Ein transzendentes Additionstheorem und die Neumannsche Reihe

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **42 (1942)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966909

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ein transzendentes Additionstheorem und die Neumannsche Reihe.

Von *H. Hadwiger*, Bern.

Die Lösung $F(x)$ der Volterraschen Integralgleichung

$$F(x) - \lambda \int_0^x \Phi(x-\xi)\, F(\xi)\, d\xi = G(x) \tag{1}$$

kann nach einem bekannten Theorem der klassischen Theorie durch

$$F(x) = G(x) + \int_0^x \Psi(x-\xi)\, G(\xi)\, d\xi \tag{2}$$

dargestellt werden, wo der «lösende Kern»

$$\Psi(x) = \Psi(x, \lambda) \tag{3}$$

in die *Neumannsche Reihe*

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(x) \tag{4}$$

entwickelt werden kann. Die Reihe (4) konvergiert in jedem endlichen Intervall $0 \leqq x \leqq a$ gleichmässig, falls der Kern der Integralgleichung (1) im gleichen Intervall beschränkt ist. Die in der Entwicklung (4) auftretenden «iterierten Kerne»

$$\Phi_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

sind durch die Integralrekursion

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \Phi(x) \\ \Phi_n(x) &= \int_0^x \Phi_{n-1}(x-\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{aligned} \tag{6}$$

gegeben.

Die Berechnung der Lösung der Integralgleichung mit Hilfe der Neumannschen Reihe fand in der mathematischen Praxis der Versicherungswissenschaften und Statistik, wo derartige Faltungsgleichungen sehr häufig auftreten (Erneuerung von Gesamtheiten, Bevölkerungstheorie, Vererbung u. a.) wenig Verwendung. Dies ist wohl zum Teil darauf zurückzuführen, dass die iterierten Kerne als mehrfache Integrale in der Regel nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen dargestellt werden können; wo dies der Fall ist, führt die mehrfache Integration in vielen Fällen auf unübersichtliche Ausdrücke.

Die vorliegende Arbeit ist der Aufgabe gewidmet, Kernfunktionen aufzufinden, die die Eigenschaft haben, dass sich alle durch die Faltungsrelationen (6) ergebenden iterierten Kerne in einfacher, geschlossener Form elementar darstellen lassen. Dies ist dann der Fall, wenn die Funktion (5) vom Parameter n und der Veränderlichen x so elementar abhängig ist, dass die Funktionalgleichung

$$\Phi_{n+m}(x) = \int_0^x \Phi_n(x-\xi)\,\Phi_m(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

erfüllt ist. Wir erweitern das durch die oben ausgesprochene Forderung gestellte Problem dadurch, dass wir weiter einen kontinuierlichen positiven Parameter A in Betracht ziehen, der sich bei der Faltung, das heisst bei der in (7) auftretenden Integralbildung, additiv verhält. So tritt an die Stelle von (7) die allgemeinere Funktionalgleichung

$$\Phi_{n+m}(x, A+B) = \int_0^x \Phi_n(x-\xi, A)\,\Phi_m(\xi, B)\,d\xi. \tag{8}$$

Diese Relation stellt ein gleichzeitig für zwei Parameter ausgesprochenes transzendentes Additionstheorem dar.

Wir gelangen nun zu der exakten Formulierung der gestellten Aufgabe: Gesucht werden Funktionen

$$\Phi_n(x, A) \tag{9}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(*a*) Die Funktion (9) ist für die Veränderliche $x > 0$ und für die Parameter $A > 0$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ definiert.

(*b*) Die Funktion (9) ist in jedem endlichen Intervall $0 < a \leqq x \leqq b$ eigentlich integrierbar, und in $0 \leqq x \leqq a$ absolut (eventuell uneigentlich) integrierbar.

(*c*) Es gibt eine reelle Zahl ω, so dass das Laplace-Integral

$$\varphi_n(z, A) = \int_0^\infty e^{-zx}\, \Phi_n(x, A)\, dx$$

in der Halbebene $R[z] \geqq \omega$ absolut konvergiert.

(*d*) Die Funktion (9) ist eine Lösung der Funktionalgleichung (8).

