Analytische Auswertung des Kingschen Glättungsprinzipes

Autor(en): **Ruchti, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **37 (1939)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550944

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Analytische Auswertung des Kingschen Glättungsprinzipes

Von *Werner Ruchti,* Bern

Da sich einfache analytische Funktionen zur Wiedergabe langer Reihen von Experimentalwerten selten eignen, bedient man sich häufig zur Beseitigung der zufälligen Fehler mechanischer Glättungsverfahren. Als solches ist dasjenige von King bekannt und oft verwendet. Es besteht aus zwei Schritten, der Ausgleichung von isolierten Kardinalpunkten — üblicherweise in Abständen von je 5 Argumenteinheiten — und der oskulatorischen Interpolation. Zwischen die isolierten Punkte werden nämlich durch Differenzenaufteilung Parabelstücke dritter Ordnung so eingeflochten, dass sie sich bei den Treffstellen tangieren. Obschon die Krümmungsbedingung unberücksichtigt bleibt, pflegt man diese Art von Interpolation oskulatorisch zu nennen. Da man nicht von den Gleichungen, sondern von den Differenzen aus zu den Parabeln gelangt, muss die Methode unter die mechanischen eingereiht werden, wenn auch dasselbe Ergebnis ebensogut ein analytisches Gewand tragen könnte.

Es mag hier erwähnt werden, dass bei der Ausgleichung der schweizerischen Sterbetafeln das Kingsche Verfahren das analytische Gesetz von Makeham verdrängt hat, da es eine bessere Anpassung an die beobachteten Werte ermöglichte.

Neben dem Nachteil seltener Anwendbarkeit bieten aber analytische Methoden unter anderem den Vorteil, dass sie das Ergebnis in der konzentrierten Form einer Funktionalgleichung repräsentieren. Das kommt dann vorteilhaft zur Geltung, wenn auf die gefundene Zahlenreihe gewisse Operationen wie Integrationen und Differentiationen auszuführen sind. Diese Prozesse lassen sich bequem an der Ersatzfunktion vollziehen, ehe man zu den Zahlenwerten übergeht. Bei mechanisch geglätteten Wertereihen muss man sich dagegen mit mühsamen numerischen Näherungsverfahren abfinden. In gewissen Fällen verdient also gegenüber einer mechanischen Glättung eine gleichwertige analytische Ausgleichung den Vorzug.

Das Kingsche Glättungsprinzip lässt sich ohne Vergrösserung der Rechenarbeit in die analytische Sprache übersetzen. Das Ergebnis ist nicht eine einzige Ersatzfunktion, sondern mehrere solche, von denen jede in einem bestimmten Ausschnitt Gültigkeit hat und deren Kurven stetig und tangierend aneinanderschliessen. Soll aber ein solches Gebilde praktischen Wert haben, so darf der Gültigkeitsbereich der einzelnen Funktion nicht allzu beschränkt sein. Es kann sich also nicht um eine Beibehaltung der Fünferintervalle handeln.

Der Gedanke dieser teilweisen analytischen Ausgleichung ist nicht neu. Dr. J. P. Gram hat im 10. Heft der Mitteilungen dieser Frage einen Beitrag gewidmet [1]). Er schlug vor, die einzelnen Parabeln nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Auf diese Weise wird ein Ergänzungsverfahren nötig, um bei den Übergangsstellen die unvermeidlichen Unstetigkeiten zu mildern. Auf die kontinuierliche Veränderung der Tangentenrichtung kann jedoch nicht geachtet werden.

Es soll hier eine andere Lösungsmöglichkeit für dieselbe Frage vorgeschlagen werden. Gemäss dem Kingschen Prinzip stellt man an die Parabeln nicht die Minimumbedingung für die Fehlerquadrate, sondern man verlangt von ihnen — es soll sich um Kurven dritter Ordnung handeln —, dass sie mit gegebenen Richtungsgrössen durch zwei ebenfalls gegebene Punkte gehen sollen.

Der erste Teil der Aufgabe besteht also in der Ermittlung der Kardinalpunkte. Diese können nach der üblichen Methode hergeleitet werden. Aus der Reihe der 15 Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_{14}$ wird das Zentralglied y_7 durch folgende Operation ausgeglichen:

$$(1) \qquad f(7) = \frac{1}{5} \Delta Y_0 + \frac{1}{5} \Delta^2 Y_0 - \frac{1}{125} \Delta^3 Y_0 \quad [2])$$

wobei $Y_x = \sum_0^x y_x$ bedeutet. Die Differenzen Δ sind auf die Fünferintervalle 0, 5, 10, 15 bezogen.

