdot \varphi(\tau)\, p(t - \tau)\, d\tau$$

wobei gilt

$$B_{\mathrm{I}}(t) + B_{\mathrm{II}}(t) = H$$

oder

$$H = H \cdot p(t) + \int_0^t H \cdot \varphi(\tau) \cdot p(t - \tau)\, d\tau$$

Wir kommen auf die bekannte Integralgleichung von Prof. Dr. *Moser*.

Es ist noch zu bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit p voraussetzungsgemäss bloss von t, nicht aber von τ abhängt. Es soll ja die Struktur des Anfangsbestandes und der neuen Elemente übereinstimmen, womit aber auch die Probabilitätsfunktion die nämliche bleibt.

Für unsere Sterbekasse zeigt sich nun ein anderes Bild. Auch hier soll der Mitgliederbestand konstant (H) bleiben. Der Erneuerung auferlegen wir aber ein bestimmtes Gesetz: alle Eintritte geschehen im untersten Alter a. Dann können wir sofort auch die Probabilität für diese Neuzugänge angeben. An Stelle von $p(t - \tau)$ der Moserschen Beziehung tritt die durch die Absterbeordnung allein bestimmte Wahrscheinlichkeit ${}_{t-\tau}p_a$. Anders verhält es sich beim alten Bestand (geschlossene Kasse). Bezeichnen wir wie vorhin die Zahl der nach t Jahren noch vorhandenen Elemente mit $H \cdot p(t)$, so ist $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit für die Zugehörigkeit eines Elementes zum alten Bestand. Bedeutet dann wiederum $H \cdot \varphi(\tau)$ die Erneuerung nach der Zeit τ, so gelangen wir für den Fall unserer Sterbekasse zu folgendem Ausdruck:

$$H = H \cdot p(t) + \int_0^t H \cdot \varphi(\tau) \cdot {}_{t-\tau}p_a \cdot d\tau$$

Hier besteht nun aber kein direkter Zusammenhang zwischen den beiden Wahrscheinlichkeiten $p(t)$ und ${}_{t-\tau}p_a$. Es bedeutet nämlich $p(t)$ einen Durchschnitt für alle Jahrgänge des Anfangsbestandes:

$$p(t) = \frac{\sum_{a}^{\infty}{}_{x}\, {}_{0}L_x \cdot {}_{t}p_x}{H}$$

Demgegenüber ist ${}_{t-\tau}p_a$ die dem untersten Alter a entsprechende Probabilität. Es ist also

$$p(t) \neq {}_{t}p_a \quad \text{und} \quad p(t-\tau) \neq {}_{t-\tau}p_a$$

In der nachfolgenden kleinen Zusammenstellung zeigt sich denn auch sofort eine deutliche Abweichung zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeiten. Die $p(t)$ wurden aus der Bestandesentwicklung für unsern praktischen Fall berechnet.

t	$p(t)$	${}_{t}p_a$
0.	1,000 00	1,000 00
5.	0,919 18	0,967 17
10.	0,822 03	0,927 44
20.	0,583 89	0,814 59
30.	0,326 69	0,634 82
40.	0,122 44	0,379 92
50.	0,021 11	0,119 83
60.	0,000 85	0,008 66
70.	0,000 00	0,000 03

Um nun einen Übergang in die Integralgleichungen von Prof. Dr. Moser zu finden, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es kann $p(t)$ übergehen in ${}_tp_a$: Unser Anfangsbestand umfasst nur Elemente vom Alter a und es wird $p(t) = {}_tp_a$.

2. ${}_tp_a$ nehme den Wert von $p(t)$ an: In diesem Fall weisen die Neueintritte dieselbe Altersstruktur auf wie die Anfangsgeneration. Die mathematische Behandlung ist in beiden Fällen dieselbe.

Prämie der offenen Kasse.

Bevor wir näher auf diese Frage eintreten, wollen wir einen Augenblick bei der Prämie der geschlossenen Kasse verweilen. In diesem Falle sind wir über die Bestandesentwicklung in jedem Zeitpunkt orientiert, und es ist möglich, eine dauernd gleichbleibende und ausreichende Prämie (Durchschnittsprämie) zu bestimmen. Denn im Moment, wo der Bestand erlischt, können wir folgendes festlegen: Die Summe aller aufgezinsten Beiträge der Mitglieder muss gleich sein der Summe der aufgezinsten Auszahlungen. Um jedoch auf einen ganz beliebigen Stichtag abzustellen, diskontieren wir die Beiträge und Auszahlungen auf den entsprechenden Tag. Unsere Durchschnittsprämie muss der Äquivalenzgleichung genügen: Barwert der Prämien gleich Barwert der Versicherungsleistungen.

Bei der offenen Kasse liegen nun die Verhältnisse wesentlich anders, da wir hier die Neuzugänge berücksichtigen müssen. Dabei stellt sich uns sofort die Frage, wie überhaupt eine für die offene sich erneuernde Gesamtheit ausreichende Durchschnittsprämie berechnet werden kann. Gestützt auf Untersuchungen, wie sie von Prof. Dr. *Moser*, Prof. Dr. *Friedli* und andern Autoren auf diesem Gebiet gemacht worden sind [3]), dürfen wir folgendes festhalten: In einem bestimmten Moment,

beispielsweise bei der Gründung, sind wir einerseits über den Anfangsbestand wohl unterrichtet, andererseits aber können wir im allgemeinen über die zukünftigen Neueintritte nichts aussagen. Wir wissen also nicht, wie gross diese Neuzugänge sind und wie sie sich rekrutieren. Demnach ist es auch nicht angängig, für diesen allgemeinsten Fall eine dauernd gleichbleibende Prämie zu berechnen. Sobald wir aber für die Eintritte gewisse Altersgrenzen vorschreiben und durch ein Obligatorium des Beitritts für Ersatz sorgen, so ist die Ermittlung einer Durchschnittsprämie möglich. Für die Praxis können natürlich diese Hypothesen erweitert werden. Eine grosse Vereinfachung wird es sein, wenn wir annehmen, dass unser Gesamtbestand im Verlauf der Versicherungsjahre gleich gross bleibe wie am Anfang und ferner ein einheitliches Beitrittsalter festgesetzt werde.

Damit sind wir bei unserer Sterbekasse angelangt. Denn wie wir verlangt haben, zählt unsere Kasse konstant H Mitglieder, und als einheitliches Beitrittsalter wurde a gewählt. Im weitern wollen wir annehmen, es sei bei der Gründung der Kasse kein Fonds vorhanden. Es müssen also sämtliche Leistungen aus den Prämien bestritten werden. Natürlich hat diese Annahme zur Folge, dass die Prämie höher ausfallen muss als im Falle, wo noch irgendwelche Rücklagen zur Verfügung stehen. Zur weitern Vereinfachung soll in allen unsern Ausführungen auf ein *Sterbegeld von Fr. 1,* kurz Sterbegeld 1 genannt, abgestellt werden.

Dann ist, unter Benutzung der in der Versicherungstechnik üblichen Bezeichnung:

Barwert der Gesamtbelastung bei der Gründung:

$$\left.\begin{array}{ll} & \sum\limits_{a}^{\infty}{}_{o}L_x\, A_x = A\,(o) \\ \text{nach } t \text{ Jahren} & \\ & \sum\limits_{a}^{\infty}{}_{t}L_x\, A_x = A\,(t) \end{array}\right\} \qquad (1')$$

Mit ${}_oL_x$, allgemein ${}_tL_x$, bezeichnen wir alle Mitglieder vom Alter x, die nach o bzw. nach t Jahren noch der Kasse angehören. $A\,(t)$, später auch $\mathsf{a}\,(t)$, führen wir der Einfachheit halber ein.

Entsprechend findet sich der Barwert der Gesamtentlastung bei der Gründung:

$$\left.\begin{array}{ll} & \sum\limits_{a}^{\infty}{}_{o}L_x\, \mathsf{a}_x = \mathsf{a}\,(o) \\ \text{nach } t \text{ Jahren} & \\ & \sum\limits_{a}^{\infty}{}_{t}L_x \cdot \mathsf{a}_x = \mathsf{a}\,(t) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Sei ${}^gP$ die ausreichende Durchschnittsprämie für den geschlossenen Bestand, so ist nach früher Gesagtem

$${}^gP = \frac{A\,(o)}{\mathsf{a}\,(o)} \qquad (3)$$

Für die offene Kasse erhalten wir folgendes: Die gesuchte statutarische Durchschnittsprämie sei P_Δ. Sie wird sicher grösser sein als die Prämie der Neueintritte (P_a), da diese beim untersten Alter erfolgen. Andererseits bleibt sie immer kleiner als die Durchschnittsprämie des geschlossenen Bestandes, da dort keine neuen Personen in die Kasse hineinkommen, also auch keine jungen Prämienzahler. Demnach gilt die Ungleichung

$$P_a < P_\Delta < {}^gP$$

und in roher Annäherung ist

$$P_\Delta \sim \frac{P_a + {}^gP}{2} \tag{4}$$

D. h. die statutarische Durchschnittsprämie einer offenen Kasse ist in einiger Annäherung gleich dem arithmetischen Mittel aus der Prämie der Neueintritte und der Durchschnittsprämie der geschlossenen Kasse.

Die genaue Bestimmung von P_Δ, ohne die Erneuerungszahlen zu kennen, ergibt sich wie folgt: Der Gesamtbestand bleibt von Jahr zu Jahr gleich gross, so dass wir jährlich H Prämienzahler haben. Wir verzeichnen mithin jedes Jahr eine Prämieneinnahme im Betrage von $H \cdot P_\Delta$, die während der ganzen Dauer der Versicherung gleich bleibt. Diese Einzahlungen nehmen also die Form einer ewigen Rente an. Ihr Kapitalwert bei der Gründung ist

$$E = H \cdot P_\Delta \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$$

Demgegenüber setzt sich die Belastung folgendermassen zusammen: Der Barwert der Leistung 1 für ein Mitglied bei seinem Eintritt beträgt

$$A_a = P_a \cdot \mathsf{a}_a$$

Scheidet ein Mitglied durch Tod aus, so tritt an seine Stelle ein neues, sein Nachfolger, nach dessen Tod wiederum ein Nachfolger erscheint, was sich dauernd wiederholt. Der Barwert der Leistung 1 an diese «Familie» von Nachfolgern eines Mitgliedes entspricht einer ewigen Rente $P_a \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$, und zwar im Moment, wo der erste Nach-

folger der Kasse beitritt. Wenn also insgesamt H Personen beitreten, beträgt der Kapitalwert der Leistungen

$$H \cdot P_a \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$$

Nun erfolgen aber die Eintritte dieser Nachfolger erst nach Ausscheiden der Anfangsgeneration, d. h. wir müssen einen entsprechenden Wegfall an Belastung anbringen. Der Barwert der Entlastung 1 für den Anfangsbestand ist $a\,(o)$, somit bei einer Prämie P_a

$$P_a \cdot \mathsf{a}\,(o)$$

und wir finden für den Kapitalwert der gesamten, künftigen Leistungen an die Nachfolger der Anfangsmitglieder

$$P_a\,[H\,\mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}\,(o)]$$

Im weitern haben wir noch bei der Gründung die Gesamtbelastung für die Anfangsgeneration in Rechnung zu stellen, also $A\,(o)$, womit wir für die gesamte Belastung endlich finden

$$B = A\,(o) + P_a\,[H\,\mathsf{a}_{\infty|} - \mathsf{a}\,(o)]$$

Unsere gesuchte Durchschnittsprämie muss nun die Äquivalenzgleichung erfüllen, d. h. es muss

$$E = B \text{ sein,}$$

oder

$$H\,P_A \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} = A\,(o) + P_a\,[H\,\mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}\,(o)]$$

woraus folgt:

$$P_A = P_a + \frac{A\,(o) - P_a \cdot \mathsf{a}\,(o)}{H} \cdot d \qquad (5)$$

Diesen Ausdruck wollen wir noch etwas umformen. Aus (1') finden wir sofort

$$A\,(o) = H - d \cdot \mathsf{a}\,(o) \tag{1}$$

Eingesetzt in (5) und unter Berücksichtigung, dass

$$P_a + d = \frac{1}{\mathsf{a}_a}$$

wird

$$P_A = \frac{A\,(o)}{H \cdot \mathsf{a}_a} \tag{6}$$

Wir haben damit, unabhängig von den Erneuerungszahlen für unsere Durchschnittsprämie Bestimmungsgleichungen gefunden, deren Auswertung einfach ist. Die numerischen Auswertungen zeigen, dass diese Beziehungen jederzeit zur Berechnung von P_A benützt werden dürfen.

