Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **40 (1940)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-554976

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung.

Von *H. Hadwiger,* Bern.

1. Wir betrachten eine Gesamtheit $\mathfrak{A}$ von Individuen (Personen, biologische Organismen, Artikel eines Lagers u. dgl.). Der Gesamtheit neu angeschlossen werden nur gleichartige Individuen, die irgendeiner Ursache (Todesfall, Unbrauchbarwerden usw.) zufolge zufallsartig wieder ausscheiden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein der Gesamtheit neu angegliedertes Individuum nach einer zwischen x und $x + dx$ gelegenen Zeit aus $\mathfrak{A}$ ausscheidet, sei

$$\Phi(x)\, dx.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\Phi(x)$ heisst *Ausscheidefunktion.* Offenbar gilt

$$\int_0^\infty \Phi(x)\, dx = 1\,. \tag{1}$$

Die mittlere Verweilszeit eines Individuums bei der Gesamtheit ist

$$\int_0^\infty \Phi(x)\, x\, dx = T\,. \tag{2}$$

Unter der *Verweilswahrscheinlichkeit* $p(t)$ wird die Wahrscheinlichkeit dafür verstanden, dass ein Individuum mindestens t Zeiteinheiten der Gesamtheit angehört. Diese Wahrscheinlichkeit kann durch die Ausscheidefunktion dargestellt werden.

Es ist

$$p(t) = 1 - \int_0^t \Phi(x)\, dx\,. \tag{3}$$

Soll das Ausscheiden von Individuen wieder durch Neuzugänge so kompensiert werden, dass der Umfang von $\mathfrak{A}$ konstant bleibt, so ist die *Erneuerungsintensität* $\varphi(x)$ die Lösung der bekannten Integralgleichung [1])

$$1 = p(t) + \int_0^t p(t-x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Wird die Gleichung (4) nach der Veränderlichen t abgeleitet, so folgt unter Berücksichtigung der aus (3) hervorgehenden Relation

$$p'(t) = -\Phi(t)$$

die äquivalente Integralgleichung

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \int_0^t \Phi(t-x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{5}$$

in welche die Ausscheidefunktion eingeht.

2. Im folgenden entwickeln wir eine Überlegung, die zu einer Funktionalgleichung für Ausscheidefunktionen führen wird. Es handelt sich dabei um die formelmässig gefasste Konsequenz, die sich aus einer postulierten universellen Eignung, Ausscheidefunktion für irgendwelche Gesamtheit zu sein, ergibt.

Lösungen der erwähnten Funktionalgleichung werden wir «natürliche Ausscheidefunktionen» nennen, um die charakteristische Auszeichnung, einer natürlichen Forderung zu genügen, anzudeuten.

Die Hypothese, von der wir ausgehen, besteht darin, dass alle Ausscheidefunktionen normaler Gesamtheiten als zu einer Parameterklasse gehörend vorausgesetzt werden. Es gibt also nach dieser Hypothese eine universell gültige Ausscheidefunktion, und die Anpassung an eine individuell vorgesehene Gesamtheit erfolgt durch Festlegung eines Parameters [2]).

---

[1]) *E. Zwinggi*, Das Problem der Erneuerung, Festgabe Moser, Bern 1931. Literaturverzeichnis S. 161/162.

[2]) Es soll darauf hingewiesen werden, dass z. B. bei Ableitungen von Fehlergesetzen die Hypothese, dass ein Gesetz universeller Gültigkeit überhaupt existiert, geradezu entscheidend ist, ohne dass das speziell beachtet wird. Wird andererseits dieser Gesichtspunkt in den Vordergrund der Betrachtung gerückt, so kann durch zweckmässige Verwertung der erwähnten Hypothese eine Herleitung des Fehlergesetzes ermöglicht werden. Vgl. *G. Pólya*, Math. Zeitschrift 18 (1923), S. 96—108.