Nach einem bekannten Satz über die Stetigkeit der Faltung [1]*) folgt leicht, dass eine Lösung (9) für $x > 0$ und $n \geqq 2$ eine stetige Funktion sein muss. Von entscheidender Bedeutung für die Herleitung derartiger Lösungen ist der folgende Sachverhalt:

Eine für $x > 0$ und $n \geqq 2$ stetige Funktion (9), die den drei Voraussetzungen (*a*), (*b*), (*c*) genügt, ist dann eine Lösung des Problems, das heisst genügt dann der wesentlichen Forderung (*d*), wenn die Laplace-Transformierte

$$\varphi_n(z, A) = L\{\Phi_n(x, A);\ z\} \tag{10}$$

die Form

$$\varphi_n(z, A) = [\psi(z)]^n\, [\chi(z)]^A \tag{11}$$

annimmt.

In der Tat folgt aus

$$L\{\Phi_n(x, A); z\}\, L\{\Phi_m(x, B); z\} = L\{\Phi_{n+m}(x, A + B); z\}$$

auf Grund des Faltungssatzes [2]) der Theorie der Laplace-Transformation für $x > 0$

$$\Phi_n(x, A) * \Phi_m(x, B) = \Phi_{n+m}(x, A + B). \tag{12}$$

*) Die kleinen Zahlen beziehen sich auf die am Schlusse der Arbeit angebrachten Anmerkungen.

Dabei wurde noch berücksichtigt, dass die rechtsstehende Funktion in (12) im Hinblick auf die Voraussetzung stetig ist, da jedenfalls $n + m \geqq 2$ ist. (12) ist aber die mit Hilfe der Faltungssymbolik dargestellte Integralrelation (8).

Es lassen sich also Lösungen der gestellten Aufgabe auf die Weise gewinnen, dass man geeignete Funktionen

$$\psi(z) \text{ und } \chi(z)$$

wählt, und dann die zu der Resultatfunktion (11) gehörende Objektfunktion (9) aufsucht, symbolisch:

$$\Phi_n(x, A) = L^{-1}\{[\psi(z)]^n [\chi(z)]^A; x\}. \tag{13}$$

Es ist nun aber nicht etwa so, dass man nach diesem Schema sozusagen mechanisch beliebig Lösungen herstellen kann. Einmal muss bei der Wahl der Funktionen auf die Existenz der Objektfunktion geachtet werden. Diese Bedingung wirkt sich in dem hier vorliegenden Falle in ziemlich delikater Weise aus. Dies wird verständlicher, wenn man bedenkt, dass die charakteristischen Bedingungen dafür, dass eine analytische Funktion als Laplace-Transformierte interpretiert werden kann, in der allgemeinen Theorie noch nicht angegeben werden konnten. Dann muss daran erinnert werden, dass durch die Existenz einer Objektfunktion (9) noch nicht eine Lösung in dem hier angestrebten Sinne sichergestellt ist. Es wird ja grundsätzlich die elementare Darstellbarkeit gefordert.

Wir stellen nun im folgenden eine Anzahl von Lösungen der Funktionalgleichung (8) tabellenmässig zusammen.

In Tabelle I sind die Funktionen $\Psi(z)$ und $\chi(z)$ eingetragen, die auf Grund von (11) bzw. (13) zu den in Tabelle II aufgeführten und entsprechend numerierten Lösungen führen.

Es würde zu weit führen, die zu den Verifikationen gehörenden Rechnungen einzeln vorzutragen. Da es sich darum handelt, nachzuprüfen, ob die Laplace-Transformierten der eingetragenen Lösungen $\Phi_n(x, A)$ tatsächlich auf die Form (11) gebracht werden können, begnügen wir uns damit, dass wir in den beigefügten Anmerkungen auf Literaturstellen hinweisen, wo man einige zur Rechnung erforderlichen Transformationsformeln finden kann.

Derartige Hinweise werden wir in den Anmerkungen durch die Kurzbezeichnung LT. (Laplace-Transformation) einleiten.

Für die drei, allen Lösungen gemeinsamen Parameter

A, n und a gilt: $A > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $-\infty < a < \infty$.

Wo weitere Parameter auftreten, ist der Gültigkeitsbereich in der ganz rechts stehenden Kolonne der Tabelle angegeben. Dort befinden sich auch Anmerkungsnummern.

Tabelle I.