Wohl die exakteste Bestimmung von P_A liefern uns die *Erneuerungszahlen.* Denn da sie identisch sind mit den entsprechenden Zahlen der ausgeschiedenen Personen, kennen wir sofort die jährlichen Versicherungsleistungen. Andererseits ist aber auch die durch die Neueintritte aufgebrachte Entlastung leicht festzustellen. Diskontieren wir alles auf den Moment der Kassengründung, so ist P_A aus der Äquivalenzgleichung leicht zu bestimmen.

Die Gesamtentlastung E bei der Gründung setzt sich zusammen aus der Entlastung durch den Anfangsbestand und dem Barwert der Entlastung durch die künftigen Neueintritte. Für den Anfangsbestand ist

$$\mathsf{a}\,(o) = \sum_{a}^{\infty} {}_oL_x \cdot \mathsf{a}_x$$

und für die nach t Jahren erfolgenden Neueintritte ist der Kapitalwert im Moment der Gründung

$$v^t \cdot {}_tL_a \cdot \mathsf{a}_a$$

und für $t = 1, 2 \ldots\ldots$

$$\mathsf{a}_a \cdot \sum_1^\infty {}_t v^t \cdot {}_tL_a$$

Somit finden wir für die Gesamtentlastung 1 bei der Gründung

$$\mathsf{a}\,(o) + \mathsf{a}_a \sum_1^\infty {}_t v^t \cdot {}_tL_a$$

Analog setzt sich die Gesamtbelastung zusammen im selben Zeitpunkt, nämlich

$$A\,(o) + A_a \sum_1^\infty {}_t v^t \cdot {}_tL_a$$

und wir erhalten schliesslich unsere Durchschnittsprämie zu

$$P_\Delta = \frac{A\,(o) + A_a \sum_1^\infty {}_t v^t \cdot {}_tL_a}{\mathsf{a}\,(o) + \mathsf{a}_a \sum_1^\infty {}_t v^t \cdot {}_tL_a} \qquad (7)$$

Diese Beziehung wird natürlich nur dann einen exakten Wert für P_Δ ergeben, wenn die Erneuerungszahlen ${}_tL_a$ genügend weit in die Zukunft bekannt sind. In unserm praktischen Beispiel fanden wir bei der Begrenzung von $t = 105$ (statt ∞) ein sehr gutes Resultat.

Was uns noch interessiert, ist die Frage, wie die beiden Beziehungen (5) und (7) miteinander zusammenhängen. Zu diesem Zwecke wollen wir unsern Ausdruck (5) passend umformen, so dass wir finden

$$P_A = \frac{A(o) + A_a \cdot \dfrac{H - d\,\mathsf{a}(o)}{d\,\mathsf{a}_a}}{\dfrac{H}{d}} \tag{8}$$

Aus (1) erhalten wir

$$H = A(o) + d\,\mathsf{a}(o)$$

und schliesslich

$$\frac{H}{d} = \mathsf{a}(o) + \frac{H - d\,\mathsf{a}(o)}{d\,\mathsf{a}_a} \cdot \mathsf{a}_a$$

Eingesetzt in (8) wird

$$P_A = \frac{A(o) + A_a \dfrac{H - d\,\mathsf{a}(o)}{d \cdot \mathsf{a}_a}}{\mathsf{a}(o) + \mathsf{a}_a \cdot \dfrac{H - d\,\mathsf{a}(o)}{d \cdot \mathsf{a}_a}} \tag{9}$$

Vergleichen wir die gefundene Beziehung mit (7), so erkennen wir leicht den analogen Aufbau. Um die restlose Überführung zu finden, zerlegen wir den Ausdruck

$$\mathsf{a}(o) = \sum_{a}^{\infty}{}^{x}\, {}_oL_x \cdot \mathsf{a}_x$$

indem wir berücksichtigen, dass

$$\mathsf{a}_x = 1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \cdots + v^t \cdot {}_tp_x + \cdots.$$

Es wird dann

$$
\begin{aligned}
\mathsf{a}(o) = {}_oL_a\,(1 + v\cdot{}_1p_a + v^2\cdot{}_2p_a + \cdots)\\
+ {}_oL_{a+1}\,(1 + v\cdot{}_1p_{a+1} + v^2\cdot{}_2p_{a+1} + \cdots)\\
\vdots\\
+ {}_oL_{a+\tau}\,(1 + v\cdot{}_1p_{a+\tau} + v^2\cdot{}_2p_{a+\tau} + \cdots)\\
\vdots
\end{aligned}
$$

Wir klammern aus und fassen anders zusammen:

$$
\begin{array}{l|l}
\mathsf{a}(o) = {}_oL_a + {}_oL_{a+1} + \cdots + {}_oL_{a+\tau} + \cdots & = \Pi_o\\
+ v\,[{}_oL_a\cdot{}_1p_a + {}_oL_{a+1}\cdot{}_1p_{a+1} + \cdots + {}_oL_{a+\tau}\cdot{}_1p_{a+\tau} + \cdots] & = \Pi_1\\
\vdots & \\
+ v^t\,[{}_oL_a\cdot{}_tp_a + {}_oL_{a+1}\cdot{}_tp_{a+1} + \cdots + {}_oL_{a+\tau}\cdot{}_tp_{a+\tau} + \cdots] & = \Pi_t\\
+ \cdots &
\end{array}
$$

Es ist aber

$$
\begin{aligned}
\Pi_o &= H\\
\Pi_1 &= v\,[H - {}_1L_a]\\
\Pi_2 &= v^2\,[H - {}_1L_a\cdot{}_1p_a - {}_2L_a]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Pi_t &= v^t\,[H - {}_1L_a\cdot{}_{t-1}p_a - {}_2L_a\cdot{}_{t-2}p - \cdots - {}_tL_a]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

oder, senkrecht addiert, ergibt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{a}(o) &= H\,(1 + v + v^2 + \cdots) - \sum_1^\infty {}_tL_a\,(1 + v\cdot{}_1p_a + v^2\cdot{}_2p_a + \cdots)\cdot v^t\\
&= H\cdot\frac{1}{1-v} - \mathsf{a}_a\sum_1^\infty{}^t\,{}_tL_a\cdot v^t
\end{aligned}
$$

und endlich

$$H - d \cdot \mathsf{a}(o) = d \cdot \mathsf{a}_a \sum_1^\infty {}_tL_a \cdot v^t$$

Wenn wir in (9) einsetzen, kommen wir zum bekannten Ausdruck

$$P_\Delta = \frac{A(o) + A_a \sum_1^\infty {}_tL_a v^t}{\mathsf{a}(o) + \mathsf{a}_a \sum_1^\infty {}_tL_a \cdot v^t} \tag{7}$$

Der Eintrittsgewinn.

Rechnen wir in einer Kasse mit einer Durchschnittsprämie, so wird diese nur für ein bestimmtes Alter der zu tragenden Versicherungsgefahr entsprechen. Es gibt also eine Gruppe von Personen, die eine gegenüber ihrem individuellen Risiko zu hohe Prämie zahlt, während eine andere eine zu niedrige entrichtet. Im vorliegenden Fall treten nur Personen vom Alter a der Kasse bei, ihre genaue Prämie ist P_a. Da sie aber die Durchschnittsprämie P_Δ zahlen müssen, bringen sie der Kasse Gewinne bzw. Verluste. In der Regel wird P_Δ grösser sein als die Prämie der Neueintretenden, d. h. die Kasse macht auf den Neuzugängen *Eintrittsgewinne*. Für unsere Sterbekasse, wo ja $P_\Delta > P_a$, werden somit die Neueintritte Gewinne bringen.

Ist aber die Durchschnittsprämie kleiner als die Prämie der Neueintretenden, so muss die Kasse mit *Eintrittsverlusten* rechnen, zu deren Deckung ein Fonds vorhanden sein muss (Witwen- und Waisenkasse der Professoren der E. T. H.) [1]).

Betrachten wir zunächst einmal die Vorgänge bei der Gründung: Die neue Generation belastet die Kasse mit

$$P_a \left[H \cdot a_{\overline{\infty}|} - a(o)\right]$$

Die Entlastung setzt sich zusammen aus

$$P_\Delta \left[H \cdot a_{\overline{\infty}|} - a(o)\right]$$

Somit finden wir für den Eintrittsgewinn bei der Gründung

$$\left.\begin{aligned} G(o) &= \Delta P \left[H \cdot a_{\overline{\infty}|} - a(o)\right] \\ \text{wo} \quad \Delta P &= P_\Delta - P_a \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Wenn unsere Durchschnittsprämie P_Δ richtig bemessen ist, muss dieser Eintrittsgewinn identisch sein mit dem in der Bilanz der geschlossenen Kasse auftretenden *Fehlbetrag*.

Wie gross ist nun aber dieser Fehlbetrag und wie lässt er sich bestimmen?

Bevor wir näher auf diese Frage eintreten, wollen wir vorgängig einiges über die Begriffe *retrospektives* und *prospektives* Deckungskapital sagen.

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Methoden, um zum Begriff «Deckungskapital» zu gelangen. Einmal betrachten wir die Vorgänge retrospektiv, d. h. wir stellen fest, wieviel nach Abzug der Versicherungsleistungen von den Prämieneinnahmen noch vorhanden ist. Diese Methode führt uns mit Dr. *Schaertlin* auf den Begriff *Prämienreserve* [4]). Demgegenüber können wir nun aber auch bestimmen, was vom Barwert der künftigen Auszahlungen nach Abzug des Barwerts der zu erwartenden Prämieneinnahmen übrig bleibt. Dieser, der prospektiven Methode, entspricht der Begriff *Deckungskapital*. Bei der Bilanz einer Kasse wird man

stets das Deckungskapital berechnen; denn man will prüfen, ob der vorhandene Kassenfonds ausreicht, um, zusammen mit den künftigen Einnahmen, die eintretenden Leistungen zu bestreiten.