---

[1]) J. P. Gram: Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versich.-Math., Heft 10.

[2]) Dr. Johanna Simonett: Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King. Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versich.-Math., Heft 28.

Die Kardinalpunkte können aber auch nach irgendeiner anderen Methode bestimmt werden. Ihre Abstände sind beliebig, im Gegensatz zum mechanischen Verfahren nicht notwendigerweise unter sich gleich. Liegt jedoch kein besonderer Grund zum Gegenteil vor, so wird man die Äquidistanz am besten beibehalten. Bei einem Versuch wurde mit Zehnerintervallen ein voller Erfolg erzielt.

Nach irgendeinem Verfahren — es gibt deren mehrere — bestimmt man sodann bei jedem Kardinalpunkt die erste Ableitung der gesuchten Funktion. Hier ist zu bemerken, dass bei der Kingschen Methode diese Richtungsgrössen aus der sehr einfachen Annahme gewonnen werden, dass immer drei aufeinanderfolgende Kardinalpunkte auf einer quadratischen Parabel liegen mögen. Diese Parabel bestimmt die Kurvenrichtung beim mittleren Kardinalpunkt. Da jedoch in der Umgebung von Wendepunkten diese Annahme ungenügend ist, versagt dort das Kingsche Verfahren in der Regel. Es ist aber leicht möglich — und infolge der grösseren Intervallänge auch wünschenswert —, diese Differentialquotienten etwas genauer festzulegen.

Das Ergebnis dieses ersten Schrittes ist ein System von Funktionswerten $f(x)$ und von Richtungskoeffizienten $f'(x)$. Sei $f(0)$ ein beliebiger davon und $f(d)$ der nächstfolgende. Es soll die kubische Parabel gefunden werden, die der Bedingung $(f(0), f'(0); f(d), f'(d))$ genügt. Sie heisst

$$(2) \quad f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \{\,3\,(f(d) - f(0)) - d f'(d) - 2\,d f'(0)\,\}\,\frac{x^2}{d^2} - \\ - \{\,2\,(f(d) - f(0)) - d f'(d) - d f'(0)\,\}\,\frac{x^3}{d^3}$$

Die Parabelgleichung (2) führt zu einer oskulatorischen Interpolation der einzelnen Intervalle, wenn man den Koordinatenursprung von Kardinalpunkt zu Kardinalpunkt verlegt. Die Rückführung auf einen einheitlichen Ursprung ist ohne weiteres möglich, jedoch nicht erforderlich.

Ist es möglich, an den Enden der Zahlenreihe genaue Funktionswerte und Ableitungen zu bestimmen, so kann die ganze Verteilung nach demselben Verfahren ausgeglichen werden. Die Ermittlung der Richtungskoeffizienten wird hier jedoch auf Schwierigkeiten stossen. Sie ist zudem auch nicht erforderlich. Man kann sich so behelfen,

dass man die beiden Enden durch Parabeln ergänzt, die nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzufinden sind. Zwei Bedingungsgleichungen für die Parameter müssen zur Erhaltung von Funktionswert und Richtung im Ansatzpunkt reserviert werden.

Die nach (2) vollzogene Ausgleichung besitzt jeden Vorteil des Kingschen Glättungsverfahrens; sie ist überhaupt nichts anderes. Überdies liefert sie aber, ohne jegliche Mehrarbeit, eine Folge von analytischen Ausdrücken, die das Resultat verkörpern. Bedeutet das Vorhandensein dieser Gleichungen eine Erleichterung für die Ausbeutung der Zahlenreihe, so hat dadurch die vorgeschlagene Methode ihre Rechtfertigung erfahren. Für Operationen, die keine Differentialquotienten von höherer als der ersten Ordnung enthalten, ist die Stetigkeit durchwegs gesichert. Die Aufgabe der Fünferintervalle zugunsten grösserer Abstände beeinträchtigt überdies die Güte des Resultates nicht. Tatsächlich weist die ausgeglichene Zahlenreihe, bei Zuhilfenahme dieser kleinen Intervalle, noch ein bedenkliches Mass von Schwankungen und Wendepunkten auf.