N	$\psi(z)$	$\chi(z)$	
1	1	$\frac{1}{a+z}$	
2	$1-\frac{1}{a+z}$	$\frac{1}{a+z}$	
3	$1+c\left(\frac{1}{a+z}\right)^{\beta}$	$\frac{1}{a+z}$	$\beta \geqq 0$ $-\infty < c < \infty$
4	1	$e^{-2\sqrt{a+z}}$	
5	1	$\frac{4c}{(a+z)^2-4c^2}$	$c > 0$
6	1	$\frac{4c}{(a+z)^2+4c^2}$	$c > 0$
7	$-\sqrt{a+z}$	$e^{-\sqrt{a+z}}$	

N	$\psi(z)$	$\chi(z)$	
8	$\left(\frac{2a+2z-1}{2a+2z+1}\right)^{\beta}$	$\frac{4}{4(a+z)^2-1}$	$\beta \geqq 0$
9	$1-e^{\frac{c}{a+z}}$	$\frac{1}{a+z}$	$c>0$
10	$1-e^{-\frac{c}{a+z}}$	$\frac{1}{a+z}$	$c>0$
11	$e^{\frac{c}{a+z}}$	$\frac{1}{a+z}$	$c>0$
12	$e^{-\frac{c}{a+z}}$	$\frac{1}{a+z}$	$c>0$
13	1	$\frac{2c}{a+z+\sqrt{(a+z)^2-4c^2}}$	$c>0$
14	1	$\frac{2c}{a+z+\sqrt{(a+z)^2+4c^2}}$	$c>0$
15	$e^{-\beta\sqrt{(a+z)^2-4c^2}}$	$\frac{2c}{a+z+\sqrt{(a+z)^2-4c^2}}$	$\beta \geqq 0$ $c>0$
16	$e^{-\beta\sqrt{(a+z)^2+4c^2}}$	$\frac{2c}{a+z+\sqrt{(a+z)^2+4c^2}}$	$\beta \geqq 0$ $c>0$

Tabelle II.

N	$\Phi_n(x, A)$		
1	$\frac{1}{\Gamma(A)} e^{-ax} x^{A-1}$		[3]
2	$\frac{n!}{\Gamma(A+n)} e^{-ax} x^{A-1} L_n^{(A-1)}(x)$		[4]
3	$e^{-ax} x^{A-1} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{C^\nu}{\Gamma(\beta\nu + A)} x^{\beta\nu}$	$\beta \geqq 0$ $-\infty < c < \infty$	[5]
4	$\frac{A}{\sqrt{\pi x^3}} e^{-\frac{A^2}{x} - ax}$		[6]
5	$\frac{2\sqrt{\pi c}}{\Gamma(A)} e^{-ax} x^{A-\frac{1}{2}} I_{A-\frac{1}{2}}(2cx)$	$c > 0$	[7]
6	$\frac{2\sqrt{\pi c}}{\Gamma(A)} e^{-ax} x^{A-\frac{1}{2}} J_{A-\frac{1}{2}}(2cx)$	$c > 0$	[8]
7	$-\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{n+1} H_{n+1}\left(\frac{A}{2\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{A^2}{4x} - ax}$		[9]
8	$\frac{1}{\Gamma(2A)} e^{-ax} x^{A-1} M_{n\beta,\, A-\frac{1}{2}}(x)$	$\beta \geqq 0$	[10]
9	$e^{-ax} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \left(\frac{x}{\nu c}\right)^{\frac{A-1}{2}} I_{A-1}\left(2\sqrt{\nu c x}\right)$	$c > 0$	[11]
10	$e^{-ax} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \left(\frac{x}{\nu c}\right)^{\frac{A-1}{2}} J_{A-1}\left(2\sqrt{\nu c x}\right)$	$c > 0$	[12]

N	$\Phi_n(x, A)$	
11	$e^{-ax}\left(\frac{x}{nc}\right)^{\frac{A-1}{2}} I_{A-1}\left(2\sqrt{ncx}\right)$	$c > 0$ [13])
12	$e^{-ax}\left(\frac{x}{nc}\right)^{\frac{A-1}{2}} J_{A-1}\left(2\sqrt{ncx}\right)$	$c > 0$ [14])
13	$\frac{A}{x} e^{-ax} I_A(2cx)$	$c > 0$ [15])
14	$\frac{A}{x} e^{-ax} J_A(2cx)$	$c > 0$ [16])
15	$\frac{e^{-ax}}{x+n\beta}\left\{A\, U_A(x) + 2nc\beta\, U_{A-1}(x)\right\}$ $U_A(x) = \left(\frac{x-n\beta}{x+n\beta}\right)^{\frac{A}{2}} I_A\left(2c\sqrt{x^2-n^2\beta^2}\right)$	$\beta \geqq 0$ $c > 0$ [17])
16	$\frac{e^{-ax}}{\alpha+n\beta}\left\{A\, V_A(x) + 2nc\beta V_{A-1}(x)\right\}$ $V_A(x) = \left(\frac{x-n\beta}{x+n\beta}\right)^{\frac{A}{2}} J_A\left(2c\sqrt{x^2-n^2\beta^2}\right)$	$\beta \geqq 0$ $c > 0$ [18])

Anmerkungen.