Bezeichnen wir mit ${}^{r}_{t}V_x$ die Prämienreserve nach Verlauf von t Jahren für einen x-jährigen, mit ${}^{p}_{t}V_x$ das entsprechende Deckungskapital, dann ist allgemein

$$ {}^{r}_{t}V_x = P' \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \tag{11} $$

und

$$ {}^{p}_{t}V_x = A_{x+t} - P' \cdot \mathsf{a}_{x+t} \tag{12} $$

wo P' irgendeine Prämie sein soll. Indem wir berücksichtigen, dass

$$ \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \mathsf{a}_{x+t} \qquad \text{und} \qquad \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = A_{x+t} $$

können wir diese beiden Beziehungen zusammenziehen und finden

$$ {}^{r}_{t}V_x = {}^{p}_{t}V_x + (P' - P_x)\, \mathsf{a}_x \frac{D_x}{D_{x+t}} \tag{13} $$

Dieser Ausdruck besagt, dass Prämienreserve und Deckungskapital begrifflich und numerisch nur dann übereinstimmen, wenn $P' = P_x$ ist, d. h. wenn die Prämie genau der zu tragenden Versicherungsgefahr entspricht. Für jeden andern Fall, wo

$$ P' \gtrless P_x $$

wird auch

$$ {}^{r}_{t}V_x \gtrless {}^{p}_{t}V_x $$

d. h. wir müssen dann diese beiden Begriffe strikte auseinanderhalten.

Für unser Problem speziell — wir rechnen mit einer Durchschnittsprämie P_{Δ} — gilt

$$ {}^{r}_{t}V_x = {}^{p}_{t}V_x - {}_tF_x \tag{14} $$

und wo wir setzen:

$$ {}_tF_x = -(P_{\Delta} - P_x)\, \mathsf{a}_x \frac{D_x}{D_{x+t}} \tag{15} $$

Dabei ist ${}_tF_x$ eine Funktion von t und von x und kann positive oder negative Werte annehmen.

Formel (14) wird kurz *die Schaertlinsche Beziehung* genannt. Mit ihr lässt sich leicht aus dem Deckungskapital die Prämienreserve berechnen und umgekehrt. Sie ist deswegen von Bedeutung, weil man in der Praxis gewöhnlich nur das Deckungskapital kennt und die direkte Bestimmung der Prämienreserve oft mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Bis jetzt haben wir immer nur auf einen einzelnen Versicherten abgestellt. Es wird aber nicht schwer sein, diese Betrachtungen auf unsere Personengesamtheit H auszudehnen. Dabei ist zu beachten, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Prämienreserve identisch sein wird mit dem angesammelten Kassenfonds. Dann ist aber auch der Unterschied zwischen Deckungskapital und Kassenfonds identisch mit dem Unterschied zwischen Deckungskapital und Prämienreserve. Diese Differenz ist unser gesuchter *Fehlbetrag*.

Wir bemerken in diesem Zusammenhang, dass ${}_tF_x$ in der Schaertlinschen Beziehung (14) nichts anderes bedeutet als den «Fehlbetrag» für den x-jährigen nach

t Jahren. Dieser Teilfehlbetrag — wenn wir ihn so nennen wollen — ist also

$$_tF_x = {}^p_tV_x - {}^r_tV_x$$

Nun haben wir aber im Zeitpunkt t insgesamt $_tL_{x+t}$ Personen vom Alter $x + t$, also einen Fehlbetrag beim Jahrgang $x + t$ von

$$_tL_{x+t} \cdot {}_tF_x = {}_tL_{x+t} \left({}^p_tV_x - {}^r_tV_x\right)$$

und beim Jahrgang x

$$_tL_x \cdot {}_tF_{x-t} = {}_tL_x \left({}^p_tV_{x-t} - {}^r_tV_{x-t}\right)$$

Für unsere Gesamtheit H wird schliesslich der Fehlbetrag $F(t)$:

$$F(t) = \sum_a^{\infty x} {}_tL_x \, {}^p_tV_{x-t} - \sum_a^{\infty x} {}_tL_x \cdot {}^r_tV_{x-t} \qquad (16)$$

Dabei ist

$$\sum_a^{\infty x} {}_tL_x \cdot {}^p_xV_{x-t} = V(t)$$

unser Deckungskapital und

$$\sum_a^{\infty x} {}_tL_x \cdot {}^r_tV_{x-t} = K(t)$$

der Kassenfonds.

Zerlegen wir nämlich den ersten Ausdruck, so wird

$$\sum_a^{\infty x} {}_tL_x \, {}^p_tV_{x-t} = \sum_a^{\infty x} {}_tL_x \, A_x - P_A \sum_a^{\infty x} {}_tL_x \, \mathsf{a}_x$$

oder

$$V(t) = A(t) - P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}(t) \tag{17}$$

Zum selben Resultat gelangen wir auch, wenn wir in einem beliebigen Zeitpunkt t die Barwerte der Versicherungsleistungen und der Prämieneinnahmen einander gegenüberstellen. Da von sämtlichen Mitgliedern die Prämie P_{Δ} verlangt wird, muss ein Deckungskapital $V(t)$ vorhanden sein, das sich bestimmen lässt aus der Beziehung:

$$A(t) = P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}(t) + V(t) \tag{18}$$

Wir finden somit für unsern Fehlbetrag:

$$F(t) = V(t) - K(t) \tag{19}$$

Er ist gleich der Differenz zwischen dem Deckungskapital $V(t)$ und dem angesammelten Kassenfonds $K(t)$, welcher hier identisch ist mit der Prämienreserve.

Wir konnten feststellen, dass dieser Fehlbetrag sich zusammensetzt aus den verschiedenen Teilfehlbeträgen ${}_tF_x$ der einzelnen Mitglieder, also

$$F(t) = \sum_{a}^{\infty}{}_x \, {}_tL_x \cdot {}_tF_{x-t} \tag{20}$$

Betrachten wir nun die Vorgänge speziell im Moment der Kassengründung, d. h. für $t = o$, so folgt aus (15)

$${}_oF_x = -(P_{\Delta} - P_x)\, \mathsf{a}_x \frac{D_x}{D_{x+t}} \Bigg|_{t=o}$$

oder

$${}_oF_x = A_x - P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}_x$$

und somit für unsern Bestand von H Mitgliedern

$$F(o) = \sum_{a}^{\infty}{}_{o}L_x\, A_x - P_{\Delta} \sum_{a}^{\infty}{}_{o}L_x\, \mathsf{a}_x$$

und

$$F(o) = A(o) - P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}(o) \qquad (21)$$

Andererseits findet sich aus (19) für $t = o$ unter Berücksichtigung, dass bei der Gründung kein Fonds vorhanden ist

$$F(o) = V(o)$$

oder wie oben

$$F(o) = A(o) - P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}(o) \qquad (21)$$

Nachdem wir nun den Fehlbetrag unserer Sterbekasse im Moment der Gründung bestimmt haben, kehren wir zu unsern frühern Betrachtungen zurück. Es galt zu zeigen, dass für diesen Zeitpunkt ($t = o$) Eintrittsgewinn und Fehlbetrag übereinstimmen sollen. Wir fanden eingangs dieses Abschnittes

$$G(o) = \Delta P \left[H \cdot \mathsf{a}_{\infty} - \mathsf{a}(o)\right] \qquad (10)$$

wo

$$\Delta P = P_{\Delta} - P_a$$

Unter Zuhilfenahme der Beziehungen

$$P_{\Delta} = \frac{A(o)}{H \cdot \mathsf{a}_a} \quad (6) \qquad \text{und} \qquad A(o) = H - d\, \mathsf{a}(o) \quad (1)$$

lässt sich (10) umformen, so dass wird

$$G(o) = \frac{A(o)}{H \cdot \mathsf{a}_a} \cdot \frac{A(o)}{d} - \frac{A(o)}{d \cdot \mathsf{a}_a} + A(o)$$

oder

$$G(o) = \frac{A(o)}{H \cdot \mathrm{a}_a} \left\{ \frac{A(o)}{d} - \frac{H}{d} \right\} + A(o)$$

und schlussendlich gelangen wir zu

$$G(o) = A(o) - P_{\Delta} \cdot \mathrm{a}(o) \doteq F(o) \qquad (22)$$

Dieser Ausdruck zeigt uns, dass in der Tat bei der Kassengründung der Eintrittsgewinn mit dem Fehlbetrag übereinstimmt.

Damit hätten wir die Frage nach dem Eintrittsgewinn für eine wichtige Grenzlage entschieden. Was uns nun aber weiter interessiert, ist der Verlauf dieses Postens $G(t)$ während der ganzen Versicherungsdauer bis zum Beharrungszustand.

Bleibt $G(t)$ konstant, ändert er sich, um eventuell ganz zu verschwinden, und in welchem Zusammenhang steht er zum Fehlbetrag $F(t)$, d. h. wie verläuft die Differenz $F(t) - G(t)$?

Zunächst wollen wir für den Eintrittsgewinn eine allgemeine Beziehung herleiten.

Wie bei der Gründung, treten auch in einem spätern Moment insgesamt H Personen erst dann ein, wenn der ganze Bestand vom Zeitpunkt t, also ebenfalls H Mitglieder, ausgeschieden ist. Da alle diese Neueintritte mit dem Alter a erfolgen, mithin ihrem Risiko die Prämie P_a entspricht, bringt jedes dieser künftigen Mitglieder der Kasse einen Gewinn von $P_{\Delta} - P_a = \Delta P$, denn alle zahlen die Durchschnittsprämie P_{Δ}. Und im Zeitpunkt t ist der Barwert all dieser zu erwartenden Gewinne

$$G(t) = (P_{\Delta} - P_a) \left[H \cdot \mathrm{a}_{\overline{\infty}|} - \mathrm{a}(t) \right] \qquad (23)$$

In dieser Beziehung kann t alle Werte durchlaufen von o bis ∞.

Es ist nun sofort ersichtlich, dass $G(t)$ in zwei wesentliche Bestandteile zerfällt: in einen konstanten k und in einen abhängigen $f(t)$. Es ist also

$$k = \Delta P \cdot H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \Delta P \cdot \mathsf{a}(t)$$

so dass wir setzen können

$$G(t) = k - f(t) \tag{24}$$

Uns interessiert natürlich nur die von t abhängige Grösse $f(t)$. Sie wird alle Schwankungen von $\mathsf{a}(t)$ mitmachen. Dieses selbst ist aber wiederum abhängig von t, d. h. abhängig von der Bestandeszusammensetzung nach t Jahren. Erreicht schliesslich unsere Kasse den Beharrungszustand, so bleibt naturgemäss von jenem Moment an die Altersverteilung dieselbe, mit ihr nimmt aber auch $\mathsf{a}(\infty)$, beziehungsweise $f(\infty)$ einen konstanten Wert an.

Hand in Hand mit $f(t)$ bewegt sich nun aber der gesamte Eintrittsgewinn $G(t)$ in einer Wellenbewegung um eine feste Gleichgewichtslage herum, die mit $G(\infty)$ gegeben ist. Zu beweisen ist nur noch, dass $G(t)$ nie null werden kann.

Einmal folgt aus der Ungleichung

$$\mathsf{a}_{\infty|} > \mathsf{a}_x$$

sofort

$$\sum_a^\infty {}_tL_x \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} > \sum_a^\infty {}_tL_x \, \mathsf{a}_x$$

oder

$$H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} > \mathsf{a}(t)$$

Da somit die Differenz $H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}(t)$ immer von null verschieden sein wird, können wir den Satz aufstellen:

Solange P_{Δ} von P_a verschieden ist, wird der Eintrittsgewinn $G(t)$ für keinen Wert von t zwischen o und ∞ verschwinden.