Um die Abhängigkeit von diesem Parameter sichtbar zu machen, schreiben wir die Ausscheidefunktion in der Form

$$\Phi(A, x), \quad A > 0. \tag{6}$$

Zur weiteren mathematischen Präzisierung verlangen wir noch:

(6′) $\Phi(A, x)$ ist eine analytische Funktion der Veränderlichen und ebenso des Parameters.

$$\int_0^\infty \Phi(A, x)\, dx = 1 \text{ für alle } A > 0. \tag{6''}$$

Es sollen nun zwei Gesamtheiten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, denen die Ausscheidefunktionen

$$\Phi(A, x) \text{ und } \Phi(B, x)$$

zugeordnet sind, gekoppelt werden. Die in die Gesamtheit $\mathfrak{B}$ eintretenden Individuen sind genau diejenigen, die aus der Gesamtheit $\mathfrak{A}$ ausscheiden. Die in $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Individuen bilden nun eine neue Gesamtheit $\mathfrak{C}$, die durch die Koppelung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, symbolisch

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

entsteht. Die zu der Gesamtheit $\mathfrak{C}$ gehörende Ausscheidefunktion sei $\Phi(C, x)$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Individuum nach Ablauf einer zwischen ξ und $\xi + d\xi$ gelegenen Zeit aus $\mathfrak{A}$, ferner nach einer zwischen $t - \xi$ und $t - \xi + dt$ gelegenen Zeit aus $\mathfrak{B}$ ausscheidet, ist offenbar

$$\Phi(A, \xi)\, \Phi(B, t - \xi)\, d\xi\, dt.$$

Hieraus erhält man als Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum nach einer zwischen t und $t + dt$ gelegenen Zeit aus $\mathfrak{C}$ ausscheidet

$$\int_0^t \Phi(A, \xi)\, \Phi(B, t - \xi)\, d\xi\, dt.$$

Die gleiche Wahrscheinlichkeit ist aber auch gegeben durch

$$\Phi(C, t)\, dt.$$

Nach Gleichsetzung ergibt sich die Funktionalgleichung

$$\Phi(C, t) = \int_0^t \Phi(A, \xi)\, \Phi(B, t-\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Hierbei ist C eine nicht näher bestimmte Funktion von A und B. Eine Funktion (6), (6′), (6″), welche innerhalb ihrer Parameterklasse der Funktionalrelation (7) genügt, nennen wir «*natürliche Ausscheidefunktion*».

3. Durch Wahl eines speziellen Kompositionsgesetzes für die Parameter gewinnen wir aus (7) speziellere Funktionalgleichungen. Wir betrachten nun ein ganz besonders einfaches Kompositionsgesetz. Es gelte

$$C = A + B, \tag{8}$$

Aus (7) ergibt sich das transzendente Additionstheorem

$$\Phi(A + B, t) = \int_0^t \Phi(A, \xi)\, \Phi(B, t-\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Eine Lösung dieser Funktionalgleichung ist wohlbekannt [1]). Sie lautet:

$$\Phi(A, x) = \frac{A}{\sqrt{\pi x^3}}\, e^{2aA - \frac{A^2}{x} - a^2 x}. \tag{10}$$

Man bestätigt leicht, dass die Bedingungen (6′) und (6″) erfüllt sind, so dass also durch (10) eine natürliche Ausscheidefunktion gegeben ist.

Die Funktion zeigt den in nachstehender Figur dargestellten Verlauf (Parameter: $A = 1, a = 1$) (siehe nachfolgende Seite).