Die beiden Werke:

G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, J. Springer, 1937,

N. W. McLachlan et *P. Humbert*, Formulaire pour le calcul symbolique. Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. C. Paris, Gauthier-Villars, 1941

werden wir durch Angabe der Autorennamen zitieren.

[1]) *Doetsch:* S. 159, Satz 1.

[2]) *Doetsch:* S. 161, Satz IV *b*.

[3]) Dass eine Lösung der Funktionalgleichung (8) vorliegt, kann in diesem einfach gearteten Fall durch Ausrechnung direkt verifiziert werden. Die Relation ist im wesentlichen identisch mit der bekannten Formel

$$\int_0^1 (1-\theta)^{A-1}\,\theta^{B-1}\,d\theta = \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}\,;\quad A>0\,,\,B>0\,,$$

durch die eine Darstellung der *Beta-Funktion* durch *Gamma-Funktionen* bewerkstelligt ist. Die auf dem Bestehen der Funktionalrelation beruhende Möglichkeit der expliziten Gestaltung der Neumannschen Reihe wurde z. B. in dem hier vorliegenden Fall von *A. W. Brown*, Ann. math. Statist. *11*, 448—453 (1940) genutzt.

[4]) Hier bedeutet $L_n^{(\alpha)}(x)$ das durch die Identität

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x}\,x^{n+\alpha} = e^{-x}\,x^{\alpha}\,L_n^{(\alpha)}(x)\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definierte «verallgemeinerte» *Laguerresche Polynom.* LT. *Doetsch:* S. 403, Nr. 42.

[5]) Man stellt leicht fest, dass sich für $c = 0$ die 1. Lösung, für $c = -1$, $\beta = 1$ die 2. Lösung ergibt.

[6]) Vgl. die direkte Verifikation für das Bestehen der Funktionalgleichung (8) *H. Hadwiger*, Skand. Aktuarietidskr. 1940, 101—113. Über eine Anwendung auf die Entwicklung der Lösung einer Integralgleichung in die Neumannsche Reihe vgl. *H. Hadwiger*, Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. *40*, 31—39 (1940). LT. *Doetsch:* S. 402, Nr. 19.

[7]) Es bezeichnet

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha}\,J_\alpha(i\,x)\ \left\{ i = \sqrt{-1}\,,\ J_\alpha(x) = \textit{Besselsche Funktion} \right\}.$$

LT. *McLachlan-Humbert*, S. 35, 4. Formel von oben.

[8]) LT. *Doetsch:* S. 403, Nr. 37.

[9]) Hier bezeichnen $H_n(x)$ die *Hermiteschen Polynome*, die durch die Identität

$$\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2} = e^{-x^2}\,H_n(x)\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert werden können. LT. *McLachlan-Humbert*, S. 17, 8. Formel von oben.

[10]) Hier bedeutet $M_{k,m}(x)$ die *Whittakersche Funktion*

$$M_{k,m}(x) = x^{m+\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}}\, {}_1F_1(m+\tfrac{1}{2}-k,\, 2m+1\,;\, x)\,,$$

wo ${}_1F_1(a, \varrho; x)$ die *konfluente hypergeometrische Reihe*

$${}_1F_1(a, \varrho; x) = 1 + \frac{a}{\varrho}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{\varrho(\varrho+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

darstellt. LT. *Doetsch:* S. 310.

Die 5. Lösung für $c = \frac{1}{4}$ ist ein Spezialfall der 8. Lösung. Man setze $\beta = 0$ und beachte die Identität

$$M_{o,m}(x) = 4^m\, \Gamma(m+1)\, \sqrt{x}\, I_m\left(\frac{x}{2}\right).$$

[11]) LT. *McLachlan-Humbert:* S. 35; 6. Formel von oben.

[12]) LT. *Doetsch:* S. 403, Nr. 37.

[13]) LT. wie [11]).

[14]) LT. wie [12]).

[15]) LT. *McLachlan-Humbert:* S. 35, 12. Formel von oben.

[16]) LT. *Doetsch:* S. 403, Nr. 34.

[17]) LT. *McLachlan-Humbert:* S. 37, 3. Formel von unten. Setzt man $\beta = 0$, so ergibt sich die 13. Lösung.

[18]) LT. *McLachlan-Humbert:* S. 30, 4. Formel von unten. Setzt man $\beta = 0$, so ergibt sich die 14. Lösung.