Es bleibt uns noch zu untersuchen, ob diese Eintrittsgewinne ausreichen, um die alljährlich auftretenden Fehlbeträge zu decken. Insbesondere wollen wir dabei die beiden Grenzlagen *Kassengründung* und *Beharrungszustand* betrachten. Für den ersten Zeitpunkt haben wir bereits festgestellt, dass gilt

$$G(o) = F(o) \tag{22}$$

Für den Beharrungszustand (= B. Z.) gilt

$$F(\infty) = V(\infty) - K(\infty) \tag{25}$$

Wegen (17) finden wir für das Deckungskapital

$$V(\infty) = A(\infty) - P_{\Delta}\, \mathsf{a}(\infty)$$

Sobald wir die Altersverteilung im B. Z. kennen, können wir $V(\infty)$ bestimmen. Wie wir in einem spätern Abschnitt «Beharrungszustand» zeigen werden, lässt sich diese leicht berechnen. Zugleich nehmen wir hier einige Resultate einfachheitshalber vorweg, deren Beweisführung im genannten Abschnitt folgt. Wir setzen

$$A(\infty) = \frac{H}{i} \cdot \frac{1 - A_a}{e_a} \tag{50}$$

und

$$\mathsf{a}(\infty) = \frac{H}{i}\left(r - \frac{\mathsf{a}_a}{e_a}\right) \tag{51}$$

Dazu benützen wir die *mittlere Lebensdauer* e_a für einen Neueintretenden

$$e_a = \frac{\sum_a^{\infty} l_x}{l_a} \tag{47}$$

Nach diesen Voraussetzungen werden wir nun versuchen, den angesammelten Kassenfonds $K(\infty)$, mit andern Worten unsere Prämienreserve im B. Z. direkt zu bestimmen. Zunächst wissen wir: Zu Beginn jedes Jahres nach Erreichen des B. Z. betragen die Prämieneinnahmen $H \cdot P_{\Delta}$, mithin auf Ende jedes Jahres $HP_{\Delta}(1+i)$. Dazu kommen noch Fondszinsen im Betrage von $K(\infty) \cdot i$. Die Einnahmen ergeben somit

$$E(\infty) = H P_{\Delta}(1+i) + K(\infty) \cdot i$$

Diesen Einnahmen stehen die Ausgaben gegenüber, die sich zusammensetzen aus den Sterbegeldentrichtungen. Da die Zahl der Gestorbenen aber mit der Zahl der Neueintritte übereinstimmt, findet sich die gesamte Belastung zu

$$B(\infty) = {}_{\infty}L_a \tag{26}$$

Und da in der Kasse Gleichgewicht herrschen muss, wird

$$E(\infty) = B(\infty)$$

sein, oder

$$H P_{\Delta}(1+i) + K(\infty) \cdot i = {}_{\infty}L_a$$

woraus sich unser Kassenfonds im B. Z. ergibt zu

$$K(\infty) = {}_{\infty}L_a \cdot \frac{1}{i} - H P_{\Delta} \frac{1+i}{i}$$

und schliesslich

$$K(\infty) = {}_{\infty}L_a \cdot a_{\overline{\infty}|} - H \cdot P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} \tag{27}$$

Damit haben wir eine direkte Bestimmung des Kassenfonds gefunden, und setzen wir nun diesen Ausdruck in unsere Beziehung (25) ein, so wird

$$F(\infty) = A(\infty) - P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - {}_{\infty}L_a \cdot a_{\overline{\infty}|} + H P_{\Delta} \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$$

Wegen (47) ist speziell

$${}_{\infty}L_a = \frac{H}{e_a}$$

und somit

$$F(\infty) = A(\infty) - \frac{H \cdot a_{\overline{\infty}|}}{e_a} + P_{\Delta}\left[H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}(\infty)\right]$$

Wenn wir nun die vorausgesetzten Ausdrücke (50) und (51) heranziehen, substituieren und zusammenziehen, kommen wir schliesslich auf die einfache Beziehung:

$$F(\infty) = (P_{\Delta} - P_a)\frac{H}{i} \cdot \frac{\mathsf{a}_a}{e_a} = \Delta P \frac{H}{i} \cdot \frac{\mathsf{a}_a}{e_a} \tag{28}$$

Auf der andern Seite finden wir aus (23) für den Eintrittsgewinn, wenn wir $t = \infty$ setzen,

$$G(\infty) = \Delta P\left[H\, \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}(\infty)\right] = \Delta P \frac{H}{i} \cdot \frac{\mathsf{a}_a}{e_a}$$

d. h. wir kommen zum selben Resultat. Dies will besagen, dass also auch im B. Z. Eintrittsgewinn und Fehlbetrag miteinander übereinstimmen.

Neben dieser wichtigen Folgerung gibt uns Formel (28) die Möglichkeit, den Eintrittsgewinn im B. Z. auf

sehr einfache Weise zu bestimmen. Wir brauchen dazu nur die Durchschnittsprämie, die Prämie der Neueintritte wie deren Leistungsbarwert, die mittlere Lebensdauer, die Personengesamtheit und den Zinsfuss zu kennen.

Nachdem wir für die beiden Grenzlagen Kassengründung und Beharrungszustand Übereinstimmung in der Hinsicht gefunden haben, dass sich nämlich Eintrittsgewinn und Fehlbetrag gleich sind, wird man unwillkürlich erwarten, dieselben Resultate bei den dazwischenliegenden Bilanzen anzutreffen. Mit andern Worten, dass für alle Werte t von o bis ∞ gilt

$$G(t) = F(t)$$

In der Beziehung (19)

$$F(t) = V(t) - K(t)$$

können wir nach Formel (17) das Deckungskapital $V(t)$ sofort bestimmen, wogegen wir bisher für $K(t)$ noch nichts aussagen können. Wir werden demnach zunächst für den Kassenfonds eine direkte Bestimmungsmöglichkeit suchen.

Zu diesem Zwecke wollen wir vorerst zeigen, dass für unsere Sterbekasse der Kassenfonds auch prospektiv berechnet werden kann. Im Moment der Gründung müssen sich die Gesamteinnahmen während der ganzen Versicherungsdauer und die entsprechenden Ausgaben decken, da ja kein Fonds vorhanden ist. Nach Verlauf von t Jahren hat sich ein Fonds $K(t)$ angesammelt. Dieser Fonds muss nun, zusammen mit den künftigen Einnahmen, gleich sein den zu erwartenden Auszahlungen, d. h. es wird sein

$$K(t) = A' - E' \tag{29}$$

wenn wir mit A' die zu erwartenden Auszahlungen und mit E' die künftigen Einnahmen bezeichnen.

(29) besagt uns aber auch, dass wir den Kassenfonds wirklich prospektiv ermitteln können.

Im Moment t setzt sich die Belastung A' zusammen aus Gesamtbelastung $A\,(t)$ unserer Personengesamtheit H und aus der Belastung durch die künftigen Neueintritte. Es ist also

$$A' = A\,(t) + P_a\left[H\,\mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}\,(t)\right]$$

Demgegenüber verzeichnen wir eine jährliche Prämieneinnahme von $H \cdot P_\Delta$, deren Barwert einer ewigen Rente entspricht, mithin

$$E' = H \cdot P_\Delta \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$$

Und so findet sich denn unser gesuchter Kassenfonds als

$$K\,(t) = A\,(t) + P_a\left[H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}\,(t)\right] - H \cdot P_\Delta \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$$

oder zusammengefasst

$$K\,(t) = \frac{A\,(t)}{\mathsf{a}_a} \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - H \cdot P_\Delta \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} \qquad (30)$$

Setzen wir den gefundenen Ausdruck in (19) ein, erhalten wir den Fehlbetrag zu

$$F\,(t) = A\,(t) - P_\Delta \cdot \mathsf{a}(t) - A\,(t) - P_a\left[H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}(t)\right] + \\ + H \cdot P_\Delta \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|}$$

und schlussendlich

$$F\,(t) = (P_\Delta - P_a)\left[H \cdot \mathsf{a}_{\overline{\infty}|} - \mathsf{a}\,(t)\right] = G\,(t) \qquad (31)$$

D. h. wir haben in der Beziehung (31) die Bestätigung erhalten, *dass Fehlbetrag und Eintrittsgewinn*

während der ganzen Versicherungsdauer miteinander übereinstimmen. Bedingung hiezu ist natürlich, dass die geforderte Durchschnittsprämie richtig bemessen ist.

Bilanz.

Aktiven		*Passiven*	
Fonds	III	Barwert der Leistungen an die Eintrittsgeneration . .	I
Barwert der Beiträge der Eintrittsgeneration .	IV	Barwert der Leistungen an künftige Neueintritte	II
Barwert der Beiträge künftiger Neueintritte . .	V		
Fehlbetrag	(VI)		
	Σ		Σ

Für unsere weitern Betrachtungen wollen wir annehmen, dass unsere Durchschnittsprämie richtig bemessen sei und wir von den Abweichungen im Versicherungsverlauf und bei der Kapitalverzinsung absehen. Unter diesen Voraussetzungen verschwindet der Posten VI aus unserer Bilanz.

Da bei der Eintrittsgeneration in der Regel der Kapitalwert der Leistungen grösser ist als derjenige der Beiträge, also

$$I > IV$$

können wir die Bilanz leicht in eine andere Form kleiden. Denn die Differenz I—IV ist nichts anderes als das Deckungskapital der Eintrittsgeneration. Statt Posten IV in den Aktiven dem Posten I der Passiven gegenüberzustellen, kann man diese Differenz I—IV in die Passiven einstellen. (Bilanzmethode der privaten Lebensversicherungsunternehmungen.)

Bei den künftigen Neueintritten ist dagegen der Kapitalwert der Leistungen meistens kleiner als der Kapitalwert der Beiträge, d. h.

$$\text{II} < \text{V}$$

und die Differenz V—II ist der Kapitalwert des Eintrittsgewinnes auf allen künftigen Neueintritten. Wir können somit auch hier an Stelle von Posten II der Passiven und Posten V der Aktiven diese Differenz V—II in die Aktiven einsetzen. Hierzu ist noch zu bemerken, dass im Falle $P_{\Delta} < P_a$ die Differenz negativ wird und als Eintrittsverlust in die Passiven einzustellen ist.

Die vollständige Bilanz der offenen Kasse sieht dann wie folgt aus:

Aktiven		*Passiven*	
Fonds	III	Deckungskapital der Eintrittsgeneration . . .	I—IV
Eintrittsgewinn auf künftigen Neueintritten . . .	V—II		
	Σ		Σ

In allen Fällen, in denen die Durchschnittsprämie P_{Δ} sich von der nach dem Risiko der Neueintritte abgestuften Prämie P_a unterscheidet, weicht also die Bilanz der offenen Kasse von derjenigen der geschlossenen ab.

Als Beispiel wollen wir für unsere Ausrechnungen die Bilanz nach 25 Jahren aufstellen. Die erste Darstellung liefert:

Aktiven.

Fonds (III)	Fr.	112 581,7
Barwert der Beiträge der Eintrittsgeneration (IV)	»	305 646,9
Barwert der Beiträge der künftigen Neueintritte (V)	»	328 207,1
Total	Fr.	746 435,7

Passiven.

Barwert der Leistungen an die Eintrittsgeneration (I)	Fr.	517 796,3
Barwert der Leistungen an künftige Neueintritte (II)	»	228 639,4
Total	Fr.	746 435,7

Die zweite Darstellungsmethode zeigt folgendes Bild:

Aktiven.

Fonds (III)	Fr.	112 581,7
Eintrittsgewinn auf künftigen Neueintritten (V—II)	»	99 567,7
Total	Fr.	212 149,4

Passiven.