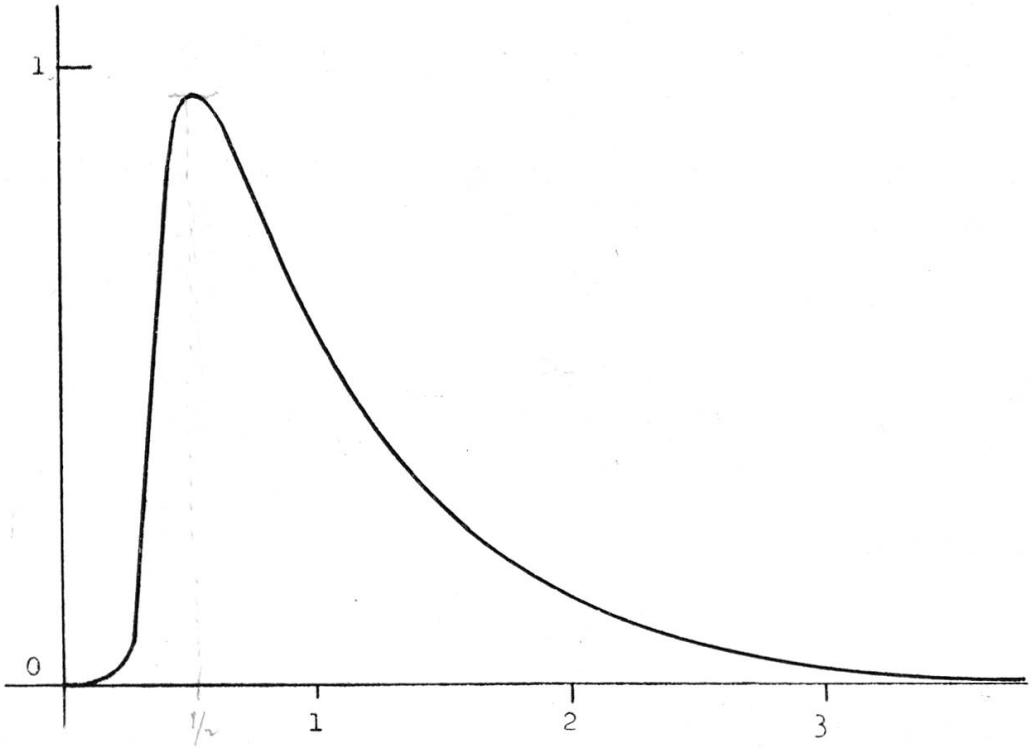
Sie erreicht bei

$$x_0 = \frac{\sqrt{9 + 16a^2 A^2} - 3}{4a^2} \tag{11}$$

den maximalen Wert.

---

[1]) *G. Doetsch*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, J. Springer, 1937, S. 306 (1).



4. Wir zeigen nun, dass die Erneuerungsgleichung (5) für die abgeleitete Ausscheidefunktion (10) mühelos gelöst werden kann, ein besonders glücklicher Umstand, der zu beachten ist. Die Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(t) = \Phi(A, t) + \int_0^t \Phi(A, t - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{12}$$

ist nämlich gegeben durch

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(nA, x)\,, \tag{13}$$

oder also durch

$$\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{\pi x^3}}\, e^{-a^2 x} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2naA - \frac{n^2 A^2}{x}}\,. \tag{14}$$

Die angesetzte Reihe (14) konvergiert in jedem endlichen Intervall gleichmässig. Dass die dargestellte Funktion eine Lösung der Gleichung (12) ist, kann mit Rücksicht auf die sich aus dem Additionstheorem (9) ergebende Faltungsrelation

$$\int_0^t \Phi(A, t-\xi)\, \Phi(nA, \xi)\, d\xi = \Phi(A + nA, t)$$

ohne Mühe verifiziert werden. Integration und Summation dürfen wegen der gleichmässigen Konvergenz vertauscht werden.

5. Für die Verweilswahrscheinlichkeit $p(t)$ ergibt sich nach (3)

$$p(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{2aA - \frac{A^2}{x} - a^2 x} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}, \tag{15}$$

oder nach der Substitution

$$x = \frac{A^2}{z^2}$$

die Darstellung

$$p(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{t}}} e^{2aA - z^2 - \frac{a^2 A^2}{z^2}}\, dz. \tag{16}$$

Für $a > 0$ ist die *mittlere Verweilszeit*

$$\bar{x} = \int_0^\infty x\, \Phi(x)\, dx \tag{17}$$

endlich, das heisst, das Integral in (17) ist konvergent. Durch die Substitution

$$x = \frac{A^2}{z^2}$$

wird es auf die Form gebracht

$$\bar{x} = \frac{2A^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{2aA - z^2 - \frac{a^2 A^2}{z^2}} \frac{dz}{z^2}.$$