Deckungskapital der Eintrittsgeneration (I—IV)	Fr.	212 149,4

Erwähnt sei noch, dass bei der Aufstellung der Eintrittsbilanz der geplanten eidgenössischen Alters- und Hinterlassenenversicherung nach der ersten Darstellung vorgegangen wurde.

Risikoprämie und Sparprämie.

Bei der Entrichtung einer Prämie P_x ist das Deckungskapital ganz allgemein

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x &= A_{x+t} - P_x \cdot \mathsf{a}_{x+t} \\
&= 1 - \frac{\mathsf{a}_{x+t}}{\mathsf{a}_x} = (P_{x+t} - P_x)\, \mathsf{a}_{x+t}
\end{aligned}
$$

Wenn nun die Kasse im Moment t eine Auszahlung in der Höhe von 1 (Sterbegeld) für einen Gestorbenen machen muss, so hat sie nur diesen Betrag abzüglich der vorhandenen Reserve zu entrichten. Nun ist aber die Sterbenswahrscheinlichkeit eines Lebenden für dieses Jahr q_{x+t-1}, und der Wert des zu tragenden Risikos zu Beginn des Jahres ist

$$
{}_{t-1}^{R}P_x = v\, q_{x+t-1}\, (1 - {}_tV_x) \tag{32}
$$

${}_{t-1}^{R}P_x$ nennen wir die *Risikoprämie.* Sie entspricht genau dem Risiko, welches die Kasse trägt, um nach t Jahren für ein Mitglied das Sterbegeld 1 zu entrichten. Da aber die Jahresprämie P_x verlangt wird, kann die Kasse einen Betrag

$$
{}_{t-1}^{S}P_x = P_x - {}_{t-1}^{R}P_x \tag{33}
$$

zurücklegen, die *Sparprämie.* Sie ist gleich der Differenz aus der Jahresprämie und der Risikoprämie. Es ist also

$$
\begin{aligned}
{}_{t-1}^{S}P_x &= P_x - v\, q_{x+t-1}\, (1 - {}_tV_x) \\
&= P_x - v\, q_{x+t-1}\, \frac{\mathsf{a}_{x+t}}{\mathsf{a}_x}
\end{aligned} \tag{34}
$$

Wir können aber auch setzen

$$v\, q_{x+t-1} \cdot \frac{a_{x+t}}{a_x} = v\, \frac{a_{x+t}}{a_x} - \frac{a_{x+t-1}}{a_x} + \frac{1}{a_x}$$

und damit

$${}_{t-1}^{S}P_x = \frac{1}{a_x} - d - v\, \frac{a_{x+t}}{a_x} + \frac{a_{x+t-1}}{a_x} - \frac{1}{a_x}$$

oder schliesslich

$${}_{t-1}^{S}P_x = v \cdot {}_tV_x - {}_{t-1}V_x$$

Woraus wird

$${}_tV_x = r\,({}_{t-1}^{S}P_x + {}_{t-1}V_x) \qquad (35)$$

Auf ganz analoge Art findet man

$${}_{t-1}V_x = r\,({}_{t-2}^{S}P_x + {}_{t-2}V_x)$$

und so weiter;

schliesslich $\quad {}_1V_x = r\,({}_0^{S}P_x + {}_0V_x)$

so dass sich, zusammengefasst, ergibt

$${}_tV_x = r \cdot {}_{t-1}^{S}P_x + r^2\, {}_{t-2}^{S}P_x + \cdots + r^t \cdot {}_0^{S}P_x \qquad (36)$$

oder einfacher geschrieben

$${}_tV_x = \sum_{1}^{t}{}_{\tau}\, r^{\tau} \cdot {}_{t-\tau}^{S}P_x \qquad (36)$$

Es lässt sich hieraus leicht erkennen, wie die verschiedenen Sparprämien, aufgezinst, das Deckungskapital ergeben.

Für unsern Fall, wo mit einer Durchschnittsprämie P_Δ gerechnet wird, ist

$$ {}^{r}_{t}V' = {}^{p}_{t}V' - {}_{t}F' \tag{37} $$

wo $$ {}_{t}F' = -(P_{\Delta} - P_x)\, \mathsf{a}_x \frac{D_x}{D_{x+t}} $$

Dabei lassen wir der Einfachheit halber den Index x weg.

Den Akzent (′) führen wir nur ein zum Unterschied von den entsprechenden Grössen bei individueller Prämie.

Wir werden zunächst Risikoprämie und Sparprämie für das erste Versicherungsjahr bestimmen und den Zusammenhang mit dem entsprechenden Deckungskapital betrachten. Auch hier gilt allgemein

$$ {}_{t-1}^{R}P' = v\, q_{x+t-1}\, (1 - {}^{r}_{t}V') $$

wobei $(1 - {}^{r}_{t}V')$ die Risikosumme bedeutet. Und somit speziell für $t = 1$

$$ {}^{R}_{o}P' = v\, q_x\, (1 - {}^{r}_{1}V') \tag{38} $$

Für die Bestimmung der Prämienreserve ${}^{r}_{1}V'$ können wir folgendes festlegen: Zu Beginn des ersten Jahres haben wir l_x Prämienzahler, also eine Einnahme von $l_x \cdot P_{\Delta}$. Diesen Betrag aufgezinst, vermindert um die Auszahlung 1 für die Gestorbenen d_x dieses Jahres, ergibt uns die Reserve für die l_{x+1} Überlebenden. Es ist also

$$ P_{\Delta}\, l_x\, r - d_x = l_{x+1} \cdot {}^{r}_{1}V'_x \tag{39} $$

oder

$$ P_{\Delta} - v\, q_x\, (1 - {}^{r}_{1}V') = v\, p_x\, {}^{r}_{1}V' + v\, q_x\, {}^{r}_{1}V' $$

Wegen (38) und $p_x + q_x = 1$ wird

$$ P_{\Delta} - {}^{R}_{o}P' = v\, {}^{r}_{1}V' $$

Aber auch in diesem Falle ist «Durchschnittsprämie weniger Riskoprämie gleich Sparprämie», d. h. wir finden

$$ {}^{S}_{0}P' \cdot r = {}^{r}_{1}V' \tag{40} $$

Andererseits ist aber aus (39)

$$ {}^{S}_{0}P' = v \cdot {}^{r}_{1}V' = \frac{1}{p_x} \left[P_{\Delta} - v\, q_x \right] \tag{41} $$

Gehen wir einen Schritt weiter, haben wir im zweiten Versicherungsjahr ganz analog

$$ P_{\Delta}\, l_{x+1}\, r + l_{x+1} \cdot {}^{r}_{1}V' \cdot r - d_{x+1} = l_{x+2}\, {}^{r}_{2}V' $$

Es ist demnach

$$ P_{\Delta} + {}^{r}_{1}V' - vq_{x+1}\,(1 - {}^{r}_{2}V') = vp_{x+1} \cdot {}^{r}_{2}V' + vq_{x+1} \cdot {}^{r}_{2}V' $$

oder

$$ {}^{S}_{1}P' + {}^{r}_{1}V' = v\, {}^{r}_{2}V' $$

und schliesslich

$$ {}^{r}_{2}V' = {}^{S}_{1}P' \cdot r + {}^{S}_{0}P' \cdot r^2 \tag{42} $$

In dieser Art könnten wir von Jahr zu Jahr weiter gehen und wir erhielten für den allgemeinsten Fall nach t Jahren

$$ {}_{t-1}^{S}P' + {}_{t-1}^{r}V' = v \cdot {}^{r}_{t}V' $$

oder (43)

$$ {}^{r}_{t}V' = \sum_{1}^{t}{}_{\tau} \; {}_{t-\tau}^{S}P' \cdot r^{\tau} $$

Wir fanden früher im Abschnitt «Eintrittsgewinn» die Beziehung (12)

$$ {}^{r}_{t}V'_x = A_{x+t} - P_{\Delta} \cdot \mathsf{a}_{x+t} $$

Ferner ist

$$ {}_{t}V_x = A_{x+t} - P_x \cdot \mathsf{a}_{x+t} $$

und hieraus

$$ {}^{p}_{t}V'_x = {}_{t}V_x - (P_{\Delta} - P_x)\, \mathsf{a}_{x+t} $$

Eingesetzt erhalten wir

$$ {}^{r}_{t}V'_x = {}_{t}V_x - (P_{\Delta} - P_x)\, \mathsf{a}_{x+t} - {}_{t}F'_x $$

oder

$$ {}^{r}_{t}V'_x = {}_{t}V_x + (P_{\Delta} - P_x) \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad (44) $$

wenn wir für ${}_{t}F'_x$ den entsprechenden Ausdruck einsetzen.

Auf der andern Seite aber ist

$$ {}^{r}_{t}V'_x = P_{\Delta} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

Bilden wir nun die Differenz ${}^{r}_{t}V'_x - {}_{t}V_x$, so gelangen wir zu

$$ {}^{r}_{t}V'_x - {}_{t}V_x = P_{\Delta} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} + P_x \cdot \mathsf{a}_{x+t} - \frac{M_x}{D_{x+t}} $$

und schlussendlich zum bekannten Ausdruck wie oben

$$ {}^{r}_{t}V'_x = {}_{t}V_x + (P_{\Delta} - P_x) \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad (45) $$

Wir erkennen somit deutlich, wie unsere Sparprämie einerseits zur Prämienreserve führt, andererseits aber auch auf die Schaertlinschen Beziehungen, wonach die Prämienreserve direkt aus dem Deckungskapital berechnet werden kann.

In der nachfolgenden kleinen Tabelle haben wir die Risikoprämie und Sparprämie für folgende, aus unsern Ausrechnungen resultierenden Werte aufgeführt:

$P_{\Delta} = 0{,}024\,379$ Grundlagen *SM* 1901/10, 4 %, $a=30$

$a+t$	${}^{r}_{t}P'$	${}^{s}_{t}P'$
30	0,006 63	0,017 75
35	7 39	16 99
40	8 80	15 58
45	10 75	13 63
50	12 98	11 40
55	16 08	8 30
60	19 62	4 76
65	23 44	94
70	28 23	— 3 85
75	32 82	— 8 44
80	39 66	— 15 28
85	44 40	— 20 02
90	49 57	— 25 19
95	48 72	— 24 34
100	54 81	— 30 43

Beharrungszustand.

Für eine Kasse ist es von grösster Wichtigkeit, sich über die Vorgänge im Beharrungszustand, im folgenden wieder nur B. Z. genannt, Rechenschaft zu geben. Mit ihrer Hilfe kann beurteilt werden, in welcher Richtung sich die Verhältnisse in Zukunft entwickeln werden.

Es liegt im Interesse der Kasse selbst, wenn sie in spätern Zeiten ihren Verpflichtungen ebensogut nachkommen kann wie in den ersten Jahren ihres Bestehens. Aus diesen Gründen wird bei der Beurteilung der Stabilität einer Kasse der Versicherungstechniker anhand der gemachten Voraussetzungen stets die Zustände für den B. Z. möglichst zuverlässig festzustellen suchen. Die ermittelten Zahlen bilden hernach für die Kassenleitung einen wertvollen Kompass.

Wir werden uns demnach im folgenden mit der Frage beschäftigen, wie sich die verschiedenen Versicherungswerte im B. Z. bestimmen lassen. Zu diesem Zwecke müssen wir vor allem die Bestandeszusammensetzung unserer Sterbekasse in jenem Zeitpunkt kennen. Diese ist aber sofort zu finden, wenn wir berücksichtigen, dass

$$ {}_{\infty}L_x = \theta\, l_x \tag{46} $$

Mit andern Worten, die Zahl der Kassenmitglieder vom Alter x steht in einem ganz bestimmten Verhältnis zu der Zahl der in der gewählten Absterbeordnung aufgeführten Lebenden vom selben Alter. θ ist mithin ein konstanter Faktor, der sich leicht bestimmen lässt. Summieren wir nämlich in (46) über alle Alter x von a bis ∞, erhalten wir

$$ H = \sum_{a}^{\infty}{}^{x}\, {}_{\infty}L_x = \theta \sum_{a}^{\infty}{}^{x}\, l_x $$

woraus

$$ \theta = \frac{H}{l_a} \cdot \frac{l_a}{\sum\limits_{a}^{\infty}{}^{x}\, l_x} $$

oder

$$\theta = \frac{H}{l_a \cdot e_a}$$

e_a bedeutet die mittlere Lebensdauer einer Person vom Alter a, also

$$e_a = \frac{\sum_a^{\infty} {}^x l_x}{l_a} \tag{47}$$

Diese Grösse weicht bekanntlich von der vollständigen mittleren Lebenserwartung ab.

Wir fügen bei, dass wir diese Beziehung bereits im Abschnitt «Eintrittsgewinn» verwendet haben.

Für die Neueintritte im B. Z. finden wir speziell

$${}_{\infty}L_a = \frac{H}{e_a}$$

oder, da ja

$${}_{\infty}L_a = \alpha(\infty) \cdot H$$

$$\alpha(\infty) = \frac{1}{e_a} \tag{48}$$

Die Erneuerungsfunktion im B. Z. ist somit gleich dem reziproken Wert der mittleren Lebensdauer. Unsere Bestandeszusammensetzung ist durch diese Beziehung ein für allemal festgelegt.

Wie setzt sich nun aber der Barwert der Leistungen im B. Z. zusammen?

Ganz allgemein gilt

$$A(t) = \sum_{a}^{\infty x} {}_tL_x A_a$$

also speziell für $t = \infty$ und unter Verwendung von (46)

$$A(\infty) = \theta \sum_{a}^{\infty x} l_x A_x$$

Es ist aber ferner

$$A_x = \frac{v d_x + v^2 d_{x+1} + \cdots}{l_x}$$

so dass wird

$$A(\infty) = \theta \sum_{a}^{\infty x} (v d_x + v^2 d_{x+1} + \cdots + v^\infty d_\infty) \quad (49)$$

Führen wir nun die Summation schrittweise durch, so erhalten wir

$$\sum_{a}^{\infty x} d_x = d_a + d_{a+1} + \cdots + d_\infty = l_a$$

analog

$$\sum_{a}^{\infty x} d_{x+1} = d_{a+1} + d_{a+2} + \cdots + d_\infty = l_{a+1}, \quad \text{usw.}$$

Unser Ausdruck (49) geht somit über in

$$A(\infty) = \theta v \{ l_a + v l_{a+1} + \cdots \}$$

oder

$$A(\infty) = \theta l_a \cdot v \cdot \mathsf{a}_a$$

Substituieren wir hierin noch θ, so kommen wir zu der einfachen Relation

$$A(\infty) = v\,H\,\frac{\mathsf{a}_a}{e_a} = \frac{H}{i}\cdot\frac{1 - A_a}{e_a} \tag{50}$$

Da aber nach wie vor auch im B. Z. gilt

$$A(\infty) = H - d\,\mathsf{a}(\infty)$$

findet sich analog der Barwert der Entlastung zu

$$\mathsf{a}(\infty) = \frac{H}{d} - \frac{H}{i}\cdot\frac{\mathsf{a}_a}{e_a} = \frac{H}{i}\left\{r - \frac{\mathsf{a}_a}{e_a}\right\} \tag{51}$$

Wir haben damit zwei Beziehungen gefunden, mit deren Hilfe sich $A(\infty)$ und $\mathsf{a}(\infty)$ für den B. Z. sofort bestimmen lassen, und zwar vollkommen unabhängig von der anfänglichen Bestandeszusammensetzung. Was wir kennen müssen, ist die Gesamtmitgliederzahl H und die mittlere Lebensdauer e_a, sowie der Hilfswert a_a, beziehungsweise A_a.

Von diesen Ausdrücken haben wir bereits im Abschnitt «Eintrittsgewinn» Gebrauch gemacht.

Grundlagen der Ausrechnungen und Darstellung der Resultate.

Unsere Sterbekasse weise einen konstanten Mitgliederbestand von $H = 1{,}000{,}000$ Personen auf. Das Sterbegeld betrage Fr. 1. Die Struktur der Anfangsgeneration entspreche der Altersverteilung bei der eidgenössischen Versicherungskasse, Bilanztag 31. Dezember 1928. Als Rechnungsgrundlagen wählen wir die schweizerische Absterbeordnung für Männer SM 1901/10 zu

4 %. Als Beitrittsalter für die Neueintritte nehmen wir $a = 30$ Jahre an.

Gestützt auf diese Grundlagen haben wir die Erneuerungszahlen für 105 Jahre berechnet, indem wir von Jahr zu Jahr die Bestandesentwicklung verfolgten. Die gefundenen Werte haben wir in Tabelle I «Erneuerungszahlen» aufgeführt. Aufbauend auf die berechneten Bestandeszusammensetzungen konnten wir sofort Entlastungen und Belastungen der verschiedenen Jahrgänge bestimmen (Tabelle II).

Figur 1 veranschaulicht für die Altersverteilung deutlich, wie sich der alte Bestand mit wachsendem Jahrgang verschiebt, um nach 70 Jahren ganz zu verschwinden.

Für die *Berechnung der Durchschnittsprämie* bedienen wir uns der aufgestellten Beziehungen. Tabelle II liefert uns die Werte $A\,(o)$ und $\mathsf{a}\,(o)$. Wir erhalten dann für die Prämie der *geschlossenen Kasse*

$$^{g}P = \frac{A\,(o)}{\mathsf{a}\,(o)} = 0{,}030\,182\,8$$

der *offenen Kasse:*

$$P_a = 0{,}016\,983\,3$$

Die ausreichende Prämie P_Δ soll also zwischen der Prämie der Neueintritte P_a und der Prämie der geschlossenen Kasse ^{g}P liegen, wobei mit Annäherung gelten soll

$$P_\Delta \sim \frac{P_a + {}^{g}P}{2} = 0{,}023\,582\,6$$

Die *genaue Berechnung* ergibt für die Durchschnittsprämie P_Δ:

1. Nach (5):

$$P_\Delta = P_a + \frac{A\,(o) - P_a\,\mathsf{a}\,(o)}{H} \cdot d = 0{,}024\,378\,98$$

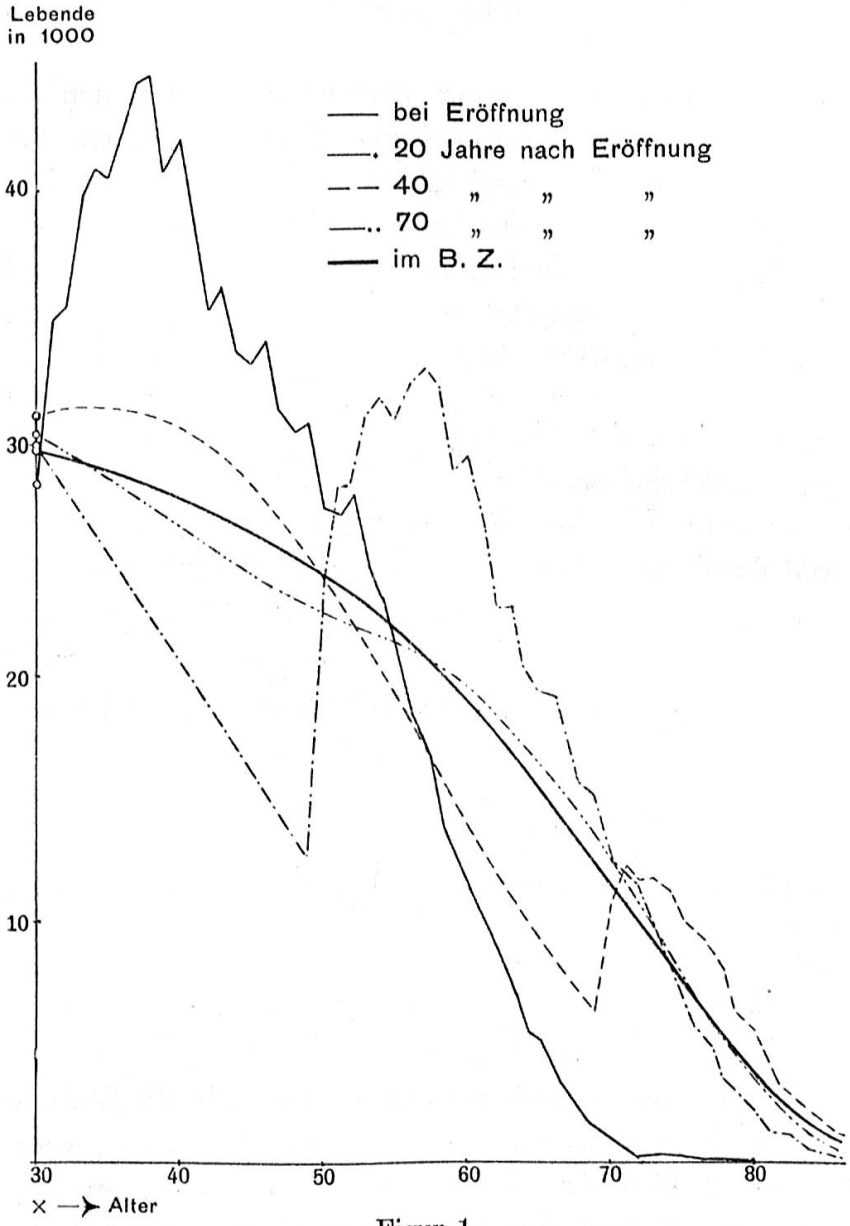
Tabelle I. **I. Erneuerungszahlen.**

t	${}_tL_a$	t	${}_tL_a$	t	${}_tL_a$
1	14913	39	30876	77	29970
2	15615	40	30582	78	29928
3	16343	41	30238	79	29879
4	17089	42	29879	80	29816
5	17857	43	29523	81	29747
6	18642	44	29168	72	29667
7	19434	45	28826	83	29586
8	20245	46	28490	84	29508
9	21059	47	28179	85	29418
10	21882	48	27904	86	29337
11	22698	49	27658	87	29252
12	23504	50	27455	88	29167
13	24329	51	27299	89	29096
14	25125	52	27203	90	29019
15	25892	53	27160	91	28955
16	26647	54	27175	92	28901
17	27366	55	27235	93	28850
18	28093	56	27338	94	28815
19	28695	57	27483	95	28775
20	29309	58	27653	96	28757
21	29868	59	27847	97	28740
22	30379	60	28058	98	28737
23	30836	61	28270	99	28735
24	31236	62	28492	100	28746
25	31586	63	28710	101	28771
26	31867	64	28913	102	28794
27	32098	65	29109	103	28827
28	32253	66	29292	104	28859
29	32382	67	29448	105	28902
30	32438	68	29590	.	.
31	32438	69	29713	.	.
32	32385	70	29812	.	.
33	32298	71	29889	∞	29151
34	32145	72	29946		
35	31961	73	29985		
36	31746	74	30008		
37	31492	75	30012		
38	31209	76	29998		

Tabelle II. **II. Entlastung und Belastung.**

t	a (t)	A (t)
0	14 567 851,1	439 698,28
1	14 379 561,0	446 940,12
2	14 196 398,7	453 984,77
3	14 019 026,6	460 806,65
4	13 848 008,7	467 384,26
5	13 683 978,0	473 693,08
10	12 987 693,1	500 473,20
15	12 537 301,6	517 796,28
20	12 352 743,4	524 897,19
25	12 399 539,6	523 095,07
30	12 598 109,0	515 457,62
35	12 845 365,2	505 948,09
40	13 043 635,2	498 321,91
45	13 123 649,5	495 244,31
50	13 064 983,3	497 500,83
55	12 921 177,0	503 031,84
60	12 789 731,3	508 087,49
65	12 729 632,7	510 399,01
70	12 742 173,9	509 916,68
75	12 797 031,4	507 806,77
80	12 859 496,9	505 404,35
85	12 903 217,1	503 722,60
90	12 916 236,4	503 221,15
95	12 901 075,4	503 805,00
100	12 871 022,1	504 960,62
∞	12 856 464,1	505 520,87

1. Altersverteilung.



Figur 1.