Das bestimmte Integral kann ermittelt werden, und es resultiert

$$\bar{x} = \frac{A}{a}. \tag{18}$$

Wir wenden uns noch dem Verhalten der Erneuerungsfunktion (14) für grosse x zu. Es gilt die asymptotische Relation

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \frac{a}{A}. \tag{19}$$

In dem besonderen Fall $a = 0$ ist

$$p(t) = \theta\left(\frac{A}{\sqrt{t}}\right), \tag{20}$$

wo wir das Symbol für die *Gaußsche Transzendente*

$$\theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-z^2} dz$$

benutzt haben. Die zugehörende Erneuerungsfunktion ist

$$\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{\pi x^3}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2 A^2}{x}}. \tag{21}$$

Nach (19) gilt

$$\lim_{x \to \infty} x\, \varphi(x) = 0. \tag{22}$$

6. Die Funktion (10) ergibt sich als Lösung der Funktionalgleichung (9) leicht, wenn man den Faltungssatz aus der Theorie der Laplace-Transformation heranzieht.

Mit Rücksicht darauf, dass der Eigenschaft unserer Ausscheidefunktion, Lösung der Funktionalgleichung zu sein, in unserer Entwicklung zentrale Bedeutung zukommt, soll hier noch eine direkte Verifikation angeschlossen werden.

Zunächst ergibt sich für das Integral

$$J = \int_0^t \Phi(A, \xi)\, \Phi(B, t-\xi)\, d\xi$$

der Ausdruck

$$J = \frac{AB}{\pi}\, e^{2a(A+B)-a^2t} \int_0^t e^{-\left(\frac{A^2}{\xi}+\frac{B^2}{t-\xi}\right)} \frac{d\xi}{\sqrt{(t-\xi)^3\,\xi^3}}\,.$$

Durch die Substitution

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{t-\xi}}\,,\quad \xi = \frac{t\,x^2}{1+x^2}\,,\quad t-\xi = \frac{t}{1+x^2}$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(t-\xi)^3\,\xi^3}} = \frac{2}{t^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$$

wird er übergeführt in

$$J = \frac{2AB}{\pi\, t^2}\, e^{2a(A+B)-a^2t} \int_0^\infty e^{-\left\{\frac{A^2}{t}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)+\frac{B^2}{t}(1+x^2)\right\}} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$$

oder

$$J = \frac{2AB}{\pi\, t^2}\, e^{2a(A+B)-\left(\frac{A^2+B^2}{t}+a^2t\right)} \int_0^\infty e^{-\left\{\frac{A^2}{t\,x^2}+\frac{B^2x^2}{t}\right\}} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx\,.$$

Ersetzen wir im Integral

$$\omega(p, q) = \int_0^\infty e^{-\left(px^2+\frac{q}{x^2}\right)}\, dx$$

x durch $\frac{1}{x}$ und vertauschen die Parameterbezeichnungen, so erhalten wir

$$\omega(q, p) = \int_0^\infty e^{-\left(p x^2 + \frac{q}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2}.$$

So erreichen wir die Darstellung

$$J = \frac{2AB}{\pi t 2} e^{2a(A+B) - \left(\frac{A^2+B^2}{t} + a^2 t\right)} \left\{ \omega\left(\frac{B^2}{t}, \frac{A^2}{t}\right) + \omega\left(\frac{A^2}{t}, \frac{B^2}{t}\right) \right\}.$$

Nun verwenden wir den bekannten Integralwert[1])

$$\omega(p, q) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-2\sqrt{pq}}$$

und erhalten so

$$J = \frac{A + B}{\sqrt{\pi t^3}} e^{2a(A+B) - \frac{(A+B)^2}{t} - a^2 t},$$

also

$$J = \Phi(A + B, t),$$

was zu beweisen war.

---

[1]) Vgl. etwa: *S. Bochner*, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig 1932, S. 57, Formel (12).