2. nach (6):

$$P_{\Delta} = \frac{A\,(o)}{H \cdot \mathsf{a}_a} = 0{,}024\,378\,93$$

3. Nach (7): Auf Grund der Erneuerungszahlen in Tabelle I können wir die Werte ${}_tL_a \cdot v^t$ berechnen. Da wir aber die Erneuerungszahlen nur bis 105 Jahre nach Kassengründung kennen, müssen wir von jenem Moment an die Zahl der Neueintretenden im Beharrungszustand einsetzen. Der Barwert entspricht einer ewigen Rente. Wir finden dann

$$\sum_{1}^{\infty}{}_t L_a \cdot v^t = 633\,856{,}24$$

und damit aus (7)

$$P_{\Delta} = 0{,}024\,378\,95$$

Wir stellen fest, dass alle drei Berechnungsarten uns ziemlich genau denselben Wert liefern für die gesuchte Durchschnittsprämie, so dass wir in unsern Ausrechnungen eine gute Bestätigung für die aufgestellten Beziehungen erhalten. Für die weitern Rechnungen haben wir den Wert genommen:

$$\underline{P = 0{,}024\,379}$$

Wir müssen noch bemerken, dass wir die Prämie P_a der Neueintritte auf mehr als nur 5 Stellen genau, wie in der Absterbeordnung aufgeführt, nehmen müssen. Denn im Verlauf der Berechnungen hat sich gezeigt, dass mit dem tabulierten Wert, d. h. mit $P_a = 0{,}016\,98$ unsere Durchschnittsprämie zu klein ausfallen würde im Hinblick auf den grossen Mitgliederbestand. Wir

haben deshalb den Wert genommen

$$\underline{P_a = 0{,}016\,983\,256}$$

und für den Diskont $d = {}^1/_{26} = 0{,}038\,461\,54$.

Nachdem wir nun die Durchschnittsprämie errechnet haben, können wir sofort das Budget unserer Kasse aufstellen. Tabelle III gibt uns im Zusammenhang mit Figur 2 ein genaues Bild von den Vorgängen in unserer Kasse:

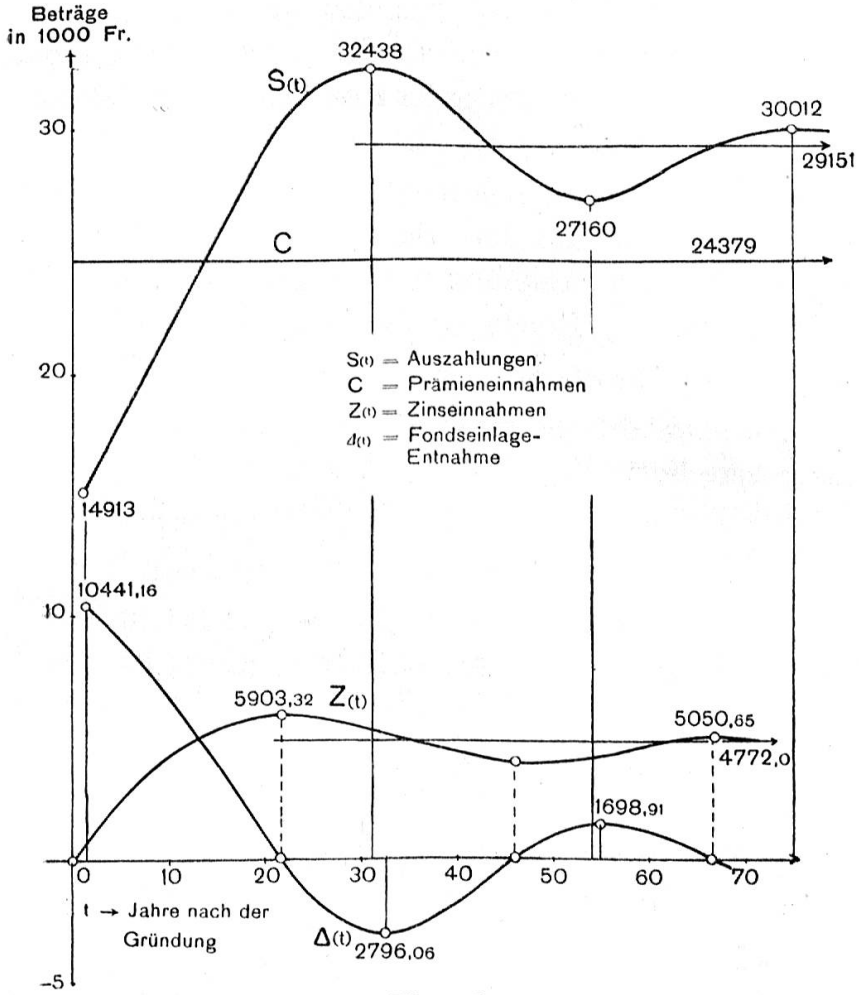
Die Einnahmen setzen sich zusammen aus den dauernd gleich bleibenden Beiträgen C und aus den Fondszinsen $Z(t)$. Diese stellen sich dar als Wellenlinie, die den Schwingungen des Kassenfonds folgt. Die Kassenleistungen ergeben eine Kurve $S(t)$, die grosse Schwankungen aufweist, resultierend aus denjenigen der Erneuerungszahlen. $Z(t)$ und $S(t)$ bewegen sich getrennt in einer Wellenlinie um eine Mittellage herum, die im Beharrungszustand erreicht wird. Zu Beginn der Versicherung übersteigen die Prämieneinnahmen allein schon die Auszahlungen, weshalb ein Fonds gebildet werden kann. Die Betriebsüberschüsse werden jedoch immer kleiner, so dass nach 21 Jahren der Fonds ein Maximum erreicht. Da aber die Kassenleistungen weiterhin ansteigen, müssen aus dem bisher angesammelten Fonds Entnahmen gemacht werden. Gleichzeitig mit diesem Übergang von Einlage zu Entnahme erreicht die Kurve der Fondszinsen ebenfalls eine maximale Lage. Diese Entnahmen wachsen bis zum Moment, wo die Sterbefälle und mit ihnen die Kassenleistungen den Höchststand erreichen. Von hier an nehmen die Entnahmen langsam wieder ab, und die Kurve geht schliesslich in die Kurve der Einlagen über. In diesem Zeitpunkt verzeichnen die Fondszinsen ihr Minimum. Die Kurve

Tabelle III.

III. Budget.

Betriebs-jahre (1)	Beitrags-Ein-nahmen (2)	Zins-Einnahmen (3)	Einnahmen (2) + (3) (4)	Aus-zahlungen (5)	Betriebsergebnisse (4) — (5) (6)	Fonds (7)
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
1	24379	975,16	25354,16	14913	10441,16	10441,16
2	24379	1392,80	25771,80	15615	10156,80	20597,96
3	24379	1799,08	26178,08	16343	9835,08	30433,04
4	24379	2192,48	26571,48	17089	9482,48	39915,52
5	24379	2571,78	26950,78	17857	9093,78	49009,30
10	24379	4211,01	28590,01	21882	6708,01	87604,15
15	24379	5325,91	29704,91	25892	3812,91	112581,66
25	24379	5837,96	30216,96	32586	— 1369,04	120200,95
20	24379	5850,56	30229,56	29309	920,56	122805,67
30	24379	5446,97	29825,97	32438	— 2612,03	109183,26
35	24379	4900,90	29279,90	31961	— 2681,10	95462,52
40	24379	4424,69	28803,69	30582	— 1778,31	84459,83
45	24379	4185,92	28564,92	28826	— 261,08	80007,82
50	24379	4257,54	28636,54	27455	1181,54	83240,95
55	24379	4554,91	28933,91	27235	1698,91	91192,75
60	24379	4865,76	29244,76	28058	1186,76	98451,64
65	24379	5033,23	29412,23	29109	303,23	101755,00
70	24379	5031,86	29410,86	29812	— 401,14	101016,27
75	24379	4920,65	29299,65	30012	— 712,35	97924,86
80	24379	4777,58	29156,58	29816	— 659,42	94400,99
85	24379	4666,15	29045,15	29418	— 372,85	91901,89
90	24379	4619,52	28998,52	29019	— 20,48	91088,49
95	24379	4638,26	29017,26	28775	242,26	91819,68
100	24379	4696,25	29075,25	28746	329,25	93356,45
105	24379	4756,49	29135,49	28902	233,49	94766,73
∞	24379	4772,00	29151,00	29151	0,00	94921,00

2. Vorgänge in der Kasse.



Figur 2.

steigt wieder an. Die Kurve der Auszahlungen sinkt nur eine gewisse Zeit lang, um nach Überschreitung eines Minimums wieder anzusteigen. Entsprechend erreicht die Kurve der Betriebsüberschüsse ein Maximum und geht dann wieder zurück. In dieser Gesetzmässigkeit geht die Entwicklung weiter bis zum Beharrungszustand.

Der Kassenfonds, der gleichbedeutend ist mit der Prämienreserve, lässt sich mit Hilfe der Schaertlinschen Beziehung direkt aus dem Deckungskapital berechnen. Wir haben diese Rechnung für die ersten Jahre durchgeführt und die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammengestellt.

Kassenfonds, mit Hilfe der Schaertlinschen Beziehung berechnet:

t	$K(t)$ (direkt)	$K(t)$ (Budget)
1	10 426,09	10 441,16
2	20 582,14	20 597,96
3	30 418,22	30 433,04
4	39 900,17	39 915,52
5	48 996,97	49 009,30
10	87 594,13	87 604,15
15	112 592,53	112 581,66
20	122 816,85	122 805,67

Die kleinen Abweichungen gegenüber den Budgetzahlen resultieren aus dem Umstande, dass die erforderlichen Korrekturglieder nicht genau berechnet werden können im Hinblick auf unsern Bestand von 1,000,000 Mitgliedern.

Eine weitere direkte Berechnungsmöglichkeit für den Kassenfonds fanden wir in der Formel (30), wonach ist

$$K(t) = A(t)\,\frac{a_{\overline{\infty}|}}{a_a} - H\,P_{\Delta}\,a_{\overline{\infty}|}$$

Dabei ist $H\,P_{\Delta}\,a_{\overline{\infty}|}$ eine konstante Grösse, und zwar für unser Beispiel

$$H\,P_{\Delta}\,a_{\overline{\infty}|} = 633\,854{,}0$$

Subtrahieren wir diesen Betrag jeweils von dem entsprechenden Wert $A(t)\,\frac{a_{\overline{\infty}|}}{a_a}$, der ja proportional ist zu $A(t)$, so finden wir tatsächlich unsern Kassenfonds $K(t)$. Wir brauchen demnach nur die Gesamtbelastungen $A(t)$ der verschiedenen Jahre zu kennen. Für die Betriebsjahre $t = 0, 1, 40$ und ∞ haben wir die Rechnung vollständigkeitshalber durchgeführt. Die Zahlen in Klammern sind die entsprechenden Werte aus dem Budget.

a) $t = 0$: $K(0) = 633\,852 - 633\,854 = -2$ (0);

b) $t = 1$: $K(1) = 644\,291 - 633\,854 = 10\,447$ (10 441,16);

c) $t = 40$: $K(40) = 718\,360 - 633\,854 = 84\,506$ (84 459,83);

d) $t = \infty$: $K(\infty) = 728\,739 - 633\,854 = 94\,885$ (94 921,0).

Wir bemerken überall eine geringe Abweichung gegenüber den Zahlen in unserm Budget. Dies ist an sich darauf zurückzuführen, dass die Werte für a_x und A_x in der gewählten Absterbeordnung nur auf 4 Stellen genau angegeben sind, was bei unserm grossen Bestand zu Differenzen führt.

Tabelle IV zeigt uns die *Bilanzen* für die verschiedenen Jahrgänge. Gleichzeitig haben wir dabei

Tabelle IV.

IV. Bilanzen.

Betriebs-jahre	Deckungs-kapital	Fonds	Fehlbetrag	Eintritts-gewinn
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
0	84 548,7	0,0	84 548,7	84 549,2
1	96 380,8	10 441,2	85 939,6	85 941,7
2	107 890,8	20 598,0	87 292,8	87 296,4
3	119 036,8	30 433,0	88 603,8	88 608,2
4	129 783,7	39 915,5	89 868,2	89 873,0
5	140 091,4	49 009,3	91 082,1	91 086,1
10	183 846,2	87 604,2	96 242,0	96 235,6
15	212 149,4	112 581,7	99 567,7	99 566,6
20	223 749,7	122 805,7	100 944,0	100 931,6
25	220 806,7	120 201,0	100 605,7	100 585,5
30	208 328,3	109 183,3	99 145,0	99 116,9
35	192 790,9	95 462,5	97 328,4	97 288,3
40	180 331,1	84 459,8	95 871,3	95 821,9
45	175 302,8	80 007,8	95 295,0	95 230,1
50	178 989,6	83 241,0	95 748,6	95 664,0
55	188 026,4	91 192,8	96 833,6	96 727,6
60	196 286,6	98 451,6	97 835,0	97 699,7
65	200 063,3	101 755,0	98 308,3	98 144,2
70	199 275,2	101 016,3	98 258,9	98 051,4
75	195 828,0	97 924,9	97 903,1	97 645,7
80	191 902,6	94 401,0	97 501,6	97 183,7
85	189 155,1	91 901,9	97 253,2	96 860,4
90	188 336,2	91 088,5	97 247,7	96 764,1
95	189 289,7	91 819,7	97 470,0	96 876,2
100	191 178,0	93 356,5	97 821,5	97 098,5
∞	192 093,2	94 921,0	97 172,2	97 206,2

Eintrittsgewinn und Fehlbetrag einander gegenübergestellt, und wir können erkennen, dass immer eine sehr gute Übereinstimmung herrscht. Die Abweichungen sind auf die oben erwähnten Umstände zurückzuführen. Unsere Prämie ist demnach mit $P_{\Delta} = 0{,}024379$ richtig bemessen, da ja die Bilanz in jedem Moment ausgeglichen ist.

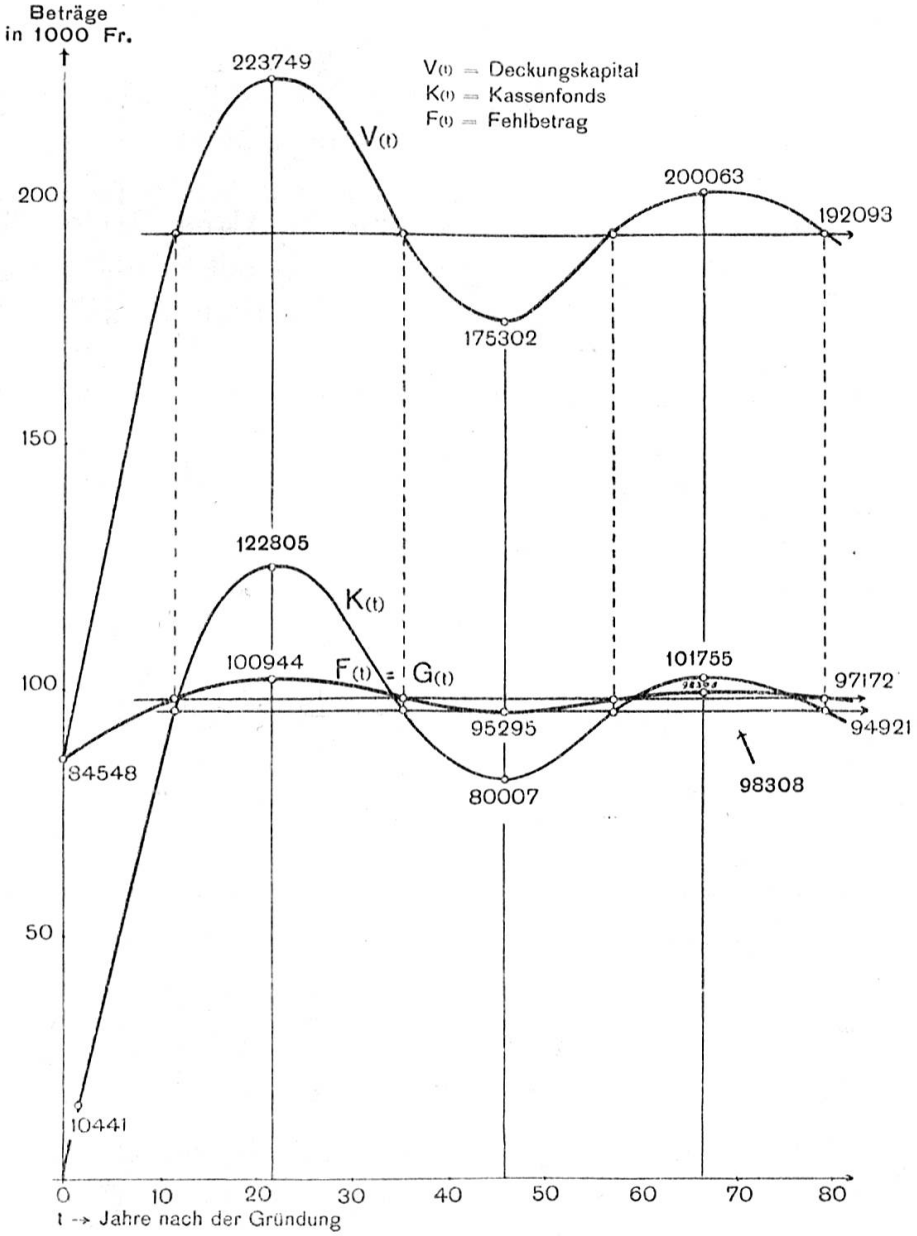
Figur 3 veranschaulicht uns in klarer Weise, welche Aufgabe dem Fehlbetrag, der ja mit dem Eintrittsgewinn in jedem Zeitpunkt übereinstimmt, zufällt. Alle drei Kurven schwingen in gleichen Zeitabschnitten um ihre entsprechenden Mittellagen herum, d. h. ihre Maxima und Minima fallen zeitlich zusammen. Einzig die Amplituden dieser Schwingungen sind verschieden, bezogen auf die Mittellagen. Es ist nun leicht zu erkennen, und es liegt in der Natur der Sache, dass sich die Amplituden von $K(t)$ und $F(t)$ in der Weise ergänzen, dass ihre Summe gleich der Amplitude von $V(t)$ wird. Mit andern Worten, die Darstellung zeigt deutlich, dass der Fehlbetrag $F(t)$ den Kassenfonds $K(t)$ jederzeit zum Deckungskapital $V(t)$ ergänzt. Wir haben dies bereits in der Beziehung (19) festgelegt.

Die Resultate unserer Ausrechnungen zeigen, dass unsere Ableitungen in der Praxis wohl gehandhabt werden können.

Schlussfolgerungen.

Wir hatten uns eingangs zur Aufgabe gestellt, bei einer Versicherungskasse die Frage zu untersuchen: Wie verhalten sich Eintrittsgewinn (-verlust) und Fehlbetrag bei der Bilanz der Kasse und was für ein Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Begriffen? Gestützt auf die gefundenen Resultate, die durch unsere

3. Bilanzen.



Figur 3.

Ausrechnungen bestätigt wurden, können wir schlussendlich folgendes festlegen:

1. Der Posten Eintrittsgewinn oder -verlust gehört zur Bilanz der offenen Kasse, sobald wir mit einer Durchschnittsprämie rechnen, die von der Prämie der Neueintretenden abweicht.

2. Der Eintrittsgewinn bleibt nicht etwa konstant, sondern macht alle Schwankungen der andern Bilanzposten mit. Er bewegt sich also in einer Wellenlinie um eine feste Lage herum, die durch den Beharrungszustand gegeben ist.

3. Fehlbetrag und Eintrittsgewinn stimmen während der ganzen Versicherungsdauer miteinander überein.

Literaturverzeichnis.

1. *Rebstein:* Bericht über den Stand der Witwen- und Waisenkasse der Lehrerschaft des eidgenössischen Polytechnikums am 31. Dezember 1905. (Zürich 1906.)
2. *Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21, Bern 1926.)
3. *Moser:* Untersuchungen und Materialien zu den 6 Entwürfen für eine Hilfskasse des eidgenössischen Personals. (Bern 1901.)
4. *Schaertlin:* Die Abfindung für austretende Mitglieder bei Kassen mit Durchschnittsprämien. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 6, Bern 1911.)
5. *Friedli:* Das Finanzsystem der eidgenössischen Alters- und Hinterlassenenversicherung. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 25, Bern 1930.)
6. *Riethmann:* Abschätzung des Gewinnes durch Neueintritte bei Pensionskassen. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 8, Bern 1913.)
7. *Friedli:* Versicherungstechnische Rechnungsgrundlagen für Hilfskassen. Bern 1929.
8. *Zwinggi:* Das Problem der Erneuerung.
9. *Wyss:* Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungkasse. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 24, Bern 1929.)
10. *Landré:* Lebensversicherung.
11. *Jörgensen:* Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung.
12. *Friedli:* Vorlesung «Versicherungstechnische Fondsprüfungen», Sommersemester 1929.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 129

Grundbegriffe bei einer offenen Kasse 130

Zusammenhang mit den modernen Gebieten der Integralgleichungen für sich erneuernde Kassen 131

Prämie der offenen Kasse 134

Der Eintrittsgewinn 143

Bilanz 157

Risikoprämie und Sparprämie 160

Beharrungszustand 165

Grundlagen der Ausrechnungen und Darstellung der Resultate 169

Schlussfolgerungen 181

Literaturnachweis 184